TRAITÉ
D'ASTRONOMIE THÉORIQUE.

ASTRONOMIE PHYSIQUE.

TRAITÉ

D'ASTRONOMIE THÉORIQUE

PAR

FRÉDERIC THÉODORE SCHUBERT,

Conseiller d'Etat actuel de SA MAJESTÉ L'EMPEREUR, Chevalier des Ordres de St. Wladimir et de Ste. Anne, Membre des Académies des Sciences de St. Pétersbourg, de Stockholm, de Copenhague, d'Upsala, de Boston, de la Société des Naturalistes de Moscou, de l'Université de Casan, du Département Impérial de l'Amirauté, etc.

TOME TROISIÈME.

ASTRONOMIE PHYSIQUE.

NOUVELLE ÉDITION.

HAMBOURG,
CHEZ PERTHES & BESSER.
1834.

À SA MAJESTÉ IMPÉRIALE

ALEXANDRE IER,

EMPEREUR ET AUTOCRATE

DE TOUTES LES RUSSIES,

ETC. ETC. ETC.

SIRE,

L'OUVRAGE que j'ose mettre aux pieds de VOTRE MAJESTÉ IMPÉRIALE, est le fruit d'un travail de trente-cinq ans, le tems le plus heureux de ma vie, puisque sous un gouvernement éclairé et doux, j'ai pu le consacrer à la science qui nous donne une faible idée de la puissauce et de la sagesse infinie de l'Auteur de la Nature. Comme ce livre doit son existence à la protection de VOTRE MAJESTÉ, qui m'a donné l'aisance et la tranquillité nécessaires à un pareil travail, et qui a daigné fournir les fraix de l'impression, ce n'est qu'un devoir que j'accomplis, c'est le tribut de la plus pure reconnaissance que j'acquitte, en le dédiant au nom sacré de VOTRE MAJESTÉ. Mais je remplis en même tems le voeu le plus cher à mon cocur, celui de donner à VOTRE MAJESTÉ une preuve,

que j'ai tâché, autant que mes faibles talens, et la situation que la providence m'a assignée, l'ont permis, d'être utile à la science qu'il a plu à VOTRE MAJESTÉ de me confier dans SON Empire, et de me rendre digne des bienfaits dont ELLE a daigné me combler.

Je suis avec le plus profond respect,

SIRE,

DE VOTRE MAJESTÉ IMPÉRIALE

le plus humble et plus fidèle sujet

Fréderic Théodore Schubert.

TABLE DES MATIERES

contenues dans le troisième Tome.

LIVRE PREMIER.

Des lois générales du mouvement.

a

LIVRE II.

Des lois de Kepler.

LIVRE III.

De la gravitation universelle.

LIVRE IV.

De la rotation des corps célestes.

LIVRE V.

Des Perturbations des corps célestes.

FIN DE LA TABLE DU TROISIEME TOME.

TRAITÉ
D'ASTRONOMIE THÉORIQUE.

TOME TROISIÈME.

ASTRONOMIE PHYSIQUE.

INTRODUCTION.

Toutes les notions, dont l'ensemble a reçu le nom de philosophie, doivent leur origine à ces deux penchans irrésistibles dont le créateur a doué nôtre ame: celui de généraliser nos idées et nos connaissances, et celui d'approfondir la cause de chaque effet. L'un et l'autre ont été abusés par l'homme, ainsi que tout ce qu'il a reçu des mains bienfaisantes de la nature, sans cependant pouvoir entièrement déjouer ses desseins. Le dernier penchant a conduit les hommes aux plus importantes découvertes physiques; mais son abus, et la manie d'expliquer des effets, avant que l'on en eût une connaissance solide, firent naître ces innombrables systèmes et hypothèses qui ont, peut-être, retardé les progrès des sciences plus qu'aucune autre chose. On peut dire sans la moindre partialité, que l'astronomie a moins de reproches à se faire sur ce point, que les autres sciences. On n'a fait des hypothèses en astronomie, que pour faciliter le calcul, ou pour donner aux observations

une direction convenable. L'astronomie *rationnelle* était entièrement achevée, avant qu'on songeât à l'astronomie *physique*, et celle-ci était, dans toute son étendue, le résultat de la première: on connaissait parfaitement les mouvemens des corps célestes, avant qu'on entreprît de les expliquer; et cette connaissance, ainsi que l'ordre parfait de ces mouvemens, qu'elle faisait voir, fut la cause qui força les astronomes de songer à une explication physique.

Lorsque le philosophe a fait la revue de toute la richesse d'observations anciennes et modernes, dont les deux premiers tomes de cet ouvrage offrent les résultats; quand à travers le labyrinthe des mouvemens planétaires, il est parvenu à la connaissance du mécanisme de cette grande machine, et qu'il s'aperçoit enfin, que tous ces mouvemens qui paraissent si compliqués, et qui se présentent sous tant de formes, se font suivant une seule règle simple et générale; alors il ne lui reste qu'un besoin, d'autant plus pressant, que c'est le dernier. Quelle est la cause efficiente de ce mouvement uniforme? Quelle force porte cette infinité de corps immenses, à obéir à la même loi, sans s'écarter jamais des orbites qui leur ont été prescrites? Quel est le dernier ressort qui met en mouvement le rouage de cette machine?

Rien n'est plus naturel que ce passage à l'astronomie physique. Il est probable qu'elle n'existerait pas sans la théorie Keplérienne qui découvrit la loi simple et générale des mouvemens célestes: on peut au moins regarder l'age de Kepler comme l'époque de l'origine de cette science. Comment aurait-on pu penser à chercher, par les principes des mathématiques et de la physique, la cause de phénomènes, dans lesquels on n'aperçut aucun dessein déterminé, aucun ordre géométrique? N'aurait-il pas valu mieux attribuer ces mouvemens sans bût et sans ordre, au pur hazard qui les laisse exister, jusqu'à ce qu'ils se détruisent eux-mêmes? Il est vrai que les philosophes grecs ont proposé des questions qui semblent appartenir à l'astronomie physique; mais, sans avoir en vue une théorie géométrique des lois du mouvement, ils s'égaraient dans un labyrinthe d'hypothèses métaphysiques qui, dans le fond, n'ont rien de commun avec la physique. Au lieu de chercher une simple force mouvante, ils franchirent les bornes que nous devons mettre à nos recherches, ils projettaient des plans d'après lesquels l'u-

nivers devait être produit, et tâchaient de pénétrer l'essence des premiers élémens ou atomes qui devaient le composer. Une philosophie plus solide, et une connaissance plus parfaite du système du monde, fit disparaître ces rêveries; et peu de tems après que Copernic eut découvert le vrai système, on commença à faire des recherches sur la partie physique ou mécanique des mouvemens célestes. *L'astronomie physique* est une de ces sciences qui doivent leur existence au dix-septième siècle, si riche en découvertes, et qui font le plus grand honneur à l'esprit humain. Elle a produit les plus grandes découvertes, et même la science entière de la dynamique. Jamais peut-être l'esprit humain ne s'est montré plus grand, que lorsqu'il développa les premières propriétés essentielles de la matière; lorsqu'il remonta à la première source de cette variété infinie de mouvemens que la nature présente aux êtres pensans; lorsqu'il déchiffra l'essence de ces substances intellectuelles qui, selon les anciens, conduisent chaque planète dans son orbite curviligne, et la retiennent dans une distance convenable au soleil; lorsqu'il osa concevoir des êtres invisibles et jamais conçus; lorsque, sans se perdre dans des spéculations métaphysiques sur la nature des *forces*, il les soumit aux mesures géométriques les plus exactes, comme si c'étaient des corps, et réduisit les lois de leurs actions en un système qui, par rapport à la solidité et l'étendue, n'est point inférieur aux autres sciences mathématiques; en un mot, lorsque NEWTON entra dans sa brillante carrière.

Il était aisé de prévoir, que les premières hypothèses physiques seraient aussi peu satisfaisantes que celles de l'astronomie rationnelle, et que l'on raffinerait longtems, avant de revenir à l'hypothèse la plus simple; cependant les choses altèrent beaucoup plus vite dans l'astronomie physique. Des Cartes est sans doute le premier qui ait composé un système complet, pour expliquer le mécanisme des mouvemens célestes; mais il lui manque cette simplicité, dont la nature ne s'écarte jamais, et les connaissances astronomiques plus exactes ont brisé les *tourbillons Cartésiens* depuis longtems. Plusieurs ans auparavant Kepler émit des idées relativement à l'astronomie physique, qui sont peu différentes de celles qui font encore aujourd'hui la base de cette science; et il paraît qu'on n'a pas assés reconnu les mérites que

ce grand génie a aussi de cette partie de l'astronomie. On trouvera dans la suite de ce livre, plusieurs passages de ses ouvrages, qui pouvaient aisément conduire un génie tel que Newton à ses sublimes idées. On peut dire, sans être injuste, que Newton a été instruit par Kepler, non-seulement parce qu'il a déduit toute sa théorie, comme une conséquence immédiate, des lois de Kepler, sans lesquelles cette théorie n'existerait pas, mais encore à cause de ces passages si clairs et si solides, que Newton ne les aurait pas désavoués. Les connaisseurs ne penseront pas, que cette remarque soit préjudiciable au mérite de Newton. Il y a toute apparence, que Kepler lui-même aurait tiré de ses propres découvertes, toutes les conclusions de Newton, si cela n'avait exigé encore beaucoup d'autres découvertes mathématiques qui, en partie, furent faites peu de tems avant Newton, mais principalement par lui-même. Connaissant profondement toutes les observations astronomiques et toutes les découvertes des grands géomètres de son tems, animé par un génie ardent, éclairé par une saine philosophie, et libre de la manie de faire des hypothèses, Newton fraya lui-même la route, dans laquelle il a fait une suite de découvertes, dont une seule aurait immortalisé son nom. La théorie *Newtonienne* fut bientôt reconnue de tous les astronomes pour une vérité démontrée, et les recherches et calculs astronomiques les plus importans depuis Newton, ne sont qu'une application de cette théorie à un cas particulier. L'*astronomie physique* est le système des découvertes de Newton.

Les premières propriétés fondamentales de la matière, et les lois générales des forces mouvantes, spécialement des forces centrales qui sont la base de l'astronomie physique, auraient pu être supposées ici. Mais pour que ce tome ne fût pas un fragment, mais un traité complet, il était nécessaire de faire précéder les *premiers principes* des *mouvemens de translation* et de *rotation* (*Liv. I.* et *Liv. IV. Chap.* 1. 2. 3.). Au moyen de ces principes, Newton conclut de la théorie Keplérienne des mouvemens planétaires, l'existence d'une *force centrale, dirigée vers le soleil*, et la *loi* suivant laquelle cette force agit à *différentes distances* (*Liv. II. Ch.* 1.). Cette loi étant connue, les mouvemens des planètes suivant les *lois de Kepler* en étaient une suite nécessaire, et la force qui retient éternellement les planètes dans leurs orbites, était décou-

verte (*Liv. II. Ch.* 2.). Il était naturel, d'appliquer ces raisonnemens aussi aux systèmes des satellites, où les lois de Kepler sont également exécutées, et d'étendre la loi de la force centrale à des distances quelconques, parce qu'on ne conçoit pas, pourquoi elle ne serait active qu'à de certaines distances. C'est ainsi que Newton découvrit, que Saturne, Jupiter, et la terre, sont doués d'une force centrale, semblable à celle du soleil; que cette force centrale de la terre est la même que celle qui, à sa surface, est appellée *gravité* ou *pesanteur;* et que la force centrale, ou l'*attraction* est une *propriété commune à tout ce qui est matériel*, et par conséquent proportionnelle a la masse (*Liv. III. Ch.* 1.). Il en résulte quelques petites corrections de la théorie Keplérienne du mouvement elliptique des planètes autour du soleil, supposé immobile au foyer, quand-même il n'y aurait pas d'autres corps (*Liv. III. Ch.* 2. 3.). Le rapport qui existe entre la force centrale et la masse, donne des éclaircissemens très-importans relativement à la valeur intrinsèque, ou aux *densités* et *masses* des corps qui composent notre système solaire (*Liv. III. Ch.* 4.). Cette découverte de l'attraction ou de la pesanteur universelle n'était rien moins qu'une spéculation inutile, et Newton lui-même montra les conséquences importantes que l'on peut en déduire; comme la détermination de l'*aplatissement de la terre* (*Liv. IV. Ch.* 7.), l'explication de la *précession des équinoxes* (*Liv. IV. Ch.* 6.), et des *perturbations* des corps célestes (*Liv. V.*). Cette partie a été le moins approfondie par Newton, et le plus enrichie par les travaux des astronomes et analystes modernes, principalement par les recherches sur la *libration de la lune* (*Liv. IV. Ch.* 5.), sur les *perturbations de Jupiter et Saturne* (*Liv. V. Ch.* 5. 6. 7.), la *théorie de la lune* (*Liv. V. Ch.* 8.), celle des *satellites de Jupiter* (*Liv. V. Ch.* 9.), et sur les *changemens de l'état du système solaire* en général (*Liv. V. Ch.* 10.).

LIVRE PREMIER.

DES LOIS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT.

CHAPITRE PREMIER.

Notions générales du mouvement et des forces.

§. 1. La notion générale de ce que nous appelons *corps*, est une des plus simples et des premières qui se forment dans nôtre ame: une longue suite de tems, des efforts pénibles, et un heureux développement de nos facultés les plus secrètes, étaient nécessaires, pour que nôtre esprit pût franchir l'abyme invisible qui sépare le monde matériel du monde intellectuel, et tourner son attention des objets extérieurs à son intérieur. Cependant cette idée n'est pas tout-à-fait simple; car quiconque combine une idée distincte avec le mot *corps*, en met l'essentiel dans les deux propriétés suivantes, dont chacune peut être régardée comme le résultat d'un de nos sens principaux, l'organe de la *vue* et celui du *toucher*: ces propriétes sont 1) une certaine *grandeur* ou *étendue*, 2) l'*impénetrabilité*, qui donne à chaque corps un *lieu* propre à lui. Le premier point de vue en fait des objets de la géométrie, le second en fait des objets de la dynamique et de la physique: le premier donne l'existence à un être idéal, au corps *géométrique* proprement dit, et toute la richesse des vérités géométriques en est développée;

le second fait des corps, ce que l'on entend vulgairement sous ce mot, et il les rend susceptibles des innombrables qualités physiques, dont les variétés et les combinaisons composent la nature entiere.

§. 2. Sans ces deux propriétés nous ne pouvons seulement concevoir un corps comme *possible.* Mais dès que nous l'imaginons comme réellement *existant* hors de nous, dès qu'il doit former une partie de la nature, tout ce qui était indéterminé disparaît, et ses rapports à toutes les autres parties de la nature doivent être entièrement déterminés. Le premier, et en faisant abstraction des qualités physiques, le seul rapport qui doit être déterminé pour que le corps existe, est le *lieu* qu'il occupe. Aucun corps ne peut exister, sans occuper un lieu déterminé. Nous lui attribuons donc un certain lieu, dès que nous le regardons comme un être réel. Mais comme tout lieu lui est indifférent, tant qu'il n'est pas mis en rapport avec d'autres corps, nous sommes, pour ainsi dire, irrésolus sur le lieu qu'il faut lui attribuer: nous le plaçons par la pensée tantôt dans un lieu, tantôt dans un autre, nous le transportons ainsi d'un lieu dans un autre; et voilà la première idée du *mouvement.* Comme toutes les parties de l'espace immense sont indifférentes, il n'y a aucune raison, pour que ce transport du corps, formé dans notre imagination, finisse. Nous pouvons nous figurer les corps en *mouvement,* aussi bien qu'en *repos;* mais ces deux cas renferment une infinité d'autres cas. Les lieux du repos, ainsi que les directions et vitesses du mouvement, sont innombrables; cependant le corps ne peut avoir qu'une seule de toutes ces modifications. Ce labyrinthe immense effraye l'esprit humain; l'instinct de découvrir la cause de chaque effet, le porte à chercher la détermination du repos ou du mouvement du corps dans un état précédent; mais il se voit toujours également éloigné de l'issue de ce labyrinthe, et ne trouve rien dans le corps même, qui puisse le déterminer plutôt à un état qu'à l'autre; jusqu'à ce qu'enfin il est conduit ici, comme partout, au commencement de son existence, et à l'idée d'un être tout-puissant qui créa le corps, mais qui ne pouvait le créer, sans déterminer en même tems sa manière d'être, son lieu, son repos ou son mouvement. Il ne peut plus se figurer aucun corps, sans voir la main qui le reposa tranquillement dans un lieu

de l'espace absolu, ou le lança dans l'univers avec une vitesse mesurée, et suivant une direction déterminée. Par-là l'état du corps est déterminé pour l'éternité, tant qu'on fait abstraction de sa liaison avec d'autres corps. Il n'y a rien qui puisse troubler son repos, ou altérer la direction et la vitesse de son mouvement. Nous ne pouvons concevoir le corps, qu'en repos ou dans un mouvement déterminé; et tant que son premier état n'est pas dérangé par des causes étrangères, le *repos* sera éternel, et le *mouvement uniforme et rectiligne*, c'est-à-dire, conservant la vitesse et la direction du mouvement qui lui avait été imprimé au commencement de son existence. Ces deux cas ou états sont également possibles, également conformes à la nature du corps: qu'il soit en repos ou en mouvement, qu'il se meuve suivant cette direction ou une autre, avec telle vitesse ou une autre; c'est ce dont on ne peut trouver la source que dans une cause externe qui lui a communiqué ce repos ou ce mouvement. Mais dans tout cas il conservera éternellement le repos ou le mouvement qui lui a été imprimé, sans changer de direction ou de vitesse, tant qu'il ne survient une nouvelle cause externe qui agit sur lui ([1]).

C'est à peu près de cette manière, que l'on est parvenu à découvrir la troisième propriété essentielle des corps, qui est connue sous le nom d'*inertie*, et à laquelle on a souvent donné le nom peu convenable de la *force d'inertie* (*vis inertiæ*). Toute la *mécanique* et *dynamique* est fondée sur elle; et l'idée même des *forces* mouvantes se réduit finalement au principe ou à la loi d'inertie, qui peut être exprimée de cette manière: »L'état »dans lequel se trouve un corps, soit repos soit mouvement, et toute alté»ration de cet état, soit le passage du repos au mouvement et réciproque»ment, soit un changement de direction ou de vitesse, ne peut pas être l'effet

(1) Il y a des personnes, à qui la continuation du mouvement uniforme ne paraît pas de la même évidence, que celle du repos; mais celui qui doute de la première, est obligé de nier en même tems la possibilité du mouvement uniforme en général. Le corps, auquel un certain mouvement fut communiqué au commencement de son existence, doit le continuer au moins pendant quelque tems, car autrement il serait effectivement en repos, parce qu'aucun mouvement ne peut exister sans durée, quelque petite qu'elle soit. Mais alors il peut durer tout aussi bien éternellement; car on ne conçoit pas, pourquoi le corps perdrait son mouvement, après l'avoir conservé pendant quelque tems, à moins que des causes externes n'agissent sur lui.

»du corps même, pour lequel toutes les conditions sont indifférentes, mais »d'une cause étrangère qui a agi sur le corps. Chaque nouvelle altération »suppose une nouvelle action: une altération continuelle suppose donc une »action non-interrompue, ou renouvelée dans chaque instant". C'est ainsi que se forme l'idée des forces, qui ne suppose que l'application du principe d'inertie, modifiée de nouveau dans chaque instant. Lorsqu'un corps change de direction ou de vitesse, il faut qu'il ait reçu dans ce moment une nouvelle *impulsion;* et si ce changement se fait sans interruption suivant la loi de continuité, par ex. si le corps parcourt une ligne courbe, il faut nécessairement supposer des *forces* qui agissent de même suivant la loi de continuité, et qui le nécessitent à changer son mouvement dans chaque instant: la loi de ce changement servira donc à déterminer les forces qui le produisent.

§. 3. Chaque nouvelle impulsion communiquera donc au corps une nouvelle vitesse et direction, qu'il conservera d'après le même principe, aussi longtems qu'il n'est pas exposé à l'action d'une nouvelle cause étrangère: son mouvement après l'impulsion sera également uniforme et rectiligne, mais plus ou moins vite que le précédent, et suivant une autre direction, conformément à celle de l'impulsion. Sa route sera détournée par chaque nouvelle impulsion: elle sera donc une ligne *brisée,* lorsque les impulsions succèdent l'une à l'autre par des intervalles finis, et une ligne *courbe,* si ces intervalles sont infiniment petits, ensorte qu'il se fait une nouvelle impression dans chaque instant. Une pareille impulsion non interrompue, mais continuée suivant la loi de continuité, est ce que l'on appelle *force.* La courbe que décrit un corps sollicité par des forces, se forme simplement suivant la loi d'inertie, comme le mouvement uniforme, avec cette différence que cette loi doit être autrement appliquée dans chaque instant: car l'essentiel de l'inertie est que le corps est susceptible de chaque impression, et qu'il s'approprie chaque mouvement qui lui est communiqué par une impulsion quelconque, parce que chaque état de repos ou de mouvement lui est indifférent. Il en est de même de la vitesse. Chacun de ses changemens est d'une grandeur, ou finie, ou évanouissante suivant la loi de continuité; la

2

vitesse peut donc être représentée par les inclinaisons d'une ligne brisée ou courbe, selon que les intervalles des impulsions sont finis ou infiniment petits, selon que l'uniformité du mouvement est altérée par des *impulsions* proprement dites ou par des *forces;* mais tous les deux cas résultent du même principe d'inertie. C'est précisément de la même manière, qu'en géométrie la naissance des courbes est expliquée par la route qu'un point parcourt. La proposition que la courbe a, dans chaque point, la direction de sa tangente, est équivalente au principe d'inertie. Tous les principes de la mécanique, et toutes les formules élémentaires du mouvement accéléré, sont fondés sur la supposition qu'on peut traiter de la même manière, les lignes que décrivent les corps sollicités par des forces, et que celles-ci ne sont autre chose que des impulsions réitérées une infinité de fois sans intervalles assignables, ensorte que la vitesse et la direction des corps sont conformes à la loi combinée d'inertie et de continuité.

§. 4. De cette maniere on se fera une idée distincte des différentes espèces de forces. Les impulsions innombrables dont une force est composée, peuvent être toutes de même grandeur, ou elles deviennent plus fortes ou plus faibles: d'où il resulte des forces *constantes* ou *variables*. La direction des impulsions donne encore un point de vue, sous lequel on peut diviser les forces en différentes espèces, dont la plus importante renferme celles qui sont constamment dirigées vers le même point qui est appelé *centre* des forces. Ces *forces centrales* sont le fondement de toute l'astronomie physique, il est donc nécessaire de s'en faire une idée bien distincte. La *pesanteur,* ou la pression et la chute des corps graves a sans doute donné la première idée de cette espèce de forces. Lorsque nous apercevons que tous les corps, dans quelque lieu de la terre qu'ils se trouvent, parcourent, s'ils ne sont pas arrêtés, le plus court chemin ou la ligne perpendiculaire à la surface de la terre; quand nôtre main qui les empêche de tomber, sent la pression qu'ils exercent suivant cette direction; et que nous nous rappelons, que la terre est une sphère: nous comprenons, que toutes les directions des corps tombans se rencontrent au centre de la terre, que par conséquent la pesanteur est une force constamment dirigée vers le centre de la terre, ou une force

centrale. Elle est un phénomène, dont l'explication physique serait apparemment de peu d'utilité pour nous. Il nous suffit de savoir, qu'il y a une force qui *pousse* ou qui *tire* tous les corps vers le centre de la terre. Chacun est le maître de choisir celle de ces deux images ou dénominations, qui lui paraît la plus claire; mais il ne faut pas oublier, que les mots, *tirer* ou *pousser*, ne sont pas des explications ou des hypothèses, mais seulement des termes employés pour abréger. Au lieu de s'égarer dans des spéculations sur la véritable nature ou cause de cette force, au lieu d'imaginer une nouvelle force ou impulsion qui produit le phénomène de la force centrale, on fera mieux de tâcher de découvrir les lois, suivant lesquelles elle agit, pour pouvoir les employer, lorsqu'on apercevra encore d'autres forces centrales dans la nature.

§. 5. S'il est permis de regarder la force centrale comme une *attraction*, seulement pour indiquer sa direction; le corps attirant ou le centre des forces, et le corps attiré seront ce qui, dans la théorie des machines, est appelé *puissance*, et *poids* ou *masse*; relativement à la pesanteur, le poids est le corps tombant, la puissance est le centre de la terre. Il se présente ici une grande différence entre les forces, qui ne résulte pas de leur nature, mais des différens sens que nous attribuons au mot *force*. La plupart des forces que nous connaissons, sont d'une grandeur déterminée, et l'effet qu'elles produisent, ne peut aller au delà d'une certaine mesure. Il s'en suit nécessairement, que de pareilles forces communiqueront à un plus grand poids, ou à une plus grande masse, un mouvement moins rapide, qu'à une petite masse: on ne peut donc pas déterminer la vitesse ou l'*accélération* qui est communiquée à la masse, sans connaître celle-ci aussi bien que la force. Afin que la masse soit transportée avec une certaine vitesse, il faut que la même vitesse soit communiquée à chaque molécule de la masse. Or la quantité de la force étant déterminée, elle doit être distribuée à toutes les molécules uniformément, ou proportionnellement à leurs masses: la force doit être partagée en autant de portions égales, que la masse renferme de molécules, ou en autant de portions, que la masse contient de parties égales à celle que l'on a prise pour unité des masses. Comme la nature du mouvement suppose nécessairement, que la force exerce une action égale sur chacune des

molécules qui participent au mouvement; il est clair, que son action sur la masse entière, ou l'accélération, sera d'autant plus petite, que le nombre des molécules, ou la masse est plus grande: donc, pour trouver l'effet que la force exerce sur une masse donnée, il faut la diviser par la masse; c'est-à-dire, les accélérations ou vitesses, communiquées par des forces égales à différentes masses, sont en raison inverse des masses. Nommant donc P la force, M la masse mise en mouvement, son accélération pourra être exprimée par $\frac{P}{M}$; en sorte qu'en désignant une autre force et une autre masse par p et m, le rapport des accélérations sera $= \frac{P}{M} : \frac{p}{m} = P\,m : p\,M$; c'est-à-dire, en nommant $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{M}$ la force et la masse, qui sont les unités par lesquelles on exprime toutes les forces et masses, les accélérations seront comme les nombres $\frac{P}{\mathfrak{P}} \cdot \frac{m}{\mathfrak{M}}$, $\frac{p}{\mathfrak{P}} \cdot \frac{M}{\mathfrak{M}}$, chacun de ces quatre facteurs étant un nombre. On appelle $\frac{P}{\mathfrak{P}}$ ou P la quantité absolue de la force, ou la force *absolue*, et $\frac{P}{M}$ la mesure de l'accélération relativement à la masse M, ou la force *accélératrice*, c'est-à-dire, celle qui produit du mouvement ou qui communique une certaine vitese.

§. 6. L'effet d'une force est le *mouvement* qu'elle produit, ou qu'elle tend à produire, si le mouvement est arrêté par quelque obstacle; et cette tendance se fait sentir par une *pression*. Cette pression, par laquelle les forces deviennent sensibles à l'organe du toucher, ainsi qu'à celui de la vue par la vitesse communiquée, nous donne, de ce que l'on appelle force, la notion la plus simple que nous en aurons peut-être jamais: elle constitue la grandeur absolue de la force, et personne n'hésitera à regarder une force comme deux fois plus grande, si elle exerce une pression deux fois plus forte, qu'une autre; elle est donc ce que nous avons nommé P (§. 5.). Cette pression est invariablement la même, tant que la force P ne change pas, quelle que soit la grandeur de la masse M; mais dans une plus grande masse, la pression se distribue sur un plus grand nombre d'élémens; chacun de ces élémens éprouvera donc une pression d'autant plus faible qui, n'étant autre chose que la tendance à produire du mouvement, communiquera à chaque élément, et par conséquent à la masse entière, un mouvement d'autant plus lent, l'accélération sera d'autant plus petite; elle sera donc proportionnelle à la fraction $\frac{P}{M}$. La pression est proprement la mesure des forces. Mais

comme il est difficile de la réduire à une mesure déterminée, on a été obligé de se servir d'un autre effet des forces, lequel, étant une suite immédiate de la pression, frappe cependant un autre de nos sens, dont les sensations sont plus aisées à mesurer, que celles du toucher. En effet, la pression n'étant autre chose que l'action de la force, qui est arrêtée par un obstacle, et par-là rendue sensible au toucher, il est clair, que l'effet qui a lieu, lorsque l'obstacle est enlevé, doit être proportionnel à la pression, et qu'en conséquence il peut être employé au lieu d'elle, pour mesurer les forces. Or l'effet qui a lieu, quand l'obstacle est levé, est le mouvement de la masse, dont la quantité est déterminée par l'espace qu'elle parcourt dans un certain tems, ou si l'on veut, dans le premier instant. Deux forces P, Π, qui font parcourir à des masses égales, des espaces égaux durant un certain tems, sont égales, parce que leurs effets étant les mêmes, ils le seront encore, lorsqu'étant arrêtés par un obstacle, ils ne feront sentir qu'une pression. Or on peut considérer P comme étant composée de n forces égales à $\frac{P}{n}$, dont chacune meut $\frac{1}{n}$ de la masse M: on aura donc $\Pi = P = n \cdot \frac{P}{n}$, c'est-à-dire, les forces $\Pi . \frac{P}{n}$, sont en raison de $n : 1 = M : \frac{M}{n}$, ou des masses auxquelles elles font parcourir les mêmes espaces dans le même tems. Une force Q qui fait parcourir à la même masse un espace double ou n fois plus grand, sera deux ou n fois plus grande: car elle peut être envisagée comme étant composée de n forces égales, dont chacune, faisant parcourir à la masse l'espace simple, est égale à la force P. On en conclura aisément cette proposition générale: » les » forces sont proportionnelles aux espaces qu'elles font parcourir à des masses » égales en tems égaux, ou à leurs accélérations; elles sont aussi proportionnel» les aux masses, auxquelles elles font parcourir des espaces égaux en tems » égaux «. Soient donc P, Π, Q, les forces, G, G, H, les espaces parcourus dans le même tems en vertu de ces forces, et M, N, M, les masses qui sont sollicitées par les forces P, Π, Q: cela posé on aura $P : \Pi :: M : N$, et $P : Q :: G : H$, d'où il suit, $\Pi : Q :: N . G : M . H :: \frac{G}{H} : \frac{M}{N}$, et $\frac{\Pi}{N} : \frac{Q}{M} :: G : H$. Les forces ou les pressions sont donc proportionnelles aux produits de la masse par l'espace parcouru; et les forces accélératrices sont proportionnelles à ces espaces.

§. 7. On verra bientôt, que les vitesses sont en raison des espaces parcourus dans le même tems, G, H: il suit donc de la proposition précédente, que les forces accélératrices sont proportionnelles aux vitesses qu'elles communiquent. On a beaucoup disputé, si cette proportionnalité peut être démontrée *à priori*, ou si elle est une vérité que l'expérience seule nous apprend, une loi de la nature, de l'existence de laquelle nous sommes certains, sans pouvoir la démontrer. S'il m'est permis de dire mon avis sur un sujet, sur lequel les plus grands géomètres ont eu différentes opinions, je dirai qu'il m'a toujours paru, qu'il y a quelque mal-entendu dans cette dispute. Il ne s'agit pas du tout ici d'une loi de la nature, mais de la logique: la question est, quel est le point de vue le plus simple, le plus naturel, sous lequel on peut envisager ce que nous appelons force accélératrice. Il s'agit simplement de la définition de ce mot, comme l'a dit Dalembert [1], et il parait inutile de discuter, si cette loi existe réellement dans la nature, ou si les forces sont en effet proportionnelles aux vitesses; car nous ignorons absolument, si les forces en général, telles que nous les concevons, existent hors de notre pensée. Ce que nous appelons force, n'est qu'un être idéal, une abstraction, dont nous nous servons, pour soumettre les lois du mouvement au calcul, une certaine fonction de l'espace parcouru ou de la vitesse, comme les logarithmes le sont de leurs nombres. Nous appelons *force*, ce dont le mouvement dépend, comme l'effet de sa cause: ce mot admet donc plusieurs sens, aussi bien que la cause d'un évènement; et l'on peut envisager les forces sous plusieurs points de vue. Mais comme il est sûr, que la cause doit être proportionnelle à son effet, la force l'est aussi nécessairement à son effet qui, à la vérité, n'est pas la vitesse seule, mais qui en sera toujours une fonction. On peut donc prendre pour l'effet, la vitesse v elle-même, ou son carré, ou son produit par la masse m, etc. et l'on peut nommer force, la cause proportionnelle à l'un ou l'autre de ces effets, c'est-à-dire, on peut mesurer les forces par v, ou par v^2, ou par vm, v^2m, etc. Mais pour éviter toute confusion, il sera bon de distinguer chacune de ces espèces de forces,

(1) *Traité de dynam. art.* 19. Pour nous, sans vouloir discuter, si ce principe est d'une vérité „nécessaire ou contingente, nous nous contenterons de le prendre pour une définition".

ou plutôt de ces notions ou fonctions, par différentes dénominations. C'est ainsi que l'on a appelé force *accélératrice* celle qui est proportionnelle à v, *motrice* celle qui est en raison de vm, force *vive* celle qui est mesurée par $v^2 m$, etc. On trouvera les mêmes résultats, en employant l'une ou l'autre de ces fonctions, pourvû qu'on ne les confonde pas dans les raisonnemens ou dans les calculs. La véritable loi de la nature, est celle que Newton a trouvée, savoir que la vitesse que le soleil communique dans un instant aux planètes, est en raison inverse du carré de leur distance; et il en eût pu déduire toutes les découvertes qui composent l'astronomie physique, sans prononcer le mot de *force* au lieu de vitesse. Il suit de cette loi, que tout ce qui est proportionnel à la vitesse, suit nécessairement le même rapport, soit qu'on lui donne le nom de force, de force accélératrice, ou tel autre nom. Si Newton avait supposé la force proportionnelle au carré de la vitesse, il aurait trouvé le même résultat; mais alors il aurait fallu dire que, non la force, mais sa racine carrée est en raison inverse du carré des distances.

§. 8. L'accélération d'une force, dont l'intensité est d'une grandeur donnée, dépend donc de la quantité de la masse accélérée; il en est tout autrement de la pesanteur et des forces semblables. Les forces de la première espèce, les forces *mécaniques* proprement dites, ne peuvent être appliquées immédiatement qu'à une partie du fardeau ou de la masse, et elles ne mouvraient que cette partie seule, si la cohésion des autres parties ne s'y opposait: pour vaincre cette résistence, la force doit nécessairement se distribuer sur toute la masse, pour communiquer à chaque partie le même degré de vitesse. La pesanteur, au contraire, est une propriété de la masse elle-même, elle pénètre l'intérieur de tous les corps; elle s'attache à chaque partie immédiatement et avec la même force, ensorte que la cohésion des parties n'a aucune influence sur son action. Deux corps graves tombent également vite, soit qu'ils soient séparés ou réunis en un seul corps, parce que chacun en particulier est accéléré par la pesanteur. Il s'en suit nécessairement, que la pression qu'un corps éprouve par la pesanteur, et qui est son *poids*, est la somme des pressions innombrables que tous ses élémens éprouveraient, quand même ils seraient séparés de lui; qu'en conséquence la *pression* P de la

pesanteur, qu'une masse quelconque M éprouve, est *proportionnelle à la masse*, $P = nM$, n étant une quantité constante. Tout le monde est persuadé de cette verité, celui même qui n'a jamais réfléchi là-dessus. Deux masses égales, deux balles de plomb, exercent sur la main ou sur la balance une pression deux fois plus grande qu'une seule de ces balles, et leur pression n'est point altérée, si on les fond en une seule [1]. L'expérience nous ayant donc appris, que toutes les molécules égales éprouvent la même pression, soit que chacune forme séparément un corps, ou qu'elles soient réunies à d'autres corps, c'est à-dire, que la pression est proportionnelle à la masse; il est évident, que tous les corps, quelle que soit leur grandeur ou leur pesanteur spécifique, sont également accélérés par la pesanteur. En effet, P étant égal à nM, l'accélération de chaque masse $\frac{P}{M}$ est une quantité constante n. Cette vérité est aussi constatée par l'expérience, et elle n'est qu'une conséquence nécessaire de la notion générale d'une force centrale. On ne sauroit se l'imaginer autrement que comme remplissant un espace sphérique autour du corps central. Tout ce qui entre dans cette sphère d'activité, est entrainé vers le centre par ces forces, semblables à des rayons divergens. Il y a un nombre infini de ces rayons, suivant la loi de continuité; ils existent toujours, et deviennent actifs, dès qu'ils rencontrent une masse; ils seront doublement actifs, s'ils rencontrent une masse double, etc. L'idée ne peut pas avoir lieu, que leur activité doive être divisée par la masse: un corps ne perd rien de son poids, lorsqu'un autre s'en approche; la pesanteur sur la terre ne diminuera pas, si la masse s'y accumule. Il s'en suit, que la pression proportionnelle à la masse, ou la quantité constante de l'accélération, n'est pas une propriété exclusive de la pesanteur, mais commune à toutes les forces centrales. Dès que l'on sait, que la force est constamment dirigée vers un point fixe, il est à présumer qu'à l'instar de la pesanteur, il y a $\frac{P}{M} = n$; et comme il ne s'agit ici que de rapports, on peut égaler n à l'unité; mais il ne faut pas oublier que P et M ne sont pas la même chose, mais des quantités hétérogènes. Dans un cas particulier on peut égaler P à M, en supposant le poids ou la pression égale à la masse; mais alors

(1) Le trafic de toutes les marchandises qui se vendent au poids, est fondé sur ce principe.

on a déterminé la mesure ou l'unité des forces une fois pour toutes. Si la masse M est éloignée de la terre, ou qu'elle soit transportée dans la sphère d'activité d'une autre planète, P sera plus ou moins grand qu'à la surface de la terre, tandis que M ne change pas: à cette nouvelle distance, $\frac{P}{M}$ sera également une quantité constante, mais différente de ce qu'elle était originairement: $\frac{P}{M} = n$ ne sera plus égale à l'unité. Cependant, la pesanteur à la surface de la terre nous étant plus familière qu'aucune autre force, il est naturel, de déterminer la mesure universelle des forces ensorte, que P soit égal à M, ou $\frac{P}{M} = 1$, lorsque P est cette pesanteur: cela ne veut dire autre chose, si non que la pesanteur à la surface de la terre servira d'unité pour mesurer une force quelconque. On verra plus bas, qu'à cause de la rotation de la terre, le coëfficient n même a des valeurs différentes de l'unité, qui dépendent de la hauteur du pole.

La chûte de tous les corps graves sur la terre étant la même dans un certain tems, ainsi que nous venons de le voir, elle sera un espace déterminé, le tems étant donné; on peut donc prendre cet espace pour la mesure de l'accélération: alors tout sera réduit à une mesure connue. L'usage adopté presque généralement est, de prendre la *seconde* pour unité des tems, et de désigner par g l'éspace que parcourent en une seconde les corps, tombant *librement* à la surface de la terre, c'est-à-dire, s'ils n'ont pas à surmonter la résistance de l'air ou d'un autre obstacle. On a trouvé par un grand nombre d'expériences, que g est égal à $15,625 = 15\frac{5}{8}$ pieds rhinlandiques: je supposerai $g = 3,65622$ mètres, ce qui est, suivant M. de Laplace, la valeur de g sur le parallèle dont la latitude est de 35°15'52'', le carré de son sinus étant $\frac{1}{3}$ (1). C'est ce que l'on appelle accélération de la pesanteur à la surface de la terre: elle est proportionnelle à la force accélératrice (§. 6.). Soit donc Q la force absolue d'un autre corps central, ou de la terre à une autre distance, N une autre masse, h l'espace que la force Q lui fait parcourir en une seconde: cela posé on aura $g : h :: \frac{P}{M} : \frac{Q}{N}$. Supposant donc $\frac{P}{M} = 1$, et nommant n la quantité constante, égale à $\frac{Q}{N}$, il viendra $g : h = 1 : n$, $n = \frac{h}{g}$, et $h = ng = \frac{Q}{N} g$.

(1) *Exposit. du Syst. du Monde, ed. 3. pag. 188.*

§. 9. La métaphysique ne parviendra peut-être jamais, par les spéculations les plus subtiles, à analyser parfaitement l'idée de ce que nous appelons force. Nous avons dû nous contenter de considérer son effet immédiat, une pression sensible, ou un mouvement visible; et l'on a vu, que cet effet peut servir à comparer les forces entre elles, ou à les mesurer. Mais cet effet même est encore vague, et de-là naît l'ambiguité du mot *force*. En distinguant la force d'avec le poids, on regarde la première comme la propriété d'une substance différente du poids; on envisage par ex. la force de la pesanteur comme une attraction inhérente à la terre, qui lui appartiendrait, quand-même il n'y aurait pas d'autres corps, sur lesquels elle pourrait agir. On regarde donc la force comme une chose distincte de son effet, de la pression, ou du mouvement qu'elle produit. Cette force abstraite que l'on se figure sans aucune relation à d'autres corps, est une pure notion métaphysique, mais qui est toujours supposée tacitement dans les recherches mathématiques. On pourrait appeler sa grandeur déterminée, force *absolue;* mais comme elle ne tombe pas sous les sens, et que par conséquent elle ne peut pas être mesurée, ce n'est pas un objet des mathématiques. Ce que l'on peut mesurer, ce sont les effets sensibles des forces, qui supposent des corps étrangers: c'est par le moyen de la liaison qui existe entre la force et le poids, que la comparaison ou la mesure devient possible. Mais quel effet est le plus propre pour cela, et comment faut-il mesurer l'effet lui-même? On a vu, comment cela se fait à l'aide de l'espace, parcouru dans un certain tems, par ex. une seconde, c'est-à-dire, par l'accélération; mais ceci n'est pas encore assés déterminé. Il est vrai que relativement aux forces centrales, l'accélération est indépendante de la quantité de la masse accélérée; mais il est aisé de prévoir, qu'à de plus grandes distances du corps central, ou du véritable siège de la force, l'accélération diminuera, comme tous les effets qui se répandent par un espace sphérique; la quantité *accélératrice* des forces centrales dépend donc de la distance au corps central. Quant aux autres forces, l'accélération, dépendant de la masse accélérée (§. 5.), est un effet tout-à-fait vague. En nommant la grandeur absolue d'une de ces forces mécaniques P, la masse accélérée M, et la force accélératrice relativement à cette masse *p*, on aura

$\frac{P}{M} = p$ (§. 5.), M et p étant variables, et P étant une quantité constante. Soit encore h l'accélération, ou l'espace que P fait parcourir à M en une seconde, g l'espace parcouru par M et par tout autre corps en vertu de la pesanteur, et que la force accélératrice de la pesanteur soit $= 1$: alors on aura (§. 8.) $p : 1 :: h : g$, $h = pg = \frac{P}{M} g$, et $Mh = Pg$ sera une quantité constante, puisque P et g sont invariables. Ce produit constant Mh est un effet de la force P, qui suffit pour la déterminer, parce que $P = \frac{Mh}{g}$. Il est en raison composée de l'espace parcouru h, et de la masse accélérée M; il est donc proportionnel à ce qu'on appelle *quantité du mouvement*. Ainsi les forces mécaniques sont proportionnelles au produit de la masse par sa vitesse, ou au mouvement produit: c'est par cette raison qu'on les appelle forces *motrices* qui, dans un pareil cas, ne sont pas différentes des forces absolues, ou plutôt, qui leur sont proportionnelles. Mais quand on veut appliquer ces différentes dénominations aux forces centrales, il se présente une différence importante. Alors P n'est plus une quantité constante: la quantité du mouvement Mh, ou la force motrice, est donc variable, et proportionnelle à la masse; mais cela même prouve, que P n'est pas ce que l'on pourrait appeler grandeur *absolue* de la force centrale. Il ne sera donc pas inutile, d'expliquer le vrai sens de ces trois termes de force *absolue*, *accélératrice*, et *motrice*, relativement aux forces centrales. Pour fixer les idées, j'en ferai l'application à la terre, en supposant comme une chose généralement connue, que la pesanteur diminue à de plus grandes distances de la terre.

§. 10. La pesanteur des corps, ou la force qui les pousse vers le centre de la terre, peut être envisagée comme l'effet d'une force attractive, inhérente à la terre, ainsi que nous attribuons l'attraction du fer à une force attractive de l'aiman, quoique nous nous trompions peut-être dans les deux cas. Ainsi nous nous représentons la force centrale de la terre, indépendamment des corps qu'elle attire: nous devons donc attribuer à cette force abstraite une certaine intensité, susceptible d'augmentation et de diminution, sans songer à ses relations à d'autres corps, ainsi que nous parlons de la valeur intrinsèque d'un aiman, de sa force plus ou moins grande, sans penser à une certaine masse de fer, attirée par lui à une certaine distance:

c'est sous ce rapport que nous disons, que le soleil ou Jupiter a une force attractive, plus grande que celle de la terre. Cette manière d'envisager les forces donne leur quantité *absolue:* elle est indépendante des corps étrangers. Mais chaque effet individuel qu'elle produit, dépend non-seulement de la masse sur laquelle elle agit, mais aussi des circonstances, dans lesquelles cette masse se trouve relativement au centre de la force absolue. La masse donne la quantité *motrice* de la force, les circonstances déterminent la quantité *accélératrice*. Il est certain, que la force attractive de la terre pourrait être renforcée, en augmentant la masse dont elle est composée; on ne disconviendra pas non plus, qu'un corps à la même distance serait attiré plus ou moins fort, s'il était transporté à une autre planète, ou s'il appartenait à un autre monde, construit suivant les mêmes lois, mais d'après une autre échelle. Cette intensité n'appartient pas, pour ainsi dire, au *droit naturel,* mais au droit *positif* de la nature; elle est une de ces quantités absolues, arbitraires, ou données, auxquelles la solution de chaque problème de mathématiques conduit finalement, et lesquelles, après la solution, doivent être déterminées par des observations, sans avoir aucune influence sur la solution même. Des raisonnemens *à priori* ne peuvent les découvrir: c'est ici que la philosophie naturelle finit, et que la révélation commence: c'est ici qu'il faut ouvrir le code *écrit* de la nature, et *croire aux sens* où la *raison* ne suffit plus. Quand-même nous serions entièrement convaincus de la nécessité des lois du mouvement et du rapport dans lequel les forces centrales changent avec la distance, de sorte que le monde ne pourrait exister sans ces lois; nous ne pourrions pas disconvenir, qu'un autre monde serait également possible, dans lequel, avec les mêmes lois, une autre détermination des quantités absolues, une autre échelle aurait été adoptée; dans lequel la même disposition des corps célestes aurait été observée, leur grandeur, distance, etc. étant changées dans un rapport constant; dans lequel la pesanteur serait, comme dans le nôtre, en raison inverse du carré des distances, mais les corps à la surface de la terre parcourraient en une seconde, 30 pieds ou tel autre espace, au lieu de 15 pieds. Mais le grand architecte de l'univers a choisi l'échelle actuelle; nous devons *croire* que c'est le meilleur, lui seul *sait* pourquoi. Cette

intensité, ou cette quantité arbitraire de la pesanteur (parce que nous en ignorons la raison), qui est déterminée ensorte que tous les corps à la surface d'une sphère dont la densité et la grandeur sont égales à celles de la terre, parcourent 3,65622 mètres en une seconde; c'est ce que l'on appelle quantité *absolue* de la force centrale.

Cette force communique à tous les corps, grands ou petits, une accélération de 3,65622 mètres, lorsqu'ils se trouvent à la surface de la terre; à des distances plus grandes, cette accélération est moindre, et le rapport dans lequel elle diminue, est la grande loi de la nature, découverte par Newton. Ce rapport n'est pas arbitraire, mais une loi de la nature, laquelle, quoique nous en ignorions la raison, n'est pas moins nécessaire. L'accélération à une distance donnée dépend à la fois, de la force absolue, et de la distance suivant cette loi: elle est l'effet de la force absolue, modifié par la distance: ainsi la force absolue, quoique constante, produit des effets qui sont différens d'après les circonstances. Supposons qu'un corps, à une distance double, soit accéléré quatre fois moins: alors, comme on appelle force tout ce qui produit du mouvement, il est naturel, d'attribuer cet effet quatre fois moindre, à une force quatre fois plus faible; mais cette comparaison n'a pas lieu relativement à la force absolue, les circonstances externes n'étant plus les mêmes. Cette nouvelle force centrale, ou plutôt, cette force envisagée sous un autre point de vue, est donc proportionnelle à l'accélération ou à la vitesse qu'elle communique aux corps; c'est pour cela qu'on l'appelle quantité *accélératrice* de la force centrale.

L'accélération consiste à mettre une masse en mouvement: le mouvement, ou l'effet qu'elle produit, est d'autant plus grand, que la vitesse et la masse sont plus grandes. La quantité qui est mesurée par cet effet complet, est appelée quantité *motrice* de la force centrale: elle est donc proportionnelle au produit de la vitesse par la masse accélérée. Elle est ce que l'on nomme le poids d'un corps, tant qu'il est en repos, ou la violence du choc qu'il donne en tombant. C'est, pour ainsi dire, la force qui a passé du corps central au mobile: car la pression ou le poids des corps est aussi regardé comme une force inhérente à ces corps, parce qu'il peut produire

un nouveau mouvement, en rencontrant d'autres corps. La force motrice est donc inhérente au mobile, c'est l'effort avec laquel il tend à se rapprocher du corps central, et la mesure de l'action qu'il exerce sur d'autres corps. La force absolue réside dans le corps central, c'est la violence avec laquelle il attire tous les corps. La force accélératrice est répandue dans l'intervalle entre les deux corps, ou plutôt dans tout l'espace sphérique qui environne le corps central: c'est un torrent qui entraine tous les corps qu'il rencontre, le lien qui joint les forces absolue et motrice (1).

§. 11. Dès que l'on suppose, que la force centrale est une propriété commune à tout ce qui est matériel, il en suit, que sa quantité *absolue* est proportionnelle à la masse du corps central, parce qu'elle est la somme des forces de tous ses élémens. Il est évident, que l'accélération de la force centrale doit diminuer à une plus grande distance, et on verra plus bas, qu'elle est réciproque au carré de la distance. Cela posé, soit la masse du corps central $= A$, celle du corps attiré $= M$, la distance de l'un à l'autre $= r$; alors la force *absolue* peut être exprimée par A, la force *accélératrice* par $\frac{A}{rr}$, et la force *motrice* par $\frac{AM}{rr}$: ces expressions serviront à comparer les forces centrales entre elles, où il s'entend, que toutes les quantités seront exprimées par la même unité de leur espèce. Supposons par ex. que le soleil contienne 300000 fois plus de masse que la terre, et que son demi-diamètre soit 113 fois plus grand que celui de la terre, de sorte qu'un corps à sa surface est 113 fois plus éloigné du centre, qu'un corps à la surface de la terre n'est éloigné de son centre. En prenant donc la masse, la force centrale, et le rayon de la terre pour unités des masses, des forces, et des distances; la masse et la force absolue du soleil sera $A = 300000$, et $r = 113$; donc la force accélératrice du soleil, ou la pesanteur à sa surface, $\frac{A}{rr} = \frac{300000}{(113)^2} = 23\frac{1}{2}$ fois plus grande que celle de la terre à sa surface, laquelle est $g = 3,65622$ m. La chûte des corps à la surface du soleil en une seconde, sera donc de 85, 9 m. ou de 367, 1 pieds, et le même corps pèsera, sur le soleil, $23\frac{1}{2}$ fois plus que sur la terre. Maintenant il est aisé, de réduire toutes les forces centrales à des mesures connues.

(1) Voy. *Newtoni Phil. Nat. Princ. Math. Lib. I. Defin.* 6. 7. 8.

En supposant la masse de la terre $= T$, son demi-diamètre $= a$; l'espace h que parcourra en une seconde un corps quelconque, sollicité par la force centrale d'une masse A, à la distance r au centre, sera égal à $\frac{A}{T} \cdot \frac{aa}{rr} \cdot g$, ou bien, A étant donné en parties de la masse de la terre, et r en rayons de la terre, $h = \frac{Ag}{rr}$. Connaissant donc l'espace h parcouru en une seconde, on le trouvera pour un autre tems quelconque, et le calcul donnera toutes les conditions du mouvement, suivant les lois générales. Il n'est pas même nécessaire de connaître A; on peut mettre au lieu de $\frac{A}{T}$ le rapport des forces absolues, ou des accélérations à la même distance: $\frac{A}{T}$ est toujours une quantité constante que les observations détermineront dans chaque cas particulier. Dans la plupart des problèmes d'astronomie on cherche le mouvement d'un ou de plusieurs corps autour d'un commun corps central: alors les différens mouvemens dépendent uniquement du rapport des forces accélératrices à différentes distances; la masse A ayant donc toujours la même valeur, elle disparaît tout-à-fait du calcul. Dans un pareil cas en général, il ne peut être question que des forces accélératrices: les forces absolues ne viennent à être considérées, que lorsqu'il s'agit de comparer les mouvemens autour de différens centres; mais dans ce cas, le rapport des forces absolues ou des masses sera déterminé par les différens mouvemens, donnés par les observations.

L'expression des forces motrices, ou de la quantité du mouvement, $\frac{AM}{rr}$, nous apprend cette vérité importante, que le mouvement est le même, soit qu'on considère l'orbite de M autour de A, ou celle de A autour de M, parce que AM et r ont la même valeur dans l'un et l'autre cas. Mais l'accélération sera exprimée par $\frac{A}{rr}$ dans le premier cas, et par $\frac{M}{rr}$ dans le second: elles sont donc en raison inverse des masses.

CHAPITRE II.

Lois générales du mouvement.

§. 12. L'explication donnée plus haut (§. 3. 4.), d'après laquelle chaque force est envisagée comme étant composée d'une infinité d'impulsions, réitérées suivant la loi de continuité, est très-propre à déduire les lois du mouvement d'une simple application de la loi d'inertie. L'intensité ou l'effet d'un choc ne peut être déterminé, ni par l'espace seul que le corps parcourra, après avoir été frappé, ni par le tems seul pendant lequel il continuera son mouvement, parce que l'un et l'autre croît à infini suivant la loi d'inertie. Mais dès que le tems est connu, dans lequel le mobile parcourt un certain espace, l'intensité du choc est déterminée, en supposant que, pendant ce tems, le mobile n'a éprouvé aucune nouvelle impulsion. Il est donc clair, que les chocs et les forces ne peuvent être mesurés que par la combinaison du tems et de l'espace: c'est ainsi que s'est développée une nouvelle notion, la relation entre le tems et l'espace, ou la *vitesse*. L'espace parcouru dans un certain tems, ou la *vitesse* engendrée, fournit donc la mesure d'une impulsion; et on verra aisément, qu'il est indifférent, si l'on prend le tems grand ou petit, pourvû qu'on soit certain que l'espace parcouru dans ce tems est l'effet de la seule impulsion, qui doit être déterminée. Si le mobile a éprouvé successivement plusieurs chocs, il faut que l'espace qui servira à déterminer le premier choc, n'appartienne pas à un tems, plus grand que l'intervalle entre le premier et le second choc: d'où il suit que le tems qui, par sa comparaison avec l'espace parcouru, servira à déterminer la vitesse engendrée, et par-là l'intensité du choc, doit être d'autant plus petit, que les chocs se succèdent plus rapidement. La même précaution est nécessaire, si le choc qui

doit être déterminé, n'est pas le premier: dans un pareil cas, il faut séparer la vitesse après le dernier choc, de celle que le mobile avait déjà acquise par les chocs précédens; le résidu, ou l'*accroissement* de la vitesse, déterminera seul le dernier choc, au lieu que la vitesse totale que le mobile a après le dernier choc, dépend de la somme de tous les chocs qu'il a éprouvés. Nommant donc p, p', p'', etc. les différentes impulsions que le mobile éprouve, c, c', c'', etc. ses vitesses après la première, la seconde, la troisième impulsion; on aura

$$p = \lambda c, \quad p + p' = \lambda c', \quad p + p' + p'' = \lambda c'', \quad \text{etc.}$$

λ étant un coëfficient constant qui sera déterminé par la mesure dont on se servira. Il en suit $p' = \lambda(c' - c)$, $p'' = \lambda(c'' - c')$, etc. ou en nommant c la vitesse donnée par le premier choc, et Δc, $\Delta' c$, etc. les nouveaux accroissemens,

$$p = \lambda c, \quad p' = \lambda \Delta c, \quad p'' = \lambda \Delta' c, \quad \text{et} \quad p + p' + p'' = \lambda(c + \Delta c + \Delta' c).$$

§. 13. Si tous les chocs ne sont pas seulement d'une force égale, mais succèdent aussi l'un à l'autre à des intervalles égaux, le nombre des chocs, et la somme des vitesses engendrées, seront proportionnels au tems. Nommant τ l'intervalle entre deux chocs successifs, au bout du tems $n\tau$, le nombre des chocs sera $= n$, et leur force combinée, $p + p' + p'' + \ldots =$ $\lambda(c + \Delta c + \Delta' c + \ldots)$, l'une et l'autre de ces deux séries renfermant n termes. Or par hypothèse on a $p = p' = p''$, etc. et $c = \Delta c = \Delta' c$, etc. parce que les vitesses sont proportionnelles aux chocs (§. 12.), donc $p + p' + p'' + \ldots$ $= np$, $c + \Delta c + \Delta' c + \ldots = nc$: d'où il suit que la somme de tous les chocs est $np = \lambda nc$; et la vitesse totale nc est proportionnelle au tems $n\tau$. Nommant donc t le tems entier qui s'est écoulé, pendant que les impulsions ont été données, et v la vitesse finale; on aura $t = n\tau$, donc $n = \frac{t}{\tau}$, et $v =$ $nc = \frac{np}{\lambda} = \frac{tp}{\lambda\tau}$. Dans cette expression λ et τ sont des quantités constantes qui dépendent de la mesure adoptée; p est l'intensité de chaque choc, qui par hypothèse est constante: donc la vitesse v est proportionnelle au tems t, pendant lequel les chocs ont agi.

Si l'on suppose que les chocs succèdent l'un à l'autre avec une rapidité infinie, il en résulte ce qu'on appelle *force*; elle sera *constante*, si toutes les impulsions p sont égales. L'intervalle τ entre deux impulsions sera alors infiniment petit, mais tous les instans τ seront égaux, par hypothèse:

τ et p sont donc des quantités constantes, et la vitesse $v = \frac{p\,t}{\lambda\,\tau}$ proportionnelle au tems t, comme ci-dessus. C'est la proposition découverte par Galilée, sur laquelle se fonde toute la théorie des forces constantes: elle est, comme nous venons de voir, une suite nécessaire de la loi de continuité, ou de la définition des forces, d'après laquelle leur action est non-interrompue. Deux chocs sont égaux, qui communiquent à un mobile la même vitesse, ou qui lui font parcourir des espaces égaux en tems égaux: étant combinés, ils lui donneront une vitesse double, soit qu'ils arrivent en même tems ou successivement; et en général, la somme des vitesses engendrées est proportionnelle au nombre des impulsions égales, simultanées ou successives. Si les impulsions succèdent *immédiatement* l'une à l'autre, leur nombre sera nécessairement proportionnel au tems: d'où il suit, que la *vitesse imprimée par une force constante est proportionnelle au tems.*

Dans la formule $v = \frac{p\,t}{\lambda\,\tau}$, τ est une quantité infiniment petite: en conséquence, t et λ étant des quantités finies, v serait infinie, si p n'était en même tems infiniment petit: cela veut dire, que la vitesse (v), imprimée par un nombre infini de chocs $\left(\frac{t}{\tau}\right)$, serait infinie, si chaque choc (p) n'était infiniment petit; ce qui est d'ailleurs évident. Il suit encore de $c = \frac{p}{\lambda}$, que la vitesse, communiquée par un seul choc ou dans un instant, est infiniment petite. Les quantités τ et t, dont l'une est constante, l'autre variable, dépendent de la mesure arbitraire du tems; et l'intensité des impulsions p détermine la quantité accélératrice de la force, ou lui est proportionnelle. Nommant donc P la force accélératrice, $\frac{p}{\tau}$ est une quantité constante, finie, et proportionnelle à P: supposant donc $\frac{p}{\tau} = \mu P$, μ étant un coëfficient constant, on aura $v = \frac{\mu}{\lambda}\,P\,t$, ou mettant λ au lieu de $\frac{\mu}{\lambda}$, $v = \lambda\,P\,t$; où il faut encore déterminer la constante λ.

§. 14. Si la force P est *variable,* sans changer cependant brusquement, mais par des nuances insensibles, suivant la loi de continuité; on peut supposer que, dans chaque instant, elle est d'une grandeur déterminée qui ne change pas pendant un tems infiniment petit, c'est-à-dire, on peut l'envisager comme une force constante pendant un intervalle infiniment petit: autrement il serait absurde de vouloir comparer entre elles deux forces variables, ou de dire que l'une fût plus grande que l'autre; car cela suppose qu'on lui

attribue, dans un instant donné, une grandeur déterminée qu'elle conserve invariablement pendant un tems, quelque petit qu'il soit, parce qu'aucun effet physique n'est possible sans une durée quelconque. Tout ce qui a été prouvé relativement aux forces constantes (§. 13.), sera donc applicable aux forces variables, si t est un tems infiniment petit. L'équation $v = \lambda P t$ (§. 13.), appliquée à ce cas, nous apprend donc la proposition suivante: la vitesse, communiquée par une force variable dans un tems infiniment petit, est proportionnelle au produit de la quantité accélératrice que la force avait dans cet instant, par le tems infiniment petit; le premier facteur déterminant l'intensité, et le second le nombre des chocs. C'est une suite évidente de la loi de continuité, sur laquelle sont fondées les grandes découvertes de la géométrie moderne. Une courbe quelconqoe a, dans chaque point, une direction déterminée, suivant laquelle elle décrit un arc infiniment petit; un mobile quelconque a également, dans chaque point, une vitesse déterminée, avec laquelle il décrit uniformément une portion infiniment petite de sa route: une force variable quelconque aura donc aussi, dans chaque instant, une grandeur déterminée, avec laquelle elle agit, pendant cet instant, comme une force constante. C'est uniquement par cette manière de se représenter les choses, qu'il nous est possible de comparer les forces variables entre elles ou avec des forces constantes, ou de supposer l'une plus grande que l'autre: car une force variable pouvant successivement devenir plus ou moins grande qu'une force quelconque, elle ne peut être comparée avec d'autres, à moins qu'on ne borne la comparaison à un certain instant, et que l'on suppose qu'elle a, dans cet instant, une valeur déterminée et invariable. Si l'on exprime la vitesse d'un mobile par la direction d'une ligne droite, qui sera altérée par chaque impulsion, ensorte que la nouvelle direction fait avec la précédente un angle plus grand en raison de la violence du choc; les chocs proprement dits formeront une ligne brisée, les forces constantes un cercle, et les forces variables une courbe quelconque, dont la courbure déterminera la loi, suivant laquelle la force change. De même que le géomètre regarde les arcs infiniment petits d'une courbe, comme des arcs circulaires d'un rayon déterminé, qu'on appelle le rayon de courbure; de même on

est nécessité ici, à considérer les forces variables comme constantes pendant un tems infiniment petit.

Dans l'équation précédente, $v = \lambda P t$, t est donc un tems infiniment petit, et v n'est plus la vitesse elle-même, qui est l'effet de tous les états précédens de la force P, mais l'accroissement de la vitesse, acquis dans le tems infiniment petit, pendant lequel la force est considérée comme constante (§. 12.): il faut donc substituer ∂t et ∂v au lieu de t et v, ce qui donnera pour les forces variables P, cette équation,

$$\partial v = \lambda P \partial t.$$

Il est évident que λ a ici la même valeur, que relativement aux forces constantes, parce que λ est entré dans le calcul par la supposition, que les forces variables agissent comme les constantes. Pour s'en convaincre entièrement, on n'a qu'à intégrer la dernière équation, en supposant P constante: alors elle doit donner la même équation que celle que nous avons trouvée pour les forces constantes. Or cet integral donne $v = \lambda P t$, ce qui étant comparé à la dernière équation du §. 13, prouve que λ indique la même quantité dans les deux cas.

§. 15. Tout ce que nous venons de dire des forces variables, est aussi applicable à la vitesse. Un corps, accéléré par des forces quelconques, change de vitesse continuellement. Il faut cependant que, dans chaque instant, il ait une vitesse déterminée, avec laquelle il décrira uniformément une portion infiniment petite de sa route; parce qu'autrement il serait absurde d'attribuer à un mobile une vitesse plus grande qu'à un autre. Le mobile aura donc, après avoir parcouru une portion s de sa route, une certaine vitesse v, avec laquelle il décrira uniformément le petit arc consécutif ∂s, pendant le tems ∂t. Le mouvement étant uniforme pendant ∂t et ∂s, les vitesses v sont en raison directe des espaces parcourus ∂s, et en raison inverse du tems ∂t, ou comme $\frac{\partial s}{\partial t}$. Nommant donc S l'espace, parcouru dans le tems T avec la vitesse C, on aura $C : v :: \frac{S}{T} : \frac{\partial s}{\partial t}$, ou $v = \frac{CT}{S} \cdot \frac{\partial s}{\partial t}$. Soit C la vitesse par laquelle toutes les vitesses seront mesurées, ensorte que $C = 1$; il est naturel de prendre pour unité de vitesse, celle avec laquelle un espace $= 1$ est parcouru dans le tems $= 1$, ou ce qui revient au même, de

prendre en même tems S pour unité de distance, et T pour unité de tems. On a donc $C = 1$, $S = 1$, $T = 1$, d'où il suit

$$v = \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Mais il ne faut pas oublier, que le propre sens de cette équation est la proportion, $v : C :: \frac{\partial s}{S} : \frac{\partial t}{T}$; car ∂s et ∂t sont des quantités hétérogènes. On se rappellera que nous avons toujours supposé, que le tems est partagé en portions égales (§. 13.), ou que ∂t est constant. Cela posé, la différentiation de la dernière équation donnera $\partial v = \frac{\partial \partial s}{\partial t}$, ce qui étant comparé avec l'équation $\partial v = \lambda P \partial t$ (§. 14.), donnera

$$\partial \partial s = \lambda P \partial t^2.$$

§. 16. Pour déterminer la constante λ, on pourrait employer chaque force connue, quand même elle serait variable. Mais dans ce dernier cas, il faudrait en même tems indiquer le tems, pendant lequel la force a opéré, et connaitre la loi, suivant laquelle elle dépend du tems, parce que sans cela sa grandeur ne serait point déterminée. Il est donc naturel, de choisir une force constante, et particulièrement celle que nous connaissons le mieux, parce que nous ressentons continuellement ses effets: c'est la pesanteur à la surface de la terre. Il est vrai, rigoureusement parlant, que cette force varie avec la distance, ainsi que toutes les forces centrales; mais les observations qui servent à déterminer λ, sont faites à la surface même, et la chute des corps, ou les oscillations du pendule, changent la distance au centre de la terre si insensiblement, que la pesanteur peut être regardée ici comme une force constante. Comme on a donc, en général pour toutes les forces, $v = \frac{\partial s}{\partial t}$ (§. 15.) et relativement aux forces constantes, $v = \lambda P t$ (§. 13.), il en résulte $\partial s = \lambda P t \partial t$, dont l'intégral est $s = \frac{\lambda}{2} P t t$; d'où il suit que *les espaces parcourus par les corps graves, et en général en vertu d'une force constante, sont en raison du carré du tems.* La mesure du tems étant arbitraire, λ peut recevoir différentes valeurs. On est convenu de prendre pour unité la plus petite partie du tems, que nos pendules marquent distinctement, c'est la *seconde.* Faisant donc $t = 1$, s sera l'espace parcouru en une seconde, $= g$ (§. 8.), et l'équation $s = \frac{\lambda}{2} P t t$ deviendra $g = \frac{\lambda}{2} P$. Si l'on prend la pesanteur pour mesure des forces, P sera $= 1$, et $\lambda = 2g = 7, 31 \ldots$ mètres. On a donc, relativement à la

pesanteur, $v = 2gt$ (§. 13.), $s = gtt$, donc $v^2 = 4gs$, $s = \frac{v^2}{4g}$. Cette hauteur s, dont un corps doit être tombé, pour acquérir la vitesse v, est appelée la hauteur *due* à la vitesse.

§. 17. Maintenant les équations différentielles, sur lesquelles se fondent toutes les recherches de mécanique, sont réduites à des nombres connus; et il sera bon de les rassembler ici. Prenant la pesanteur pour unité de force, la seconde pour unité de tems, et le mètre pour mesure des distances, la vitesse avec laquelle un mobile parcourt un mètre en une seconde sera l'unité de vitesse, $g = 3,65622$, et en nommant P une force accélératrice quelconque par rapport à la pesanteur, s et v le nombre de mètres qu'elle fait parcourir aux corps en t secondes et en une seconde, au bout du tems t, v sera la vitesse engendrée dans le tems t, et nous aurons les équations suivantes (§. 15.):

1. $v = \frac{\partial s}{\partial t}$; 2. $\partial\partial s = \partial v \partial t$; 3. $\partial v = 2g\mathrm{P}\partial t$; 4. $\partial\partial s = 2g\mathrm{P}\partial t^2$.

La dernière de ces équations est celle, dont on fait le plus fréquent usage dans l'astronomie physique: c'est à l'application et à l'intégration de cette équation, que nous devons les grandes découvertes, faites dans cette science. Je ferai, relativement à cette équation, une observation qu'il ne faut pas oublier.

L'élément $\partial\partial s$, ou l'espace que le mobile décrit dans le second instant ∂t qui succède au tems t, n'est pas l'effet de l'inertie, mais de l'action continuée de la force P; ce qui est évident par l'équation 4. où $\partial\partial s = 0$, si $\mathrm{P} = 0$. En effet, si le mobile n'est sollicité par aucune force, son mouvement, dû à l'inertie seule, sera uniforme: nommant donc ∂s, $\partial s'$, $\partial s''$, etc. les espaces parcourus dans le premier, second, troisième, instant ∂t, on aura $\partial s = \partial s' = \partial s''$, donc $\partial s' - \partial s = \partial\partial s = 0$. Supposons maintenant qu'une force agisse sur le mobile suivant la direction de son mouvement; alors il est clair que $\partial s' > \partial s$, $\partial s'' > \partial s'$, etc. et ces accroissemens des premières différentielles, ou les secondes différentielles $\partial s' - \partial s = \partial\partial s$ sont égales à $2g\mathrm{P}\partial t^2$. Mais quoique $\partial\partial s$ soit l'effet de l'action seule de la force P, il n'en suit pas, quo la force P ait poussé immédiatement le mobile par l'espace entier $\partial\partial s$, ou que $\partial\partial s$ soit l'espace que la force P eût fait parcourir à un corps en repos, dans le premier instant ∂t: cela n'est

vrai que dans le cas, où ∂t est le premier instant, ou $t = 0$. Supposons que le mobile ait acquis, en vertu de son mouvement pendant le tems t, la vitesse v: il parcourrait dans le premier instant suivant ∂t, l'espace $v\partial t$, en vertu de l'inertie seule; étant donc sollicité par la force P, il parcourra un espace ∂s plus grand que $v\partial t$; supposons $\partial s = v\partial t + \partial\omega$, $\partial\omega$ étant l'espace parcouru en vertu de la force P. Mais ce n'est pas le seul effet de la force P: elle a encore augmenté la vitesse v, durant l'instant ∂t, ensorte qu'au bout du tems $t + \partial t$, le mobile aura la vitesse $v + \xi$, avec laquelle il décrirait dans le second instant ∂t, en vertu de l'inertie seule, un espace $\partial s'$ plus grand que $\partial s = v\partial t + \partial\omega$; savoir $\partial s' = \partial s + \xi\partial t$. Outre cela, la force lui fera parcourir, dans l'instant $\partial t'$, le même espace $\partial\omega$, que dans l'instant ∂t: on aura donc $\partial s' = \partial s + \partial\omega + \xi\partial t$, et $\partial s' - \partial s$ ou $\partial\partial s = \partial\omega + \xi\partial t$; d'où il suit, que $\partial\partial s$ est plus grand que l'espace $\partial\omega$ que la force eût fait parcourir au corps dans le tems ∂t, s'il eût été en repos; et il est aisé de voir que $\partial\partial s = 2\partial\omega$. Prenons pour unité de tems une portion infiniment petite τ, au lieu d'une seconde, et nommons g la chute des corps à la surface de la terre, pendant le premier moment τ, ensorte que g est l'espace que la pesanteur seule fait parcourir. Toute autre force P pouvant être considérée comme constante pendant le moment τ, le même espace, relativement à cette force, que nous avons appelé $\partial\omega$, sera $= gP$, et durant le tems ∂t on aura $\partial\omega = gP\partial t^2$, parce que les espaces sont comme les carrés du tems, la force étant constante (§. 16.). On peut s'en convaincre aussi par le raisonnement suivant. Soit $\partial t = n\tau$: alors le mobile, pendant le tems ∂t, éprouvera n fois plus d'impulsions, et la durée de son mouvement sera n fois plus longue: l'espace sera donc n fois plus grand en vertu de la force, et n fois en vertu de l'inertie; par conséquent l'espace sera n^2 fois plus grand que dans le tems τ, donc $\partial\omega = gP\partial t^2$. Or, $\partial\partial s$ étant $= 2gP\partial t^2$ en vertu de l'équation 4, on a $\partial\partial s = 2\partial\omega$; ce qui veut dire, qu'un mobile, étant sollicité par des forces, parcourra dans chaque instant un espace, plus grand que celui parcouru dans l'instant précédent de même durée, du double de l'espace que les forces auraient fait parcourir au mobile, dans le même instant, s'il avait été en repos au commencement de l'action des forces.

CHAPITRE III.

Les forces centrales.

§. 18. L'essentiel des forces centrales consiste en ce qu'elles sont constamment dirigées vers le même point, et qu'elles agissent avec la même force sur chaque molécule, en sorte que la pression, ou la quantité du mouvement qu'elles communiquent à un corps, est proportionnelle à la masse: d'où il suit, qu'elles impriment la même vitesse à tous les corps qui ne sont différens que relativement à la masse. Si donc plusieurs mobiles se meuvent autour du même corps central, la recherche de leurs orbites ou des lois de leur mouvement, est indépendante de leurs masses, et celle du corps central n'entrera dans le calcul, que lorsqu'il s'agit de comparer ces orbites avec celles qui sont décrites autour d'un autre corps central, suivant des lois semblables. Tout dépend de la force accélératrice, ou plutôt du rapport dans lequel elle varie, c'est à-dire, de la loi, suivant laquelle la force dépend de la distance. Il est aisé de voir que, les orbites dépendant de cette loi, elles ne pourront être déterminées, si cette loi n'est pas connue. Néanmoins le mouvement d'un corps, sollicité par des forces centrales, a des propriétés générales, qui sont fondées sur cela seul, que les forces sont constamment dirigées vers le même point, et qui, par conséquent, auront lieu, quelle que soit la loi d'accélération: ces propriétés générales, sur lesquelles se fondent les recherches suivantes, sont le sujet de ce Chapitre.

Comme la recherche métaphysique sur la nature des forces n'a aucun intérêt pour l'astronomie, la question n'est pas ici, si de pareilles forces, dirigées vers un centre, existent réellement ou non. Il ne s'agit que de découvrir la loi générale des mouvemens célestes; et ce but sera atteint, lorsqu'on

peut indiquer une force qui, suivant les principes de la mécanique, produirait les mouvemens que les observations indiquent, soit que la force réelle soit telle que nous l'imaginons, ou non. Dès qu'on aura trouvé que les orbites sont telles, que l'on peut déterminer au dedans de ces orbites, un point fixe qui férait décrire aux corps les mêmes orbites autour de lui, s'il était doué d'une force centrale; on sera autorisé, de regarder cette force centrale comme la véritable cause du mouvement, et ce point comme le centre des forces. De plus, comme l'astronomie ne considère que les mouvemens *relatifs* des corps, la force centrale ne subsistera pas moins, si le centre des forces est aussi en mouvement, pourvu que l'orbite entière participe à ce mouvement: car alors le lieu des corps, relativement à ce centre, sera changé précisément, comme si la force centrale était dirigée vers un point fixe. Cette remarque sera d'un grand usage dans la suite.

§. 19. Lorsqu'un point matériel M (*Fig.* 1.) décrit la courbe $AMmB$, étant sollicité par des forces qui sont constamment dirigées vers le point C, la nature de la courbe AM sera déterminée par les méthodes usitées dans la géométrie. Si l'on mène par C une droite arbitraire AB, de laquelle les angles $ACM = \phi$ seront comptés, et que l'on nomme la distance variable $CM = r$; l'orbite AM sera déterminée par une équation entre ϕ et r, et le mouvement du point M sera donné par l'application des équations fondamentales (§. 17.) aux différentielles de ϕ et de r. Ayant abaissé sur AB la perpendiculaire MN, la force centrale, dirigée suivant MC, peut être décomposée en deux autres suivant MN et NC; et ces trois forces seront dans le rapport des lignes MC, MN, NC, conformément aux principes de la *statique*. Les lois générales du mouvement doivent être appliquées à chacune de ces forces. En nommant donc P, M, N, les forces accélératrices suivant MC, MN, NC, on aura

$$P : M : N :: MC : MN : NC :: 1 : \sin\phi : \cos\phi.$$

Soit $CN = x$, $NM = y$, et l'arc infiniment petit $Mm = \partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$: le point M ayant donc décrit l'arc ∂s en vertu de la force P, il peut être envisagé, comme ayant parcouru les espaces $-\partial x$ et ∂y, en vertu des forces N et M. Mais ces deux forces étant dirigées de manière à diminuer les lignes x, y, il faut les regarder comme négatives relativement à x, y. L'application de l'équation 4. (§. 17.) donnera donc ces deux équations,

$\partial\partial x = -2gN\partial t^2$, $\partial\partial y = -2gM\partial t^2$, d'où l'on tire $\frac{x\partial\partial y - y\partial\partial x}{2g\partial t^2} = Ny - Mx$, ou $\frac{\partial.(x\partial y - y\partial x)}{2g\partial t^2} = Ny - Mx$; et $x\partial\partial x + y\partial\partial y = -2g(Nx + My)\partial t^2$. En substituant $M = P\sin\Phi$, $N = P\cos\Phi$, on aura $\frac{\partial(x\partial y - y\partial x)}{2g\partial t^2} = P(y\cos\Phi - x\sin\Phi)$, et $x\partial\partial x + y\partial\partial y = -2gP(x\cos\Phi + y\sin\Phi)\partial t^2$. Mais on a aussi $x = r\cos\Phi$, $y = r\sin\Phi$, d'où il viendra

$$\text{I.} \quad \partial(x\partial y - y\partial x) = 0, \quad \text{II.} \quad \partial\partial x\cos\Phi + \partial\partial y\sin\Phi = -2gP\partial t^2.$$

Les différentiations successives de x, y, donneront

$$\partial x = \partial r\cos\Phi - r\partial\Phi\sin\Phi, \quad \partial y = \partial r\sin\Phi + r\partial\Phi\cos\Phi,$$

$$\partial\partial x = \partial\partial r\cos\Phi - 2\partial r\partial\Phi\sin\Phi - r\partial\partial\Phi\sin\Phi - r\partial\Phi^2\cos\Phi,$$

$$\partial\partial y = \partial\partial r\sin\Phi + 2\partial r\partial\Phi\cos\Phi + r\partial\partial\Phi\cos\Phi - r\partial\Phi^2\sin\Phi.$$

En substituant ces valeurs, ainsi que $x\sin\Phi - y\cos\Phi = 0$, et $x\cos\Phi + y\sin\Phi = r$, les équations précédentes prendront la forme,

$$\text{III.} \quad \partial(r^2\partial\Phi) = 0; \quad \text{IV.} \quad \partial\partial r - r\partial\Phi^2 = -2gP\partial t^2;$$

qui sont les deux équations fondamentales pour toutes les forces centrales.

Pour intégrer ces équations, il faut se rappeler que, dans toutes ces formules, l'élément ∂t est supposé constant, ou que le tems a été partagé en portions égales (§. 13.); d'où il suit que la constante, qu'il faut ajouter à la différentielle trouvée par la première intégration, sera multipliée par ∂t. Cela posé, l'équation III. donnera

$$\text{V.} \quad r^2\partial\Phi = A\partial t,$$

A étant la constante arbitraire, introduite par l'intégration. Substituant cette valeur $\partial\Phi = \frac{A\partial t}{r^2}$ dans l'équation IV, après l'avoir multipliée par $2\partial r$, elle deviendra, $2\partial r\partial\partial r - \frac{2A^2\partial r\partial t^2}{r^3} + 4gP\partial r\partial t^2 = 0$, d'où l'on tirera en intégrant,

$$\text{VI.} \quad \partial r^2 + \frac{A^2\partial t^2}{r^2} + 4g\partial t^2\int P\partial r + B\partial t^2 = 0,$$

B étant une constante ajoutée à l'intégrale. Le développement de l'intégral $\int P\partial r$, P étant variable, suppose que P est donné en fonction de r, ou que l'on connaît la loi, suivant laquelle la force accélératrice dépend de la distance: la recherche générale, dont nous nous occupons actuellement, ne peut donc être portée plus loin. Il est clair, que l'équation V. qui est indépendante de P, renferme les propriétés, communes à toutes les forces centrales *en général*, et que l'équation VI. contient celles qui dépendent de la *loi* d'accélération d'une certaine force *en particulier*. La première équation nous apprend plusieurs vérités importantes que nous allons chercher.

§. 20. Soit $m\mu$ un petit arc de cercle, décrit du centre C et du rayon $Cm = r$: $m\mu$ sera $= r\partial\Phi$, et l'élément du secteur $ACM = S$ sera le triangle $MCm = \frac{1}{2} r^2 \partial\Phi = \partial S$; d'où l'on tirera, à l'aide de l'équation V, $2\partial S = A\partial t$, et en intégrant, $S = \frac{A}{2} t$: d'où il suit que les *aires des secteurs décrits autour de* C (S) *sont proportionnelles au tems* (t), ou qu'elles croissent uniformément. C'est une des lois que Kepler avait trouvées par les observations (II. §. 118.): elle a la première donné lieu à la découverte d'une force centrale répandue dans l'univers.

Newton qui découvrit cette vérité, en donna la démonstration suivante ([1]). Si le mobile a parcouru, dans un instant ∂t, la ligne AB (*Fig.* 2.), la loi d'inertie lui ferait décrire, dans l'instant suivant ∂t, la ligne $Bc = AB$ sur la prolongation de AB; mais la force centrale suivant BS lui fera parcourir, dans le même tems, une ligne $B\gamma$. Faisant donc cC parallèle et égale à $B\gamma$, le mobile parviendra, par son mouvement composé, au bout du tems ∂t en C; de sorte que les secteurs, décrits dans les tems égaux ∂t, seront ASB et BSC. Les aires des triangles ASB, BSc, ayant la même base $AB = Bc$, et le même sommet S, sont égales, ainsi que celles des triangles BSc, BSC, parce qu'ils ont une base commune BS, et quo leurs sommets sont situés dans la ligne cC, parallèle à la base. Il s'en suit, que les triangles ASB, BSC, sont aussi égaux: donc les élémens des surfaces des secteurs sont égaux en tems égaux, donc leurs intégrales sont aussi proportionnelles au tems. Il est vrai que, rigoureusement parlant, Bc n'est pas égal à AB, leur différence étant ce que nous avons appelé (§. 17.) $\partial\partial s - \partial\omega = \partial\omega$ Mais comme c'est une différentielle du second ordre, elle s'évanouit par rapport aux différentielles du premier ordre AB, Bc, conformément aux premiers principes du calcul différentiel.

§. 21. On peut déduire de l'équation V. encore une autre vérité importante. Soit (*Fig.* 1.) CT perpendiculaire à la tangente de la courbe MP: les triangles CMT, $mM\mu$, ayant le même angle en M, et des angles droits en T et en μ, seront semblables. Faisant donc pour abréger, $CT = u$, on aura $r : u :: Mm : m\mu :: \partial s : r\partial\Phi$, ou $\partial s = \frac{r^2 \partial\Phi}{u}$. Substituant donc $\partial s = v\partial t$ (§. 17 n. 1,) et $r^2\partial\Phi = A\partial t$ (§. 19. V.), il viendra $v = \frac{A}{u}$, ce qui veut dire, que dans toutes les courbes, décrites en vertu d'une force centrale

(1) *Princ. Phil. Nat. Math. Lib. I.* §. 53.

quelconque, *les vitesses* (v) *sont en raison inverse des perpendiculaires* (u), *menées du centre des forces à la tangente* (Voy. I. §. 257.). Il en suit encore, que *les vitesses angulaires* w *sont en raison inverse du carré des distances* r. En effet, on a $v = \frac{\partial s}{\partial t}$, $w = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, donc $v : w :: \partial s : \partial \Phi :: r^2 : u$, ou $w = \frac{v u}{r^2} = \frac{A}{r^2}$.

§. 22. Ces deux propriétés ne sont pas seulement communes à toutes les forces centrales, mais ces forces sont les seules, qui puissent produire un mouvement dans lequel ces propriétés ont lieu. En effet, si l'aire S est proportionnelle au tems t, ou $S = \frac{1}{2} A t$, on aura $\partial S = \frac{1}{2} A \partial t$, et $\partial \partial S = o$, ou $\partial (r^2 \partial \Phi) = o$. On trouve le même résultat par la supposition, que la perpendiculaire à la tangente est en raison inverse de la vitesse, ou $u = \frac{A}{v}$: car u étant $= \frac{r^2 \partial \Phi}{\partial s}$ (§. 21.) et $v = \frac{\partial s}{\partial t}$, on en tirera $r^2 \partial \Phi = A \partial t$, d'où il suit également, $\partial (r^2 \partial \Phi) = o$. Or, $r^2 \partial \Phi = x \partial y - y \partial x$ (§. 19.), donc $o = \partial (x \partial y - y \partial x)$, ou $x \partial \partial y - y \partial \partial x = o$. Soient M', N', les forces accélératrices suivant MN et NC, ou suivant $-y$ et $-x$; cela posé l'équation 4. (§. 17.) donnera $\partial \partial y = -2 g M' \partial t^2$, et $\partial \partial x = -2 g N' \partial t^2$. Ayant substitué ces valeurs dans l'équation $x \partial \partial y - y \partial \partial x = o$, on trouvera, en divisant par $2 g \partial t^2$, $o = N' y - M' x$, donc $N' : M' :: x : y :: NC : MN$. La résultante de ces deux forces est donc constamment dirigée vers C, ou une force centrale, résidant en C. Il suit donc de la seconde loi de Kepler, que les planètes sont sollicitées par une force centrale du soleil; et toute l'astronomie physique est fondée sur ce théorème, que Newton démontra de la manière suivante [1].

Si le mobile décrit dans le second moment BC (*Fig.* 2.), au lieu de $Bc = AB$, cela doit être l'effet d'une force qui le conduit par cC, pendant qu'en vertu de la loi d'inertie il parcourt Bc, ensorte que la composition des forces lui fait parcourir la diagonale BC: la force est donc dirigée suivant cC. Or, les triangles ASB, BSC, étant égaux par hypothèse, les triangles BSC, BSc, seront aussi égaux, parce que ASB, BSc, ayant la même base $AB = Bc$, sont égaux. Il suit de l'égalité des triangles BSC, BSc, qu'ayant la même base SB, leurs sommets C, c, sont situés dans une ligne parallèle à la base: la direction de la force cC est donc parallèle à BS, ou elle passe constamment par S.

(1) *loc. cit.* §. 62.

LIVRE II.

DES LOIS DE KEPLER.

CHAPITRE I.

Loi de la force centrale du Soleil.

§. 23. La découverte de la force centrale du soleil, qui retient les planètes dans leurs orbites, est une suite si évidente des lois de Kepler, qu'on sera peut-être étonné de voir, que Kepler lui-même ne s'en est pas aperçu, et qu'il s'est écoulé un siècle, avant que Newton fît cette application des lois de Kepler, qui jusqu'à cette époque ressemblaient à une pierre précieuse, dont on ne connaissait pas toute la beauté. On sera moins étonné, quand on verra que, pour déduire du mouvement elliptique des planètes la loi de l'attraction du soleil, ou seulement pour prouver l'existence d'une force centrale par l'accroissement uniforme des secteurs, l'analyse doit avoir fait des progrès dont elle était bien loin à l'époque de Kepler. La géométrie n'avait pas encore la perfection, dont elle a besoin pour conduire l'astronome à ces grandes découvertes; et si la réforme de la géométrie et de l'astronomie n'avait pu être l'ouvrage d'un seul homme, il est possible que plusieurs siècles seraient écoulés, avant que le hasard eût dirigé les différens travaux vers le même bût. Heureusement le dix-septième siècle produisit un homme qui avait assés de force, pour se charger de cette double

opération; qui réunissait un génie ardent à la tranquillité de l'intelligence et du caractère, indispensablement nécessaire pour découvrir des vérités géométriques; qui enfin, av c une patience infatigable, tailla lui-même les verres, à l'aide desquels ses yeux découvrirent les secrets du ciel. Mais il n'était pas moins heureux, que Newton vivait dans un tems, où plusieurs hommes, dignes d'être ses prédécesseurs, avaient commencé à réformer la géométrie, dans un tems où les plus grands astronomes avaient porté l'art d'observer à un haut degré de perfection; ensorte que Newton trouva assés de données, sur lesquelles il pouvait fonder ses importantes découvertes.

Suivant la loi d'inertie, chaque corps, abandonné à lui-même, ne peut décrire qu'une ligne droite, quelles que soient les forces qui ont antérieurement agi sur lui: par conséquent, s'il décrit une courbe, il est certain qu'il est sollicité par des forces, dirigées vers le côté concave de cette courbe. Voilà une vérité trop évidente, pour pouvoir échapper à Kepler. Or puisque toutes les orbites planétaires, malgré leurs différentes positions, renferment le soleil comme leur centre, il était très-vraisemblable, que ces forces étaient constamment dirigées vers le soleil, et que cet astre était la source, ou du moins le point de réunion, le foyer des forces. La découverte de Kepler, d'après laquelle toutes les orbites sont des ellipses dont un des foyers est effectivement occupé par le soleil, vint à l'appui de cette probabilité; et puisque, conformément aux connaissances bornées de ce tems, on attribuait au cercle une perfection supérieure aux autres courbes, ce qui faisait regarder le mouvement circulaire comme aussi naturel que le mouvement rectiligne, cette découverte devait faire naitre la première idée, qu'une force particulière du soleil était nécessaire pour produire le mouvement elliptique. La planète a, dans chaque point de son orbite, une certaine direction qu'elle suivrait nécessairement, si elle n'était retenue par une cause quelconque. Quelle est donc cette cause qui l'empêche de s'écarter du soleil, et qui retient éternellement chaque planète dans la même distance au soleil? Que peut-elle-être, si ce n'est la force attractive du soleil?

Voilà le résultat que le pur raisonnement pouvait donner dans ce tems; et c'est ainsi que Kepler paraît avoir raisonné. On trouve dans son

ouvrage *De motibus stellae Martis* plusieurs passages, où il s'exprime avec beaucoup de clarté sur cet objet. Dans le *Chap.* 33. il prouve par l'excentricité des orbites, et par la vitesse plus ou moins grande des planètes, à mesure qu'elles approchent du soleil, »*virtutem, quoe planetas movet, residere* »*in corpore Solis*". Le même chapitre contient plusieurs passages semblables: »*fons virtutis motricis in Solem competit. — Si terra movetur, a Sole et ipsa* »*movebitur, et id celerius vel tardius, prout ei propior aut ab eo remotior fuerit:* »*manente in corpore Solis virtute perpetuo constante. — Malo unam lunam mo-* »*vendam permittere virtuti in terra sedenti.*" —— Plus loin, en mettant en parallèle cette force et la lumière, Kepler observe que, malgré son immatérialité, les effets qu'elle produit, peuvent être traités géométriquement, ainsi que ceux de la lumière. Il est vrai que le *Chapitre* 34. intitulé »*Corpus* »*Solis esse magneticum*", prouve que Kepler n'avait pas des idées bien claires des forces centrales, en les confondant avec l'inertie ou la première projection. C'est par cette raison qu'il tâche de démontrer, que la force du soleil, au lieu d'être dirigée vers cet astre, doit avoir un mouvement circulaire, ainsi que les planètes, et que par conséquent le soleil doit tourner sur son axe. »*Specie ergo moto in gyrum, ut eo motu motum planetis inferat,* »*corpus Solis, seu fontem, una moveri necesse est; non quidem de spatio in spa-* »*tium mundi, sed super suo centro seu axe immobilibus.*" La comparaison avec l'aimant lui donne le résultat, que la force du soleil est proportionnelle à sa masse (*cum ejus mole crescit*); mais qu'elle n'est pas une attraction, comme celle de l'aimant, parce qu'alors les planètes se précipiteraient dans le soleil, et qu'elle agit plutôt suivant des cercles concentriques. »*In Sole* »*non esse ullam vim planetarum attractoriam, ut in magnete (occederent enim ad* »*Solem, donec cum ipso conjungerentur penitus), sed fibras habere circulares in* »*eam plagam circumporrectas, quoe monstratur a circulo Zodiaco.*"

Le passage suivant de Plutarque est très-remarquable sous deux rapports. Il ressemble à un météore qui, sans laisser aucune trace visible, disparait au moment même de son origine: on est étonné de voir, que quelques uns des anciens philosophes avaient les idées les plus justes du mouvement de la lune autour de la terre, en l'expliquant par une vitesse de

projection, communiquée à la lune au commencement de son existence, et à une force centripète, dirigée vers la terre, la même que nous appelons *pesanteur* à la surface de la terre; sans qu'aucun système de l'ancienne philosophie ait profité de cette vérité importante. On n'est pas moins étonné de voir, que Kepler qui connaissait très-bien les auteurs classiques, ne s'est pas aperçu de ce passage qui pouvait lui apprendre, que le mouvement curviligne peut naître d'une *vis attractoria*, sans qu'on ait besoin de supposer *fibras circulares in Sole vel tellure*. Voyés dans la note, ce que dit Plutarque [1].

Il est intéressant de voir, combien Kepler était près de trouver la véritable loi de l'attraction, dont la découverte fut réservée à Newton, et par quels paralogismes il s'en écarta. Il convient (*Chap. 36.*) d'avoir été longtems troublé par l'objection, que la comparaison de la force du soleil avec la lumière parait prouver, qu'elle doit être proportionnelle au *carré* de la distance, tandis qu'il est certain, dit-il, qu'ainsi que les vitesses des planètes, elle ne peut être que dans le simple rapport des distances. Pour obvier à cette objection, il se donne beaucoup de peine à démontrer, qu'au fond l'action de la lumière est aussi en raison inverse des distances, et non de leurs carrés. Ces sophismes, par lesquels Kepler se priva du plaisir de faire cette découverte, dont il était si près, et qu'il avait même énoncée sans le savoir, étaient bien pardonnables dans un tems, où l'on n'avait pas encore appliqué la géométrie aux lois du mouvement; et sans être injuste envers Newton, il est permis de douter qu'il eût fait toutes ces grandes découvertes qui lui ont mérité l'admiration et la reconnaissance du genre humain, si Kepler ne lui eût livré tous les matériaux, et si l'art d'employer ces matériaux n'eût été porté à un haut degré de perfection par Galilée, Huyghens,

---

(1) *De facie in orbe lunae*, IV. dans les *Oeuvres mêlées de Plutarque, par Amyot*, 1613. *T. II. p.* 809. 810. „Il y a le mouvement de la lune, qui engarde qu'elle ne tombe, et la violence „de sa révolution, ne plus ne moins que les pierres, et tout ce qu'on met dans une fronde, „sont empêchés de tomber, parce qu'on les tourne violentement en rond. Car chaque corps „se meut selon son mouvement naturel, s'il n'y a autre cause qui l'en détourne. C'est pour„quoi la lune ne se meut point selon le mouvement de sa *pesanteur*, étant empêchée par la „violence de la révolution circulaire. — La terre demeure ferme sans aucun pied qui la sou„tienne; étant en son lieu naturel qui est celui du milieu: car c'est celui auquel toutes cho„ses graves et pesantes tendent, inclinent, contrepoussent, et aspirent naturellement de „tous côtés."

etc. La justice que nous devons à ces deux grands hommes, nous fait un devoir de les révérer avec reconnaissance, sans vouloir décider, lequel des deux a rendu les plus grands services à l'astronomie.

§. 24. Il ne sera pas superflu, de montrer avec plus de détail, combien Kepler était près de la découverte de la loi d'attraction, et de quelle petite circonstance ou inadvertance de Kepler il a dépendu, que ce n'est pas lui mais Newton, qui a fait cette grande découverte. Nous avons vu que Kepler eut l'idée très-juste, que les forces sont proportionnelles aux vitesses, ou aux espaces parcourus dans le même tems, d'où il conclut qu'elles étaient en raison inverse des distances, parce que c'est le rapport des vitesses, ou des arcs décrits dans les apsides. Il se trompa donc, en confondant la vitesse sur l'orbite avec la chute vers le soleil, ou la force suivant la tangente avec la force centripète: erreur fort naturelle, parce que dans l'état imparfait de la dynamique de son tems, l'idée ne pouvait pas lui venir de composer le mouvement planétaire de ces deux forces; il chercha donc à expliquer ce mouvement par une seule force qui, par conséquent, ne pouvait pas être dirigée vers le soleil, mais suivant la circonférence de l'ellipse, ou comme il s'exprime, *fibras habere circulares*. Si Kepler eût connu le parallélogramme des forces ou des mouvemens, il eût sans doute découvert la force centrale du soleil.

L'espace, parcouru dans un instant en vertu de la force centrale, n'est pas l'arc de l'orbite, mais son sinus verse qui, étant très-petit, est proportionnel au carré de l'arc. Or, Kepler lui-même ayant trouvé que, dans les apsides, les arcs sont en raison inverse des distances, il s'en suivait, que la force centrale du soleil est dans le même rapport. Soit (*Fig.* 39. *Tom. II.*) AB la ligne des apsides, le soleil en S, l'aphélie en A, le périhélie en B, et nommons les distances $SA = a$, $SB = b$, les angles décrits dans le même instant, $AS\alpha = \alpha$, $BS\beta = \beta$, les forces qui agissent sur la planète en A et B, P et Q. Kepler, ayant trouvé par observation, $A\alpha : B\beta :: b : a$, en conclut, $P : Q :: b : a$. Mais si l'on désigne par P, Q, les forces centripètes, leurs effets immédiats qui donnent la mesure de leur grandeur, ne sont pas les arcs $A\alpha$, $B\beta$, mais les chutes vers le soleil, ou les abscisses des points α, β, prises de A et B, que nous nommerons x, x'. Or en nommant les ordonnées y, y', on a dans l'ellipse,

$y^2 = \lambda x(AB - x)$, $y'^2 = \lambda x'(AB - x')$, λ étant le rapport du carré du petit axe à celui du grand axe. Il s'en suit $x : x'$ ou $P : Q :: \frac{y^2}{AB - x} : \frac{y'^2}{AB - x'}$, et en faisant $y = A\alpha$, $y' = B\beta$, parce que les arcs $A\alpha$, $B\beta$, sont supposés infiniment petits, on aura $P : Q :: A\alpha^2 : B\beta^2$. Or Kepler ayant trouvé par observation, $A\alpha : B\beta :: b : a$, il en suivait $P : Q :: b^2 : a^2$, ou l'attraction du soleil en raison inverse des carrés des distances. On peut tirer la même conclusion des deux premières lois de Kepler. En effet, nous venons de voir qu'on a dans l'ellipse $P : Q :: y^2 : y'^2$. Or les aires des secteurs sont $A\alpha S = \frac{a}{2} y$, $B\beta S = \frac{b}{2} y'$: donc, les tems étant supposés égaux, la seconde loi de Kepler donne $a . y = b . y'$, ou $y : y' :: b : a$ et $y^2 : y'^2 :: b^2 : a^2 :: P : Q$.

On aura remarqué que, dans toute cette recherche, le point S que le soleil occupe dans la ligne AB, est indéterminé et tout-à-fait indifférent; cependant la loi de la force centrale que nous venons de trouver, n'a lieu que dans le cas où le soleil se trouve dans un des foyers de l'ellipse. Il en résulte, que cette démonstration extrêmement simple est limitée aux apsides, ou plutôt il faut en conclure, que le soleil occupe effectivement un des foyers, parce qu'autrement il faudrait supposer qu'une autre loi eût lieu hors des apsides, que dans ces deux points. Au reste, cette recherche n'est qu'une digression qui nous a déjà occupé trop longtems.

§. 25. Il parait que, depuis Kepler jusqu'à Newton, les géomètres, principalement Huyghens et Hooke, étaient persuadés, que les planètes étaient sollicitées par des forces qui sont la cause de leur mouvement curviligne, et qui leur font décrire constamment les mêmes courbes. L'existence de ces forces résulte immédiatement de la loi d'inertie (§. 2.). Il s'agissait donc d'examiner, quelle devait être la nature, la direction, et la loi de ces forces, pour que les orbites, décrites par les planètes en vertu d'elles, fussent les mêmes que celles qui étaient données par les observations et les découvertes de Kepler. Cette question ne pouvait donc être décidée que par l'application de la géométrie aux lois de Kepler, qui se réduisent aux suivantes (II. §. 124. 125. 126.).

1. Les planètes décrivent des *ellipses* autour du *soleil* qui occupe l'un des *foyers*.

2. Les *aires des secteurs* elliptiques sont *proportionnelles aux tems*, dans lesquels ils sont décrits.
3. Les *carrés des révolutions périodiques* de différentes planètes sont proportionnels aux *cubes des grands axes* de leurs ellipses.

La première de ces lois détermine la courbe, la seconde donne la loi suivant laquelle la planète parcourt cette courbe, et la troisième sert à comparer entre elles les orbites, décrites par différens corps autour du même corps central, et à former un ensemble de ces diverses parties.

Pour fonder l'astronomie physique sur ces lois, Newton procéda d'après le plan suivant. Après avoir prouvé par la seconde loi, que les planètes sont sollicitées par une force centrale, dirigée vers le soleil, il se servit de la *première*, pour déterminer la loi d'accélération de cette force à différentes distances du soleil; d'où il dériva la *troisième*, comme une suite nécessaire. Nous suivrons la même marche.

§. 26. Il a déjà été prouvé (§. 22.), que le mouvement des planètes est accéléré par des forces centrales, dirigées vers le soleil; et l'on a vu que c'est une suite nécessaire de la *seconde* loi de Kepler. Si le mouvement d'un corps est tel, que les aires décrites par les rayons vecteurs, ou les triangles compris par un arc de l'orbite et par deux droites, menées des deux extrémités de cet arc à un point fixe C, sont constamment proportionnels au tems que le corps a mis à décrire cet arc; il résulte des premiers principes de la dynamique, que le corps est sollicité par une force centrale, dirigée vers le point C, quelle que soit la courbe que le corps décrit (§. 22.). Or Kepler ayant découvert, que c'est le cas des mouvemens planétaires, il est certain, que les planètes sont constamment attirées ou poussées vers le soleil. Que cette force centrale soit regardée comme une *attraction* ou comme une *impulsion*, cela est tout-à-fait indifférent pour le géomètre et pour l'astronome, qui par conséquent n'est pas obligé de répondre à l'objection, que l'attraction, étant une *actio in distans*, parait être absurde. L'existence et la direction de cette force est démontrée, et la dernière ne peut être mieux exprimée que par le terme *attraction*, ainsi que nous regardons la pesanteur comme une attraction de la terre, ou la force qui pousse le fer vers l'aimant,

comme une attraction, sans vouloir expliquer par ce terme la nature de la force. Les disputes qui ont eu lieu sur ce grand objet, et qui ne sont que des logomachies, sont d'autant moins pardonnables, que Newton s'était déjà prononcé avec une grande précision à cet égard [1]. Il est certain que le soleil agit sur toutes les planètes. Nous ne connaissons pas la nature de cette force, mais nous savons que les planètes lui obéissent dans chaque distance, dans chaque partie de leurs orbites, dans chaque région du ciel; qu'elle pénètre tout l'espace que nous appelons le système solaire, et que rien ne limite son activité. Une distance immense peut rendre insensible son influence; mais tous les corps qui, ainsi que les comètes, entrent dans sa sphère d'activité que les planètes nous font connaître, doivent obéir à ses lois. C'est par cette raison, que chaque corps céleste, soit planète, soit comète, qui approche du soleil autant que la plus éloignée des planètes, peut servir à vérifier les lois de Kepler, et les forces centrales qui sont fondées là-dessus. C'est par ces raisonnemens, que Newton découvrit la théorie des comètes et des perturbations de la lune.

§. 27. Les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe un des foyers, et nous avons prouvé que leur mouvement est animé par des forces qui peuvent être réduites à une seule force, constamment dirigée vers le soleil. Pour en conclure la loi, suivant laquelle cette force dépend de la distance, nous mettrons pour base l'équation de l'ellipse, le foyer étant l'origine des abscisses prises sur le grand axe. En nommant $2a$, $2b$, le grand et le petit axe, e le paramètre, $2c$ la distance entre les foyers, on a

---

(1) *Phil. Nat. Princ. Math. Lib. I.* §. 8. „Voces attractionis, impulsus, vel propensionis cu-„juscunque in centrum, indifferenter usurpo; has vires non physice sed mathematice tantum „considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum „actionis, causamve, aut rationem physicam definire, vel centris vires vere et physice tribuere, „si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero". — *Ibid. Sect. XI.* au commen-„cement; „Considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physice „loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur; et propterea, mis-„sis disputationibus physicis, familiari utimur sermone; quo possimus a lectoribus mathemati-„cis facilius intelligi". — *Ibid.* §. 295. „Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro cor-„porum conatu accedendi ad invicem; sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo „petentium, etc. Eodem sensu generali usurpo vocem *impulsus*, non species virium et qualita-„tes physicas, sed quantitates et proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens".

$$(1) \ldots\ldots 2e = \frac{2b^2}{a}, \quad c = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{\left(a^2 - \frac{ae}{2}\right)}, \quad e = \frac{2(a^2 - c^2)}{a};$$

et les coordonnées étant comme ci-dessus (*Fig.* 1.) $CN = x$, $NM = y$, $ACM = \Phi$, $CM = r$, l'équation de l'ellipse est

$$(2) \ldots\ldots a^2 y^2 = b^2 \{a^2 - (x - c)^2\},$$

ou à cause de $y^2 = r^2 - x^2$;

$a^2 r^2 = b^4 + 2b^2 cx + c^2 x^2$, dont la racine carrée est

$$(3) \ldots\ldots ar = b^2 + cx.$$

En substituant $x = r \cos \Phi$, cette équation deviendra

$$(4) \ldots\ldots 0 = r(a - c \cos \Phi) - b^2,$$

dont la différentiation donne $-\partial \Phi = \frac{a - c \cos \Phi}{c r \sin \Phi} \partial r$. En substituant

$$\cos \Phi = \frac{ar - b^2}{cr} \text{ et } \sin^2 \Phi = \frac{b^2 (2ar - b^2 - r^2)}{c^2 r^2}, \text{ il viendra}$$

$$(5) \ldots\ldots \partial \Phi = - \frac{b \, \partial r}{r \cdot \sqrt{(-r^2 + 2ar - b^2)}}, \quad \text{et } \partial r^2 = \frac{r^2 \partial \Phi^2 (2ar - r^2 - b^2)}{b^2}.$$

Ainsi l'équation VI. (§. 19.) deviendra

$$\frac{r^2 (2ar - r^2 - b^2)}{b^2} \partial \Phi^2 + \frac{A^2 \partial t^2}{r^2} = -4g \partial t^2 \int P \partial r,$$

et en substituant l'équation V (§. 19.), et divisant par ∂t^2,

$$\frac{A^2 (2a - r)}{b^2 r} = -4g \int P \partial r,$$

dont la différentielle est $\frac{2A^2 a \partial r}{b^2 r^2} = 4g P \partial r$, d'où l'on tire

$$(6) \ldots\ldots P = \frac{A^2 a}{2g b^2 r^2}.$$

La force centrale P ou son accélération, est donc proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$, parce que A, a, b, g, sont des constantes. En substituant (1), et faisant pour abréger,

$$(7) \ldots\ldots \frac{A^2}{ge} = C, \text{ il viendra}$$

$$(8) \ldots\ldots P = \frac{C}{r^2}.$$

Il en résulte cette vérité importante, découverte par Newton: la force centripète du soleil agit suivant cette loi, que son *accélération*, ou la vitesse qu'elle communique aux mobiles en tems égaux, *est en raison inverse des carrés des distances des mobiles au soleil* [1].

Il faut cependant faire une observation qu'on a souvent négligé de faire. Il n'en suit pas que la force centrale du soleil s'étende par tout l'u-

---

[1] *Phil. Nat. Princ. Math. Lib. I.* §. 102.

nivers suivant la même loi; quoiqu'il soit hors de toute probabilité, que cette loi qui, d'après les observations, a lieu dans les diverses distances de chaque planète au soleil, soit brusquement interrompue dans les intervalles entre deux orbites. Il faut cependant convenir, que la démonstration précédente, ou l'ellipticité des orbites, sous le rapport géométrique, ne nous autorise pas à donner à la loi cette étendue. En effet, elle suppose que a, b, sont des quantités constantes, ce qui n'est le cas que tant qu'on considère une seule orbite: on pourrait donc douter, que la raison inverse des carrés des distances ait encore lieu, si l'on passe d'une orbite à l'autre, pour les comparer entre elles, parce qu'alors a et b, ayant d'autres valeurs, doivent être regardées comme des variables. La question, que la loi de Newton a lieu partout, ou seulement dans chaque orbite, ne peut être décidée que par l'expérience relative au rapport qui existe entre les différentes orbites, c'est-à-dire par la troisième loi de Kepler (Voy. §. 29.).

§. 28. La constante A résulte de l'intégration de l'équation III, commune à toutes les forces centrales (§. 19. V.): elle ne dépend donc pas de la *loi* d'attraction, mais de la force elle-même, ou de ce que nous avons appelé sa quantité *absolue* (§. 9.). Ainsi la quantité A servira à déterminer le rapport de la force centrale du soleil à toute autre, quand même elle suivrait une autre loi, s'il y en a. Puis donc que l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre est l'unité dans toutes les équations précédentes (§. 16.), P sera le quotient qui indique, combien de fois la pesanteur est contenue dans la force P. Or P dépendant de la distance, il y aura nécessairement une distance f, à laquelle P est égale à l'accélération de la pesanteur, ou $P = 1$. En faisant donc $r = f$ (§. 27. (8)), on aura $P = 1$, $C = f^2$, $A = f\sqrt{g e}$, $P = \frac{f^2}{r^2}$, ou en nommant p l'accélération de la pesanteur, $p : P :: r^2 : f^2$. Si l'on désigne par P', ce que devient P, lorsque la distance r est égale au demi-diamètre de la terre ϱ, la proportion précédente deviendra $p : P' :: \varrho^2 : f^2$, ce qui est en même tems le rapport de l'intensité de la pesanteur à celle de la force centrale du soleil, parce que p, P', sont leurs accélérations à la même distance ϱ. La grandeur absolue de l'attraction du soleil, la pesanteur étant prise pour unité, est donc $= \frac{f^2}{\varrho^2}$ ou f^2, le demi-diamètre de la terre ϱ étant l'unité des distances. En nommant donc

M la force *absolue* du corps central, on aura $A^2 = f^2 eg = Meg$. Cela donnera l'aire du secteur décrit autour du soleil dans le tems t, $S = \frac{A}{2} t$ (§. 20.), ou

$$S = \frac{t}{2} \sqrt{Meg}.$$

Soit T le tems d'une révolution d'une planète, E l'aire de son orbite entière, $\pi = 3, 14 \ldots$ le rapport de la demi-circonférence au rayon: on aura

$$E = \pi g b,\ E : S :: T : t, \text{ partant } A = \frac{2S}{t} = \frac{2E}{T} = \frac{2\pi a b}{T}, \text{ et}$$

$$A^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = \frac{2\pi^2 a^3 e}{T^2} = Meg, \text{ donc } M = \frac{2\pi^2 a^3}{g T^2},$$

tous les tems (T) étant exprimés en secondes, et toutes les lignes (a, g,) en rayons de la terre. Si l'on prend pour exemple la parallaxe du soleil $= 8'',6$; l'année sidérale $= 365, 2563835$ jours, on aura $T = 31558151, 5$ sec.; $a =$ cotang $8'',6 = 23984$; g à peu près $= \frac{1}{1300000}$; partant $M = 355492$; c'est-à-dire, l'intensité de la force centrale du soleil est presque 360000 fois plus grande que celle de la terre.

§. 29. La dernière équation donne $\frac{a^3}{T^2} = \frac{Mg}{2\pi^2}$, d'où il suit que, si M ne change pas, c'est-à dire pour tous les mobiles qui circulent autour d'un commun corps central, $\frac{a^3}{T^2}$ est une quantité constante, et que par conséquent les carrés des révolutions des planètes autour du soleil sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites. La troisième loi de Kepler est donc une suite immédiate de la loi de l'attraction du soleil, découverte par Newton, s'il est permis de l'étendre d'une planète à l'autre: car c'est ce que nous avons fait, en supposant dans l'équation $P = \frac{C}{r^2}$, $r = f$ et $r = g$ (§. 28.). Soient r, r', les distances aphélies et périhélies de la terre au soleil, et désignons par s, s', les mêmes quantités relatives à Jupiter, par P, P′, Q, Q′, les forces centrales que le soleil exerce dans ces distances: cela posé, il a été prouvé (§. 27.), que $P : P' :: r'^2 : r^2$ et $Q : Q' :: s'^2 : s^2$; mais il n'est pas permis d'en conclure la proportion $P : Q :: s'^2 : r'^2$ que nous avons supposée tacitement. Il s'en suit seulement, que Jupiter décrit une ellipse suivant la même loi que la terre; mais il n'en suit pas, que cette ellipse est de la même *grandeur* qu'elle aurait, si la force Q qui agit sur Jupiter à une distance cinq fois plus grande, était la 25me partie de la force P qui agit sur la terre. Cette question ne peut être décidée que par la comparaison de la grandeur ou des axes des deux ellipses avec la vitesse, par le rapport qui, conformément aux observations, a lieu entre les différentes orbites

autour du même corps central, enfin par la troisième loi de Kepler, qui réunit ces orbites, malgré le grand intervalle qui les sépare. La première loi de Kepler donne le résultat (§. 27.), que la force, en vertu de laquelle chaque planète décrit son ellipse, est $P = \frac{A^2 a}{2 g b^2 r^2}$: en marquant donc d'un trait les quantités relatives à une autre orbite, on aura $P' = \frac{A'^2 a'}{2 g b'^2 r'^2}$, partant $P : P' :: \frac{A^2 a}{b^2 r^2} : \frac{A'^2 a'}{b'^2 r'^2}$. La seconde loi de Kepler (§. 20.) nous fournit les équations $A = \frac{2S}{t}$, $A' = \frac{2S'}{t'}$, ou en égalant les secteurs S, S', aux aires des ellipses entières E, E', et nommant T, T', les révolutions,

$$A = \frac{2E}{T},\quad A' = \frac{2E'}{T'}.$$

Mais $E = \pi a b$, $E' = \pi a' b'$, donc $A = \frac{2 \pi a b}{T}$, $A' = \frac{2 \pi a' b'}{T'}$, et

$$\frac{A^2 a}{b^2} = \frac{4 \pi^2 a^3}{T^2},\quad \frac{A'^2 a'}{b'^2} = \frac{4 \pi^2 a'^3}{T'^2}.$$

Or la troisième loi de Kepler donne $T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3$, d'où l'on tire

$$\frac{A^2 a}{b^2} = \frac{A'^2 a'}{b'^2},\ \text{donc}\ P : P' :: \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2} :: r'^2 : r^2.$$

Il est donc prouvé par les observations de Kepler, que la loi de Newton, suivant laquelle la force centripète du soleil est en raison inverse des carrés des distances, a lieu dans toute l'étendue de l'univers, et pour toutes les distances, d'une orbite planétaire à l'autre.

§. 30. Il en suit de plus, que les secteurs S, S', que deux planètes quelconques décrivent autour du soleil dans le même tems t, sont proportionnels aux racines carrées des paramètres de leurs orbites, e, e'. En effet on a

$$S : S' :: A : A' :: \frac{a b}{T} : \frac{a' b'}{T'} :: \frac{a \sqrt{a e}}{T} : \frac{a' \sqrt{a' e'}}{T'},$$

vu que $e = \frac{2b^2}{a}$. Or $T : T' :: a \sqrt{a} : a' \sqrt{a'}$ suivant la troisième loi de Kepler, donc

$$S : S' :: \sqrt{e} : \sqrt{e'},$$

rapport qui a lieu dans toutes les sections coniques; ce qui suit immédiatement de la seconde loi de Kepler, $S : S' :: A t : A' t$, en y substituant $A = \sqrt{Mge}$ et $A' = \sqrt{Mge'}$ (§. 28.), parce qu'il est prouvé par la troisième loi de Kepler, que M a la même valeur pour toutes les orbites: les secteurs, décrits autour du soleil dans différentes orbites et en différens tems, sont par conséquent comme ces tems et comme les racines des paramètres,

$$S : S' :: t \sqrt{e} : t' \sqrt{e'}.$$

Si l'on veut comparer les secteurs, décrits autour de différens centres, dont l'intensité des forces centrales est exprimée par M et M', on aura $S : S' :: t\sqrt{Me} : t'\sqrt{M'e'}$. Si les orbites sont des ellipses E, E', parcournes dans les tems T, T', on aura $E : E' :: T\sqrt{Me} : T'\sqrt{Me'}$, et en substituant $E = \pi ab = \frac{\pi a \sqrt{ae}}{\sqrt{2}}$, $E' = \frac{\pi a' \sqrt{a'e'}}{\sqrt{2}}$,

$a\sqrt{a} : a'\sqrt{a'} :: T\sqrt{M} : T'\sqrt{M'}$, on $\frac{a^3}{T^2} : \frac{a'^3}{T'^2} :: M : M'$, et $\frac{a'^3}{T'^2} = \frac{M'}{M} \cdot \frac{a^3}{T^2}$;

ce qui est la troisième loi de Kepler, appliquée à différens systèmes. On verra que les forces absolues M, M', sont comme les masses des corps centraux, *m, m'*; d'où il vient

$$\frac{a'^3}{T'^2} = \frac{m'}{m} \cdot \frac{a^3}{T^2}, \text{ et } S' = S\,\frac{t'}{t} \cdot \sqrt{\frac{m'e'}{me}}.$$

On a vu dans ce chapitre, que toute l'astronomie physique déconle des lois de Kepler; et il sera bon, de jeter encore un coup d'oeil sur l'enchaînement des raisonnemens précédens. La seconde loi de Kepler prouve l'*existence* d'une force centrale qui pousse toutes les planètes vers le soleil (§. 26.). La première donne la *loi* de cette force, suivant laquelle elle agit sur chaque planète dans les différentes portions de son orbite, en raison inverse du carré de la distance (§. 27.). Il suit enfin de la troisième, que la force centrale du soleil varie aussi d'une orbite à l'autre, et par toute l'étendue du système solaire, suivant la même loi, que par conséquent la force qui sollicite une planète, serait égale à celle qui agirait sur chaque autre, également éloignée du soleil, malgré la diversité de leurs masses: d'où il suit que la même force anime toutes les planètes, que l'accélération des planètes vers le soleil est la même à égale distance, que par conséquent leur poids, leur pression vers le soleil est proportionnelle à leurs masses, et aux masses divisées par les carrés des distances, si celles-ci ne sont pas égales. Les vérités importantes de la pesanteur universelle et des perturbations des corps célestes, sont fondées sur la dernière proposition qui est une suite de la troisième loi de Kepler: c'est pourquoi nous avons jugé nécessaire de la prouver rigoureusement.

CHAPITRE II.

Détermination des orbites par la loi de l'attraction.

§. 31. La preuve de la loi de l'attraction que nous avons donnée dans le Chapitre précédent, ne paraît être qu'une induction, et même une induction assés incomplète, attendu que le nombre des planètes connues est inconsidérable par rapport à la totalité des corps qui composent le système solaire. Il est vrai que cette induction a été singulièrement complétée depuis Kepler, par un grand nombre de nouvelles planètes, comètes et satellites, et qu'elle l'est encore chaque année. Mais on n'a pas besoin de compter les temoins; la nature de cette loi est telle qu'un seul exemple suffit pour la prouver. L'orbite elliptique de Mercure prouve immédiatement, que dans la couche sphérique dont les diamètres intérieur et extérieur sont 0,3075 et 0,4667 diametres de l'orbite terrestre, la force centrale du soleil agit suivant cette loi; mais cette action suit la loi de continuité, par les variations les plus insensibles de la distance; la même loi est retrouvée aux distances 0, 7; 1; 1, 5; 5; 10; 19; et dans leurs plus petites variations. On est donc forcé de la regarder comme une loi générale, répandue dans le système solaire; autrement il faudrait supposer que la force accélératrice fût une *functio discontinua* de la distance, c'est-à-dire qu'elle n'eût aucune loi générale, ce qui est absurde. Ce serait sans doute une des découvertes les plus intéressantes dans la métaphysique des corps, si l'on pouvait démontrer cette loi *a priori*: alors l'astronomie serait, comme la géométrie, une partie des mathématiques pures, et elle serait par rapport à l'astronomie actuelle, ce que la physique purement théorique est relativement à la physique expérimentale.

Nous ne pouvons nous former une idée d'une force qui, étant dirigée de tous côtés vers un point fixe, remplit l'espace sphérique autour de ce centre, qu'en imaginant des rayons qui en sortent; or puisque la densité de ces rayons doit nécessairement décroître dans la même proportion, que les surfaces sphériques ou les carrés des distances croissent, nous serons disposés à supposer que l'attraction du soleil suit la même loi, d'autant plus qu'elle a lieu dans plusieurs phénomènes semblables, comme l'électricité, la lumière, etc. Il est vrai que, dans tous ces cas, l'effet est proportionnel aux surfaces des corps, ce qui donne le rapport des carrés; tandis que la proportionnalité de la pesanteur aux masses, et au volume des corps uniformes, paraît indiquer le rapport des cubes. Mais s'il est permis d'envisager cet objet d'une manière aussi grossière, la densité des rayons convergens dans le soleil étant réciproque au carré de la distance du soleil, son effet, ou l'accélération doit suivre le même rapport. Il est vrai que la figure du corps, ou la surface qu'il tourne vers le soleil, est tout-à-fait indifférente; mais le même cas a lieu à chaque distance. Cela posé, la masse entière du corps, quelle que soit sa figure, sera frappée par un nombre de rayons quatre fois plus grand, lorsqu'il est deux fois plus près du soleil, parce qu'il se trouve dans une couche quatre fois plus dense. Imaginés un corps résous en ses premiers élémens, dont le nombre détermine sa masse, et dont chacun a la même figure invariable, par ex. sphérique: cela posé, chaque élément sera frappé par un cône de rayons, dont la densité est réciproque au carré de la distance. L'action exercée sur le corps entier doit donc suivre le même rapport, quoique la *force motrice*, communiquée au corps à égale distance, soit proportionnelle à la masse du corps, parce que ce que nous venons de dire, est vrai de chaque élément. Il paraît que, dans cette dispute, on n'a pas assés distingué la quantité *accélératrice* des forces d'avec la quantité *motrice*. La première, ou l'*intensité* de la force, doit sans doute être réciproque au carré de la distance, ainsi que l'illumination d'un objet s'*affaiblit;* mais la dernière qui est, pour ainsi dire, la grandeur *extérieure*, doit être proportionnelle à la masse, ainsi qu'il en serait de la *quantité* de lumière qu'un corps recevrait, s'il était aussi pénétrable à la lumière, qu'il l'est relativement

à la force centrale ou à la pesanteur; et cette pénétrabilité est peut-être la véritable explication du paradoxe. La force avec laquelle chaque élément du corps est accéléré, n'a rien de commun avec la summe de toutes les pressions qu'éprouve le corps entier.

Au reste, ces recherches sur la cause physique d'une opération ou d'une loi de la nature, dont l'existence n'admet aucun doute, servent plutôt à satisfaire notre curiosité, qu'à perfectionner la science. Les phénomènes prouvent incontestablement, que la raison inverse du carré de la distance est une loi générale de la nature: ainsi nous devons croire, que cette loi était nécessaire pour l'exécution et la conservation du plan le plus parfait. Si une autre loi, par ex. le rapport cubique, avait lieu, l'univers tomberait en ruines, ou éprouverait des révolutions qui dérangeraient la symmétrie de l'ensemble, ou les proportions qui ont paru les plus belles à l'auteur de la nature. La beauté de l'univers, ainsi que de tout autre ouvrage, consiste dans les proportions qui ont lieu entre la grandeur, la distance, et le mouvement des différentes parties. En choisissant les plus belles proportions, le créateur pouvait déterminer arbitrairement l'échelle ou la grandeur absolue, et il ne nous sera jamais possible d'aprofondir la raison qui lui a fait préférer l'échelle actuelle à toutes les autres également possibles; aussi cette question n'a dans le fond aucun sens, puisqu'il ne peut pas être question de la grandeur de l'échelle, quand il n'y en a pas plusieurs qu'on puisse comparer entre elles. Mais si la grandeur d'une partie est changée, la perfection de l'ensemble exige, que les proportions restent les mêmes, et que par conséquent toute quantité, toute dimension change dans le même rapport; par ex. si les distances du soleil, de la terre, et de la lune, étaient altérées, les grandeurs et les mouvemens de ces corps devraient changer à proportion, et ils décriraient des orbites semblables. Or c'est impossible, à moins que la force centrale qui anime chaque corps, ne soit changée à proportion. Soit T la masse de la terre, r la distance de la lune, et supposons que les dimensions changent dans le rapport de 1 à $\frac{1}{n}$, ensorte que toute ligne r devienne $\frac{r}{n}$, et toute masse T se change en $\frac{T}{n^3}$; désignons enfin par $\phi\ (r)$ la fonction de la distance qui détermine la loi de l'attraction, ensorte que l'action

de la terre sur la lune soit $\frac{T}{\Phi(r)}$. Cela posé, la nouvelle force à la distance $\frac{r}{n}$ sera $\frac{T}{n^3 \cdot \Phi\left(\frac{r}{n}\right)}$. Or les orbites étant supposées semblables, la force doit aussi changer dans le rapport de 1 à $\frac{1}{n}$, parce que les lignes que les forces font parcourir aux mobiles, sont proportionnelles aux forces (§. 6.): on a donc $\frac{T}{n^3 \cdot \Phi\left(\frac{r}{n}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{T}{\Phi(r)}$, ou $n^2 . \Phi\left(\frac{r}{n}\right) = \Phi(r)$; c'est-à-dire $\Phi(r)$ doit être une telle fonction de r, qu'en y substituant $\frac{r}{n}$ au lieu de r, la fonction, après avoir été multipliée par n^2, ait constamment la valeur $\Phi(r)$, ensorte que tous les termes qui renferment n, se détruisent mutuellement. Il est visible que cela ne peut avoir lieu, que dans le cas où $\Phi(r)$ a la forme Cr^2. En supposant par ex. $\Phi(r) = Ar^m$, on aura $\Phi\left(\frac{r}{n}\right) = A\frac{r^m}{n^m}$, et $n^2 . \Phi\left(\frac{r}{n}\right) = A . r^m . n^{2-m}$, ce qui doit être égal à $\Phi(r) = Ar^m$, d'où il suit $n^{2-m} = 1$, donc $m = 2$. Ainsi la force, avec laquelle la masse T agit sur un corps à la distance r, est $\frac{T}{\Phi(r)} = \frac{T}{Cr^2}$, en raison inverse du carré de la distance. C'est donc la seule loi qui fait dépendre les mouvemens et tous les phénomènes de la nature, non pas de la grandeur absolue, mais des proportions seules. Si une autre loi ou fonction avait lieu, une échelle plus ou moins grande, les proportions demeurant les mêmes, produirait un monde tout-à-fait différent; et la grandeur *absolue*, dont il est impossible de se faire une idée claire, parce que toute la mathématique est fondée sur des proportions, serait un élément essentiel dans les recherches sur les lois de la nature; ce qui parait absurde. Mais si l'on adopte la fonction réciproque au carré de la distance, les orbites des corps célestes, leurs distances, et toutes les lois de la nature, sont indépendantes de leurs dimensions et du mouvement absolu dans l'espace: tout dépend des *proportions* qui seules peuvent être l'objet de nos recherches.

Quand on a fait ces réflexions, on ne sera pas étonné de voir que, d'après les observations et les lois de Kepler, cette fonction est effectivement la loi de la nature. Il est certain, que c'est une loi générale relativement à la force du soleil, qui servira à calculer les orbites de tous les corps, connus ou inconnus, qui circulent autour du soleil. On s'en est servi, comme

d'une hypothèse, pour calculer les orbites des comètes; et l'accord entre le calcul et les observations a fourni une nouvelle preuve que c'est une loi générale. Ainsi tous les corps du système solaire devant suivre cette loi, il se présente la question, s'il en résulte nécessairement, qu'ils sont aussi soumis aux lois de Kepler; si ces lois sont une suite nécessaire de la fonction précédente, ou seulement un cas particulier; si tous les corps du système solaire doivent absolument décrire des ellipses; et si dans le cas, où les observations nous apprennent qu'il y a d'autres orbites, la généralité de cette loi ne peut plus avoir lieu. Pour répondre à ces questions, il faut chercher *a priori* les lois du mouvement, qui découlent de la raison inverse du carré de la distance; ce qui est l'objet du Chapitre présent.

§. 32. L'expression que nous avons trouvée (§. 28.) pour la force centrale $P = \frac{f^2}{r^2}$, donne $\int P \partial r = -\frac{f^2}{r}$; et l'on a, indépendamment de la loi de l'attraction, $\partial t = \frac{r^2 \partial \Phi}{A}$ (§. 19. V.). En substituant ces valeurs, l'équation VI. (§. 19.) deviendra $\frac{A^2 \partial r^2}{r^4 \partial \Phi^2} = -\frac{A^2}{r^2} - B + \frac{4 g f^2}{r}$, d'où l'on tirera

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\pm A}{r . \sqrt{(-A^2 + 4 g f^2 r - B r^2)}}, \text{ ou}$$

$$(1) \ldots\ldots \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\pm A : \sqrt{B}}{r . \sqrt{\left(-r^2 + \frac{4 g f^2}{B} r - \frac{A^2}{B}\right)}}.$$

Mais on a dans l'ellipse (§. 27. (5)), en mettant $\frac{a e}{2}$ au lieu de b^2,

$$(2) \ldots\ldots \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\sqrt{\frac{a e}{2}}.}{r . \sqrt{\left(-r^2 + 2 a r - \frac{a e}{2}\right)}}.$$

Si l'on suppose a infini, l'équation (2) est celle de la parabole; et si a est négatif, elle donne l'hyperbole; ensorte que (2) est l'équation générale des sections coniques. Il est visible, que les équations (1) et (2) sont identiques, si l'on fait

$$(3) \ldots\ldots a e = \frac{2 A^2}{B}, \quad a = \frac{2 g f^2}{B}, \quad \text{partant } e = \frac{A^2}{g f^2}.$$

Il s'en suit que les orbites, décrites en vertu d'une force centrale qui est réciproque au carré de la distance, sont nécessairement des sections coniques, dont le foyer est occupé par le corps central; et les équations (3) serviront à distinguer les cas, où l'orbite sera une ellipse, hyperbole, ou parabole. L'é-

quation $a = \frac{2gf^2}{B}$ nous apprend, que le grand axe, ainsi que le paramètre, ne dépend pas seulement de l'intensité f^2 de la force, mais aussi de B, constante arbitraire que les observations seules peuvent nous faire connaître. Cette constante B, qui dépend des circonstances accidentelles, auxquelles le mouvement a été assujetti au moment de son origine ou à une époque quelconque, servira à déterminer la nature de l'orbite, qui sera une ellipse, hyperbole, ou parabole, selon que B est positif, négatif, ou nul. Le paramètre e depend de la constante A, et $A = \frac{2S}{t}$ ne peut être connu que par observation. On a donc pour les diverses sections coniques,

$$(4) \ldots\ldots \text{Ellipse,} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{A}{r \cdot \sqrt{(-Br^2 + 4gf^2 r - A^2)}} = \frac{\sqrt{ae}}{r \cdot \sqrt{(-2r^2 + 4ar - ae)}},$$

$$(5) \ldots\ldots \text{Hyperbole,} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{A}{r \cdot \sqrt{(Br^2 + 4gf^2 r - A^2)}} = \frac{\sqrt{ae}}{r \cdot \sqrt{(2r^2 + 4ar - ae)}},$$

$$(6) \ldots\ldots \text{Parabole,} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{A}{r \cdot \sqrt{(4gf^2 r - A^2)}} = \frac{\sqrt{e}}{r \cdot \sqrt{(4r - e)}}.$$

Si l'on substitue (3) $A = f\sqrt{ge}$ dans l'équation $T = \frac{2\pi ab}{A}$ (§. 29.), b étant $\sqrt{\frac{ae}{2}}$ (§. 27. (1)), on aura

$$(7) \ldots\ldots T = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{f}, \qquad (8) \ldots\ldots f = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{T}.$$

En nommant n l'angle que l'astre décrit en une seconde par sa vitesse moyenne, on aura $n = \frac{2\pi}{T}$, T étant exprimé en secondes, donc

$$(9) \ldots\ldots n = f\sqrt{\frac{2g}{a^3}}, \qquad (10) \ldots\ldots f = n\sqrt{\frac{a^3}{2g}}.$$

En marquant d'un trait les mêmes quantités, relatives à une autre planète, ou à un autre corps central, on aura

$$(11) \ldots\ldots T : T' :: a\sqrt{a} : a'\sqrt{a'} :: n' : n, \quad (12) \ldots\ldots f^2 : f'^2 :: \frac{a^3}{T^2} : \frac{a'^3}{T'^2} :: n^2a^3 : n'^2a'^3.$$

L'équation (11) sert à comparer les révolutions et les moyens mouvemens de deux astres qui décrivent, autour du même corps central, des ellipses dont les grands axes sont $2a$ et $2a'$; à l'aide de l'équation (12) on pourra comparer les forces centrales de divers corps entourés de satellites, dont les distances a, a', et les révolutions T, T', ou les moyens mouvemens n, n', sont connus par observation. Pour un commun corps central $n^2a^3 = 2gf^2 = \frac{2A^2}{e} = aB$ est une quantite constante. Il s'en suit

$(13) \ldots\ldots A^2 = n^2 a^2 b^2, \qquad (14) \ldots\ldots B = n^2 a^2 = \frac{A^2}{b^2}.$

§. 33. Il suit donc de la loi de la force centrale, $\frac{f^2}{r^2}$, que l'orbite doit nécessairement être une section conique; que la loi, suivant laquelle la planète décrit son orbite, $S = \frac{A}{2} t$, est donnée par la constante A; que le paramètre de la courbe dépend de la constante A et de l'intensité de la force f^2; et que l'espèce de la section conique est déterminée par la constante B qui dépend des circonstances accidentelles du mouvement, ou des constantes arbitraires qui entrent toujours dans la solution des problèmes, donnés par des équations différentielles. Une de ces circonstances accidentelles est la direction et la vitesse que la planète a eues dans un point quelconque de son orbite: car suivant la loi d'inertie, on peut indifféremment lui attribuer l'état du repos, ou un mouvement rectiligne et uniforme. Cet état, soit qu'il dépende de l'origine de son existence, ou d'une impulsion inconnue, ne peut donc pas être déterminé par la nature du problème; et cependant il doit nécessairement modifier le mouvement de la planète pour l'éternité, quelles que soient les forces qui agiront sur elle. Connaissant donc le mouvement actuel du corps, et les forces dont il est sollicité, on pourra déterminer la direction et la vitesse qu'il a eues dans un point quelconque, et d'où dépend la constante B. Chaque point de l'orbite peut servir à cette détermination; mais comme il suit de la nature des sections coniques, que la direction du mouvement est perpendiculaire au rayon vecteur dans deux points de l'orbite, il sera plus commode, de choisir l'un de ces points, et principalement le périhélie, également applicable à l'hyperbole et la parabole: alors on n'aura besoin que de déterminer la vitesse, la direction étant donnée.

La vitesse v est en général (§. 15.) $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\partial t} = \frac{\sqrt{(\partial r^2 + r^2 \partial \Phi^2)}}{\partial t}$ (§. 19.) $= \sqrt{\left(\frac{\partial r^2}{\partial t^2} + \frac{A^2}{r^2}\right)}$ §. 19. V.). Si l'on y substitue (VI) $\frac{\partial r^2}{\partial t^2} + \frac{A^2}{r^2} = -B - 4gf P \partial r = -B + \frac{4gf^2}{r} = 2gf^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ (§. 32. (3)), on aura

$$(1) \ldots\ldots v^2 = 4gf^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right).$$

La vitesse est donc un *maximum*, lorque r est un *minimum*, et réciproquement: elle est donc un *maximum* dans le périhélie, un *minimum* dans l'*aphélie*. En faisant $r = a - c$, on aura pour le périhélie, $v^2 = \frac{4gf^2(a+c)}{2a(a-c)} = \frac{2gf^2(a^2-c^2)}{a(a-c)^2}$, et en substituant $c = \sqrt{\left(a^2 - \frac{ae}{2}\right)}$ (§. 27. (1)),

$$(2)\ldots . v'=\frac{f\sqrt{g\,e}}{a-\sqrt{\left(a^2-\frac{a\,e}{2}\right)}}.$$

Si l'on nomme p' la distance périhélie, on a $p'=a-e$, ce qni change la dernière équation en

$$(3)\ldots . v'^2\,p'^2=f^2\,g\,e.$$

Le carré de $\sqrt{\left(a^2-\frac{a\,e}{2}\right)}=a-p'$ donne $a=\frac{2\,p'^2}{4\,p'-e}$, et en substituant $e=\frac{v'^2\,p'^2}{f^2\,g}$ (3), on aura

$$(4)\ldots . a=\frac{2\,f^2\,g\,p'}{4f^2g-p'v'^2};$$

d'où il suit que la nature de la section conique dépend de la vitesse v', avec laquelle la planète a passé par le périhélie. L'orbite sera une parabole, si cette vitesse est égale à $2f\sqrt{\frac{g}{p'}}$; elle sera une hyperbole ou une ellipse, selon que v' est plus ou moins grande que $2f\sqrt{\frac{g}{p'}}$. Nous voyons par là, que les hyperboles et les ellipses sont également possibles, avec cette différence, que l'hyperbole suppose une plus grande vitesse que l'ellipse. La parabole est infiniment moins probable que les deux autres sections coniques, parce qu'elle suppose un cas unique, l'égalité exacte de $v'=2f\sqrt{\frac{g}{p'}}$. Pour peu que la vitesse soit plus ou moins grande que cette limite, la parabole se transformera en hyperbole ou en ellipse. Il en est de même du cercle qui suppose aussi une égalité parfaite, savoir $v'=f\sqrt{\frac{2g}{p'}}$, ce qu'il est aisé de voir, en faisant $a=p'$ dans l'équation (4). Il s'en suit, que les vitesses de deux astres qui partent de la même distance périhélie, pour décrire, l'un une parabole, l'autre un cercle, doivent être entre elles comme 2 à $\sqrt{2}$, ou comme $\sqrt{2}$ à 1. On voit en même tems, que la parabole est l'asymptote dont les ellipses fort excentriques approchent de plus en plus dans le périhélie: cette observation a été d'un grand usage dans la théorie des comètes.

On peut exprimer les conditions précédentes d'une autre manière. Puisque $P=\frac{f^2}{r^2}$, $\frac{f^2}{p'^2}=P'$ sera la force accélératrice dans le périhélie, partant $\frac{f^2}{p'}=P'p'$. L'orbite sera donc une hyperbole ou une ellipse, selon que v'^2 est plus ou moins grand que $4gp'P'$; elle sera une parabole ou un cercle, si v'^2 est égal à $4gp'P'$ ou à $2gp'P'$. En nommant h la hauteur, due à la vitesse v' (§. 16.), on a $v'^2=4gh$: d'où il suit que l'orbite sera une

hyperbole, si $h > p'P'$, une ellipse si $h < p'P'$, une parabole si $h = p'P'$, et un cercle si $h = \frac{1}{2} p'P$: dans le dernier cas la hauteur due à la vitesse périhélie est au demi-rayon, comme la force centrale à la distance égale au rayon est à la pesanteur. Au reste, il est visible, que le mouvement circulaire autour du corps central est toujours uniforme. L'aire du secteur est $S = \frac{1}{2} A t$: en nommant donc s l'arc, et ϕ l'angle au centre, que la planète a décrit dans le tems t, on a $S = \frac{1}{2} p' s = \frac{1}{2} p'^2 \phi$, donc $s = \frac{A t}{p'}$ et $\phi = \frac{A t}{p'^2}$, p' étant le rayon: d'où il suit, que les mouvemens vrai et apparent sont proportionnels au tems.

L'équation (3) $e = \frac{v'^2 p'^2}{g f^2}$ nous apprend, que les paramètres de différentes orbites, autour d'un commun centre, sont en raison composée des carrés des distances et des vitesses périhélies, et que, si les distances périhélies sont égales, les vitesses seront comme les racines des paramètres, quelle que soit la section conique Dans la parabole et dans le cercle on a $e = 4p'$ et $e = 2p'$, partant $p' = \frac{4 g f^2}{v'^2}$ et $p' = \frac{2 g f^2}{v'^2}$. Les paramètres et les distances périhélies de ces deux sections coniques seront dont réciproques au carré de la vitesse. Si l'on suppose les vitesses égales, la première valeur de p' sera le double de la seconde ce qui veut dire que, si deux astres passent par leur périhélie avec la même vitesse, l'un décrivant une parabole, l'autre un cercle, la distance périhélie du premier doit être deux fois plus grande que celle du dernier.

§. 34. L'ellipse qui est proprement l'objet de nos observations et de nos calculs, mérite une attention particulière. Si l'on nomme p'' et v'' la distance et la vitesse aphélies, on aura $p'' = a + c$, donc (§. 33. (1))

$$(1) \ldots . v''^2 = \frac{2 g f^2 (a - c)}{a (a + c)}.$$

En comparant cela avec l'équation $v'^2 = \frac{4 g f^2 (a + c)}{2 a (a - c)}$ (§. 33.), on trouvera

$$v' : v'' :: a + c : a - c :: p'' : p'.$$

Les vitesses dans les apsides sont donc réciproques aux distances; et c'est dans ces points seuls que ce rapport a lieu: car l'équation (1) (§. 33.) nous apprend, qu'en général deux vitesses sont dans le rapport $v' : v'' :: \sqrt{\frac{2a - r'}{r'}} : \sqrt{\frac{2a - r''}{r''}}$.
Nous sommes entrés dans quelque détail relativement à cette matière, parce

qu'elle donne une preuve frappante, que l'erreur peut conduire à la vérité. Kepler étant convaincu par des observations faites dans les apsides, de la justesse du rapport $v' : v'' :: p'' : p'$, il pensa que le même rapport devait avoir lieu dans tous les points de l'orbite; et c'est par cette erreur qu'il parvint à la découverte de sa seconde loi (II. §. 122. 125.), en y joignant une autre erreur qui compensa la première.

On a vu (§. 33.) que l'orbite est une ellipse, si la planète a eu, dans un point quelconque M, une vitesse v, perpendiculaire au rayon vecteur p ou r, qui était moindre que $2 f \sqrt{\frac{g}{p}}$ ou $2 \sqrt{g}$ l'p, le point M étant le périhélie ou l'aphélie; car il est aisé de voir que, si v'^2 est $< 4 f^2 \frac{g}{p'}$, v'^2 sera aussi $< 4 f^2 \frac{g}{p''}$, v' et v' étant les vitesses, p' et p'' les distances périhélies et aphélies. En effet, la proportion $v' : v'' :: p'' : p'$ donne $v''^2 = \frac{v'^2 p'^2}{p''^2}$, d'où il suit que $v''^2 < \frac{4 f^2 g p'}{p''^2}$, et à plus forte raison $v''^2 < \frac{4 f^2 g}{p''}$, parce que $\frac{p'}{p''} < 1$. Il reste donc à examiner, si le point M sera l'aphélie ou le périhélie, ou ce qui revient au même, si p est plus ou moins grand que a. L'équation (1) $v''^2 = \frac{2 g f^2 (a^2 - c^2)}{a p''^2} = \frac{g f^2 e}{p''^2}$ donne $e = \frac{v''^2 p''^2}{g f^2}$. Or on a $p'' = a + c = a + \sqrt{\left(a^2 - \frac{a e}{2}\right)}$, d'où l'on tirera $a = \frac{2 p''^2}{4 p'' - e}$, et en substituant la valeur précédente de e, $a = \frac{2 g f^2 p''}{4 f^2 g - p'' v''^2}$, équation toute semblable à (4) (§. 33.). On a donc généralement

$$(2) \ldots a = \frac{2 g f^2 p}{4 f^2 g - p v^2},$$

p étant la distance périhélie ou aphélie. Il s'en suit $p = \frac{4 g f^2 a}{2 g f^2 + a v^2}$, donc

$$(3) \ldots\ldots p - a = a \, \frac{2 g f^2 - a v^2}{2 g f^2 + a v^2},$$

d'où il est aisé de conclure, que le point M sera l'aphélie, si $v < f \sqrt{\frac{2g}{a}}$, et le périhélie, si $v > f \sqrt{\frac{2g}{a}}$. On aurait pu tirer le même résultat de la condition du cercle, $v = f \sqrt{\frac{2g}{a}}$ (§. 33.); car il est visible, que la planète s'éloignera du centre, ou que le point M sera le périhélie, si sa vitesse est plus grande que celle qui convient au cercle, et que dans le cas contraire la planète s'approchera du centre.

LIVRE III.

DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE.

CHAPITRE I.

Preuves de l'attraction universelle.

§. 35. Il a été prouvé dans les deux chapitres précédens, que les lois de Kepler ne sont pas seulement une suite nécessaire d'une force centrale du soleil, dont l'accélération est réciproque au carré de la distance, mais qu'elles ne pourraient pas exister sans cette force. Il est donc certain, que le soleil attire les planètes avec une pareille force; qu'elle s'affaiblit à mesure que la distance augmente, sans pouvoir jamais devenir nulle; qu'elle se répand aux distances les plus immenses, mais qu'elle devient insensible, surtout en se confondant avec d'autres puissances. Il en résulte, que chaque corps qui entre dans sa sphère d'activité, est soumis à ses lois qui sont celles découvertes par Kepler; que tout astre qui approche du soleil autant que la planète la plus éloignée, doit décrire autour de lui une section conique, à moins qu'il ne soit retenu par une autre force qui l'emporte sur celle du soleil. Rien n'était plus naturel que d'appliquer ces principes aux comètes, visibles sur la terre, qui toutes approchent du soleil plus que Mars. Newton, le créateur de l'astronomie physique, fut aussi le premier qui calcula les orbites des comètes suivant les lois de Kepler, et le résultat se trouva

parfaitement d'accord avec les observations (¹). On a fait l'objection, que la force attractive du soleil, à l'instar de l'aimant qui n'attire que le fer, agit sur les planètes seules, et non sur les comètes qui sont apparemment d'une nature fort différente. Cela peut être; mais nous ne connaissons pas la nature des planètes plus que celle des comètes, et l'expérience a prouvé qu'elles suivent les lois de l'attraction du soleil aussi bien que les planètes. La vertu magnétique est d'une nature tout-à-fait différente: elle peut être communiquée au fer, et elle peut être détruite à volonté; on peut l'augmenter et affaiblir, etc. Il est plus naturel, de comparer l'attraction du soleil avec la pesanteur sur la terre, qui agit sur tous les corps qui s'approchent de la terre, quelle que soit la matière dont ils sont composés. La généralité de l'attraction du soleil est enfin parfaitement prouvée par la théorie moderne de la lune. Cette théorie qui satisfait aux phénomènes avec la plus grande précision, est fondée sur l'hypothèse, que le soleil, aussi bien que la terre, attire la lune en raison inverse du carré de la distance; et cette hypothèse explique parfaitement toutes les irrégularités de la lune, connues par observation. Il est vrai que la lune ne décrit pas une ellipse autour du soleil, parce qu'elle est forcée par l'attraction de la terre, qui l'emporte sur celle du soleil, de circuler autour de la terre; mais sa vraie orbite n'est pas non plus une ellipse autour de la terre, mais une courbe qui naît de la composition de deux forces, dirigées vers la terre et le soleil, et réciproques aux carrés des distances. Le mouvement elliptique des planètes et des comètes, les écarts de la lune d'une ellipse, l'action du soleil sur le flux et le reflux de l'océan, sont les plus fortes preuves, que l'attraction du soleil est générale, et qu'elle agit suivant une loi invariable, sur tous les corps qui s'approchent de sa sphère d'activité.

Observons en passant, que c'est la plus forte preuve physique du mouvement de la terre, ainsi que nous avons vu (II. §. 126.), que la troisième loi de Kepler en est la plus forte preuve astronomique. La terre, étant au milieu de la sphère d'activité du soleil, doit être soumise à son action, aussi bien que les autres planètes. Elle se précipiterait nécessairement dans

(1) *Phil. Nat. Princ. Math. Tom. III. Prop. XL. 499.*

le soleil, si elle n'avait pas un mouvement circulaire autour de cet astre, d'où résulte une force centrifuge qui balance la force centripète.

§. 36. Cela donne lieu à la question, si l'attraction est une propriété exclusive du soleil, ou une qualité générale de tous les corps. Le dernier serait au moins très-probable, quand-même l'expérience ne nous montrerait aucun autre corps, doué de cette propriété. L'impossibilité même, d'expliquer par les propriétés connues des corps, l'attraction dont l'existence est hors de doute, semble indiquer, que c'est une des propriétés élémentaires, essentielles, et par conséquent générales de la matière, qui, à cause de leur simplicité, n'admettent pas une explication ultérieure. Quelle que soit la variété de la nature des corps, la conservation de la nature, et la coopération à un seul but, suppose nécessairement des lois générales, auxquelles tous les corps sont soumis sans exception; et le lien qui réunit le système solaire, en retenant la totalité des planètes et des comètes dans leurs orbites, est selon toutes les apparences une de ces lois générales. On ne peut pas disconvenir, que les propriétés connues des corps, leur étendue, impénétrabilité, inertie, ne suffisent pas, pour produire les phénomènes de la nature les plus ordinaires; parce qu'il ne peut en résulter qu'un repos parfait, ou des mouvemens rectilignes, ou enfin des chocs d'un corps contre l'autre: les corps seraient ensevelis dans le repos du tombeau, ils feraient une masse informe, ou ils seraient dispersés dans l'immensité de l'espace. Il faut donc que les corps aient d'autres qualités ou vertus; et pour que l'univers forme un système, il doit exister une force générale qui réunit les corps les plus éloignés, et qui les force de contribuer au bien et à la beauté du tout.

Il est certain que l'attraction mutuelle satisfait à toutes ces conditions; et peut-être la plus vive imagination n'a jamais conçu une idée plus heureuse et plus fertile, que l'hypothèse de la pesanteur universelle qui se développa dans la réflexion tranquille de Newton, et qui joint la solidité de la géométrie aux charmes de la poësie. Elle est dans le monde matériel, ce que l'amour propre est dans le monde intellectuel; ainsi que celui-ci, elle est la source de laquelle découlent tous les services que les corps se rendent l'un à l'autre et au système entier. De même que les diverses modifications de ce

puissant ressort, les différens obstacles qu'il a à vaincre, ou les objets particuliers qui l'attirent, produisent des actions qui au premier regard ne présentent aucun amour propre, mais des sacrifices désintéressés, tels que les nobles vertus de l'humanité, du patriotisme, etc. de même la gravitation universelle est la source de tous les mouvemens qui produisent l'harmonie de l'univers, et dans lesquels l'observateur superficiel s'aperçoit aussi peu de l'attraction, que lorsque la planète périhélie s'éloigne du soleil. Ainsi qu'un conquérant, le soleil s'empare de tous les astres moins puissans, mais seulement pour prévenir les désordres de l'anarchie dans son domaine, et pour y répandre la lumière et la chaleur.

On pourrait demander, s'il y a, ici comme dans le monde intellectuel, des anomalies, des actions d'un amour-propre outré, contraires au bien général, des tyrans qui ne font des conquêtes que pour détruire. Cette question a été résolue de différentes manières. Il paraît que de pareils abus ne peuvent pas être supposés ici, où l'instinct et les moyens de le satisfaire, découlent de la même source; les dérangemens partiels contribuent à la perfection générale; et toute l'histoire de l'astronomie ne présente aucun exemple incontestable de la déstruction d'un corps céleste. Personne ne peut former comme l'astronome, ce voeu que les lois de l'auteur de la nature soient remplies aussi fidèlement dans le monde intellectuel, que dans le monde matériel.

§. 37. On verra (*Chap. III.*), que le principe de la *réaction* prouve rigoureusement, que toutes les planètes qui se meuvent autour du soleil suivant les lois de Kepler, doivent être douées d'une force centrale, proportionelle à leurs masses divisées par le carré de la distance. Partout où l'on peut faire des expériences, elles viennent à l'appui de cette vérité, sans qu'il y en a aucune qui lui soit contraire. Chaque planète force les astres qui approchent d'elle, de circuler autour d'elle suivant les lois de Kepler, comme les planètes entourées de satellites; ou si son attraction est surpassée par une autre plus forte, elle a du moins une influence sur son mouvement, tout-à-fait conforme à la loi d'attraction. Chaque calcul, fondé sur cette hypothèse, en fournit une nouvelle preuve, s'il satisfait aux phénomènes:

ainsi toute l'astronomie physique, et principalement la théorie des perturbations, à l'aide desquelles les tables modernes sont si bien d'accord avec les observations, est une suite de preuves nombreuses de l'attraction générale. Il sera bon cependant, de rassembler ici les faits les plus importans.

On a vu (II. §. 311. 328.), que le rapport qui existe entre les révolutions des satellites de Jupiter et de Saturne, qui ont été déterminées par les observations d'une longue suite d'années, et entre leurs distances à la planète principale, mesurées avec le micromètre, sont entièrement conformes à la troisième loi de Kepler; que plusieurs de ces satellites décrivent des ellipses suivant les lois de Kepler (II. §. 318. 331.); et que le mouvement des autres satellites paraît être circulaire et uniforme, ensorte qu'ils décrivent des secteurs proportionnels au tems. Il s'en suit que Jupiter, Saturne et Uranus sont doués d'une force centrale, qui agit suivant la même loi que celle du soleil.

Les perturbations considérables que Jupiter et Saturne exercent l'un sur l'autre, prouvent que la force attractive de ces deux planètes agit sur tous les corps qui approchent de leur sphère d'activité; et il en est de même des autres planètes. L'application que la théorie moderne a faite de cette loi, dans tous les cas où deux astres sont assés près l'un de l'autre, et la grande précision que les tables astronomiques doivent à cette application, sont la preuve la plus complète, que tous les corps sans exception s'attirent mutuellement avec une force, réciproque au carré de la distance.

§. 38. L'exemple de la planète que nous habitons, mérite une attention particulière, parce qu'il donna à Newton la première idée de la gravitation universelle, et qu'il est en notre pouvoir de faire des expériences sur la planète même. La base de toute la théorie de la lune est l'ellipse que ce satellite décrit autour de la terre suivant les lois de Kepler, ce qui prouve une force centrale de la terre, réciproque au carré de la distance (*L. II. Ch. I.*). Ses écarts de l'ellipse, ses inégalités ou équations, s'expliquent parfaitement par la force centrale du soleil, qui agit sur la lune aussi bien que sur la terre; ce qui est une nouvelle confirmation de l'attraction universelle, ainsi qu'on l'a vu. Mais il y a d'autres réflexions qui regardent

plus immédiatement la physique de notre planète. Quelle puissance invisible enchaine la lune à la terrre? Ne doit-elle pas être beaucoup plus sensible sur la terre même, qu'à la distance de la lune? D'un autre côté, il paraît inconvevable, que la force centripète de la *pesanteur,* si sensible à la surface de la terre, qui donne à notre globe sa forme sphérique, qui ne laisse pas échapper de la terre la moindre molécule que la main du créateur lui a assignée, par les applications ingénieuses de laquelle l'homme exécute les plus grands ouvrâges, tandis qu'elle-même se moque de toutes ses inventions, en ne lui permettant pas de quitter la glèbe à laquelle il est attaché; on ne conçoit pas, dis-je, que cette puissante force soit tout-à-fait nulle à de plus grandes distances. Puisque sur les plus hautes montagnes elle n'a pas diminué sensiblement, et que dans les couches les plus élevées de l'atmosphère elle retient les vapeurs de la terre; il paraît qu'elle doit s'étendre jusqu'à la lune. Il est difficile de tracer les limites de son activité, de déterminer la hauteur d'où la pierre ne retomberait plus à la terre; et il est possible que la sphère d'activité de la pesanteur s'étend au delà de l'orbite lunaire. — Voilà les questions que Newton se proposa, et qui peuvent être résolues de la manière suivante.

§. 39. Il est certain, que la lune se précipiterait sur la terre, au moment où la vitesse avec laquelle elle va suivant la tangente de son orbite, et qui est l'effet de sa première projection en vertu de la loi d'inertie, serait détruite; c'est une suite nécessaire de la force centrale, prouvée ci-dessus. La lune se trouve donc dans le même cas, qu'une pierre projettée horisontalement d'une grande hauteur. Si la projection était assés forte, et que la résistance de l'air fût insensible, ce qui est le cas dans la région de la lune; cette pierre, au lieu de tomber sur la terre, décrirait autour d'elle une section conique. Il n'y a donc pas d'autre différence entre ces deux cas, que la distance plus et moins grande; et la question, si ce sont des effets d'une même cause, peut être résolue de deux manières: on peut examiner, si l'effet de la force centrale qui retient la lune dans son orbite, étant modifié suivant la loi connue, serait égale à la pesanteur sur la terre même; ou si la pesanteur est de même nature que cette force, et si elle suffirait à une si grande distance, pour faire décrire à la lune son ellipse.

La première question est, quelle intensité la force centrale qui retient la lune dans son orbite, aurait à la surface de la terre, ou combien elle devrait accélérer les corps à une distance égale au demi-diamètre de la terre. L'espace, parcouru en une seconde autour d'un corps central dont la force accélératrice est P, celle de la pesanteur étant prise pour unité, est en général $gP = \frac{A^2 a}{2 b^2 r^2}$ (§. 27. (6)), en désignant par *a*, *b*, le grand et le petit demi axes de l'orbite elliptique, et par *r* une distance quelconque. En substituant $A^2 = n^2 a^2 b^2$ (§. 32. (13)), on aura $gP = \frac{n^2 a^3}{2 r^2}$. Si l'on nomme α le demi-diamètre de la terre, et qu'on fasse $a = \nu\alpha$, $r = \alpha$, l'accélération à la surface de la terre sera $gP = \frac{1}{2} n^2 \nu^3 \alpha$. Or le demi-diamètre de la terre est d'environ 3270000 toises, ou $\alpha = 20306761$ pieds rhinlandiques; la parallaxe moyenne de la lune (II. §. 190.), $\varpi = 57' 11''$ donne $\nu = \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\sin \varpi} = 60{,}121$; et le moyen mouvement de la lune pour une seconde est $n = 0'',549 = 0{,}0000026661627$: d'où il vient $gP = 15{,}631$; ce qui ne diffère de $g = 15{,}625$ que d'une demi-ligne. On a donc $gP = g$, $P = 1$, d'où il suit que la force centrale de la terre qui agit sur la lune, est identique avec la pesanteur. Le calcul précédent n'est pas rigoureux, mais assés exact, pour prouver l'identité de ces deux forces. Pour être rigoureux, il a besoin des corrections suivantes qui n'ont pas encore été expliquées: 1) La force centrale de la terre, qui produit l'orbite de la lune, ou son moyen mouvement *n*, que nous connaissons par observation, est diminuée par l'attraction du soleil de $\frac{1}{358}$, et augmentée par la masse de la lune de $\frac{1}{59}$; 2) La pesanteur *g* est diminuée par la rotation de la terre, et cette diminution qui est de $\frac{1}{288}$ sous l'équateur, dépend de l'élévation du pole; 3) en vertu de l'aplatissement de la terre, la pesanteur n'est pas partout proportionnelle à la masse de la terre, divisée par le carré de la distance au centre; 4) les valeurs de g, α, ϖ, devraient être réduites à la même élévation du pole. On peut trouver le même résultat par un procédé plus simple, mais moins exact. Soit (*Fig.* 3.). LMA l'orbite lunaire que nous supposons ici circulaire, parce qu'il ne s'agit que du mouvement moyen; soit T la terre, LM le moyen mouvement pour une minute, donc $LTM = 33''$. En faisant $\alpha = 20307000$, $\nu = 60$, on aura à peu près $LM = MN = \nu\alpha \sin 33'' = 194933$, et $LA =$

$2v\alpha$. Mais $MN^2 = LN.NA$, donc $LN = \frac{MN^2}{2v\alpha} = 15,6$ pieds. Pendant que la lune marche de L en M, la force centripète le détourne de la tangente en L de la ligne LN qui, par conséquent, est l'accélération en une minute et à la distance $TL = 60\,\alpha$. Or les espaces étant comme les carrés des tems dans lesquels ils sont parcourus, et les accélérations étant réciproques au carré de la distance, l'accélération en une seconde et à la distance α sera $gP = \frac{15,6.60.60}{60.60} = 15,6 = g$; donc $P = 1$, comme ci-dessus.

Si l'on renverse le problème, la théorie de l'attraction peut servir à déterminer la parallaxe de la lune avec une grande précision. En employant le demi-diamètre de l'équateur $\alpha = 3281012$ toises, et la chute des corps, qui aurait lieu sans la rotation de la terre, $g = 2174,95$ lignes d'un pied de France $= \frac{217495}{86400}$ toises, on trouvera $v = 59,939$; donc la parallaxe moyenne sous l'équateur $= 57' 21''$, ce qui est parfaitement conforme aux observations de Mayer.

On a fait l'objection, que la pesanteur ne s'étend peut-être pas à des distances aussi grandes que celle de la lune, et que par conséquent la lune est sollicitée par une autre force; ce qui nous conduit à la seconde manière de résoudre la question proposée. Comme il a été prouvé, que la pesanteur est suffisante pour retenir la lune dans son ellipse, si elle diminue suivant le rapport inverse du carré des distances; la question est, si la pesanteur suit effectivement cette loi, ou plutôt, si elle ne décroît pas dans un rapport plus grand que celui du carré des distances. Car il est aisé de voir que, si elle diminuait dans un rapport moins grand, l'effet de la pesanteur l'emporterait sur la force centrale, et la lune ne pourrait pas décrire l'ellipse que donnent les observations. Il faut donc recourir à des observations faites sur la terre même, pour déterminer le rapport dans lequel la pesanteur diminue à différentes hauteurs; et les oscillations du pendule offrent le seul moyen, qui soit assés exact pour décider cette question. Suivant les principes de la mécanique, la longueur du pendule à secondes est $a = \frac{2g}{\pi^2}$, d'où il suit $g = \frac{1}{2}a\pi^2$. En nommant b la longueur du pendule à secondes, sous la même latitude, mais à une plus grande élévation au-dessus de la surface de la terre, l'accélération de la pesanteur à cette hauteur sera

$h = \frac{1}{2} b \pi^2$, d'où l'on tire $g : h :: a : b$. Soit α le demi-diamètre de la terre, $\frac{\alpha}{n}$ l'élévation du second lieu d'observation; sa distance au centre de la terre sera $\frac{n+1}{n}\alpha$. En supposant donc que la pesanteur est réciproque au carré des distances, on aura

$$g : h :: (n+1)^2 : n^2 :: a : b.$$

Il est visible, que la hauteur doit être très-grande, pour donner un résultat sûr: ainsi les seules observations qui puissent décider la question, sont celles que les académiciens de Paris ont faites sur les Cordilléras. Bonguer trouva qu'à Quito, ville élevée de $\frac{\alpha}{2237}$ au-dessus de la mer, le pendule à secondes était de $\frac{1}{1331}$ plus courte qu'à la surface de la mer: on a donc $n = 2237$, et $a : b :: 1331 : 1330 :: g : h$, ce qui est fort approché de la proportion $(n+1)^2 : n^2 :: 1331 : 1329{,}811$. Sur le Pichincha il trouva $n = 1348$, et $a : b :: 845 : 844 :: g : h$, ce qui diffère peu de $(n+1)^2 : n^2 :: 845 : 844\frac{3}{4}$ (1). Dans les deux cas, h est un peu plus grand, qu'il ne devrait être suivant le rapport inverse du carré des distances: il est donc prouvé, que la pesanteur ne décroît pas dans un plus grand rapport, et que par conséquent, elle suffit pour effectuer le mouvement connu de la lune.

§ 40. Il est évident par ce qui précède, que la force qui retient la lune dans son orbite, est la même que celle que nous appelons *pesanteur* sur la terre, et qu'une pierre, ou un corps quelconque qui, dans la région de la lune, serait lancé suivant la même direction et avec la même vitesse, décrirait autour de la terre l'orbite lunaire. Il n'est pas moins certain, qu'il en est de même des autres corps célestes: chaque planète ou autre corps, placé à la surface du soleil, sera attiré par cet astre, et tombera sur lui suivant la même loi que nous observons dans la chute des corps sur la terre, ou, s'il est arrêté, exercera une pression vers le centre du soleil, qui sera déterminée ci-après. On doit dire la même chose de toutes les planètes qui sont entourées de satellites, et il est naturel d'étendre ces raisonnemens à celles qui n'ont point de satellites, d'autant plus que leur force attractive est prouvée par les perturbations qu'elles exercent sur les autres planètes. La lune même, le plus petit des corps célestes que nous connaissions, est

(1) *Figure de la Terre, par Bouguer. Sect. VII. pag. 357. suiv.*

doué d'une force attractive, dont les effets sont très-sensibles, tels que la nutation, les marées, etc. Les attractions mutuelles des satellites de Jupiter sont assés considérables, pour ne pas échapper à nos observations malgré la grande distance. De quel côté que nous regardions, nous trouvons des preuves, que l'attraction est une propriété commune à tout ce qui est matériel, et que les corps les plus éloignés s'attirent mutuellement, et qu'ils pèsent l'un sur l'autre. La plus forte preuve est la loi de *réaction*, dont il sera parlé plus bas.

Telle est la loi de la nature, connue sous le nom de *gravitation* universelle, qui fut découverte par Newton, et qui a donné une nouvelle forme à l'astronomie entière. D'après cette loi, le mouvement elliptique qui dépend de la force centrale du soleil seul, n'est plus le véritable mouvement des planètes, qui résulte au contraire de la composition des attractions du soleil et de toutes les planètes. Mais outre ces *perturbations* proprement dites, qui seront traitées particulièrement dans le cours de cet ouvrage, la gravitation universelle a encore une autre influence sur le mouvement de chaque planète, qui aurait lieu, quand même il n'existerait aucun corps outre cette planète et le soleil. Nous avons supposé jusqu'à présent, que les planètes sont des points matériels sans étendue, et qu'elles sont sollicitées par le soleil seul. Mais, la force attractive étant une propriété universelle de la plus petite molécule, le soleil attirera non-seulement le centre de la planète, mais chacun de ses élémens; d'un autre côté, la planète ne sera pas seulement attirée par le soleil, mais elle attirera le soleil de même. Il faut donc examiner, quels changemens la théorie de Kepler éprouve en vertu de ces deux conditions; et c'est l'objet des deux chapitres suivans (¹).

Avant d'entrer en matière, il sera bon d'extraire quelques passages de l'*introduction* de l'ouvrage de Kepler *de stella Martis*, qui prouvent que ce grand homme eut des idées fort justes sur la pesanteur universelle. „Si duo »lapides in aliquo loco mundi collocarentur, extra orbem virtutis tertii cor»poris: illi lapides ad similitudinem magneticorum corporum coirent loco in»termedio, quilibet accedens ad alterum tanto intervallo, quanta est alterius

(1) *Newt. Phil. Nat. Princ. Math. Lib. III. Prop. IV. V.*

» moles in comparatione" (c'est-à-dire ils coïncideraient dans leur *centre de* » *gravité*). „Si luna et terra non retinerentur vi aliqua, quaelibet in suo circu- » itu; terra ascenderet ad lunam 54ta parte intervalli, luna descenderet ad » terram 53 partibus intervalli: ibique jungerentur" (c'est-à-dire au centre commun de gravité: Kepler supposa donc avec une grande précision la masse de la lune égale à $\frac{1}{54}$ de celle de la terre, ou plutôt il substitua le rapport des volumes à celui des masses). — » Si terra cessaret attrahere ad se aquas » suas, aquae marinae omnes elevarentur, et in corpus lunae influerent. » Orbis virtutis *tractoriæ*, quae est in luna, porrigitur usque ad terram, et » prolectat aquas sub zonam torridam. — Unde sequitur, multo magis virtu- » tem *tractoriam* terrae porrigi in lunam et longe altius, ac proinde nihil eo- » rum quod ex terrena materia constat, inque altum subvehitur, complexum » hunc fortissimum virtutis *tractoriæ* unquam effugere". Il faut convenir que ce peu de lignes renferment toute la théorie de Newton.

CHAPITRE II.

Correction de la théorie de Kepler, due aux attractions proportionnelles aux masses.

§. 41. Pour qu'un corps *solide* soit mu, la force n'a pas besoin d'agir immédiatement sur chacune de ses parties; elle peut être appliquée à un seul point, et la cohésion des autres parties leur communiquera le même mouvement. Quand un seul point est sollicité par une force mouvante, tous les autres élémens du corps résisteront à son mouvement en vertu de leur inertie, et chacun de ces obstacles doit être surmonté par une partie de la force qui, par conséquent, se répandra sur le corps entier; et le mouvement ne peut avoir lieu, que lorsque tous les élémens sont également accélérés. Il en résulte, que l'accélération du mobile et de chacune de ses parties sera d'autant moindre, que la masse, ou le nombre des élémens parmi lesquels la force doit être distribuée, est plus grand: donc l'accélération d'une force qui n'agit pas immédiatement sur le corps entier, mais sur une certaine partie, est réciproque à la masse mise en mouvement (§. 5.). Or la force *motrice*, ou la pression du mobile étant proportionnelle au produit de la vitesse et de la masse (§. 9.), la pression ou la quantité du mouvement sera, dans un pareil cas, indépendante de la masse, et d'une grandeur constante, quelle que soit la masse du mobile. Mais une pareille force ne peut agir indifféremment sur toute matière; et si à l'origine du mouvement, une partie du corps, qui n'est pas attaquée immédiatement par la force, en est séparée, elle demeurera en repos; ou si le corps est fluide, la partie sur laquelle la force agit immédiatement, se mettra seule en mouvement, en se séparant des autres qui resteront en repos.

L'inversion de ces raisonnemens est également admissible. Une force, dans laquelle nous apercevons le contraire de tous les phénomènes précédens, doit agir sur chaque élément des corps avec la même force, et doit être appliquée immédiatement à chaque molécule; et c'est le cas de la pesanteur. La cohésion n'a aucune influence sur la chute des corps solides: deux balles de plomb tombent avec la même vitesse, que lorsqu'elles sont fondues ensemble; une masse d'or ou de plomb, etc. deux ou dix fois plus grande est accélérée précisément comme la masse simple; et tous les corps en général, quelle que soit leur grandeur ou leur pesanteur, tombent avec même vitesse; dont il est aisé de s'assurer par l'expérience, non-seulement dans le *vacuum*, mais partout, en tenant compte de la résistance de l'air. L'accélération de la pesanteur n'est donc pas en raison inverse des masses, mais elle est la même pour toutes les masses. Il s'en suit, que la quantité motrice de la pesanteur, la pression ou le poids des corps graves doit être proportionnel à la masse, ce qui est également confirmé par l'expérience. Une livre de plomb pèse également sur la balance, quel que soit le nombre des morceaux en lesquels on l'a coupée. Le poids des corps qui sont composées d'une matière uniforme, ainsi que l'or, est exactement proportionnel à leur grandeur, et par conséquent à leur masse. Enfin la pesanteur agit indifféremment sur tous les corps, et nous ne connaissons aucune matière sans pesanteur: les globules des vapeurs les plus subtiles n'en sont pas exceptées, et les fluides sont soumis à la loi de la pesanteur aussi bien que les corps solides. Puis donc que tous les élémens des corps sont également accélérés par la pesanteur, la pression ou le poids de chaque corps est nécessairement la somme des pressions de tous ses élémens, et par conséquent proportionnelle à leur nombre ou à la masse du corps. La force accélératrice de la pesanteur est donc la même pour tous les corps, tandis que la force motrice ou la pression est proportionnelle à la masse.

Ce résultat est confirmé par les expériences faites par Newton. Deux pendules de même longueur, auxquels sont attachés deux poids égaux de différentes gravités spécifiques, par ex. de plomb et de bois, font les mêmes oscillations dans le *vacuum*, ou étant enfermés dans des boîtes égales et semblables,

ensorte qu'ils éprouvent la même résistance de l'air. L'égalité des poids prouve que la force motrice, ou le produit des vitesses C, *c*, par les masses M, *m*, est le même, $CM = cm$; les vibrations de même durée prouvent que les accélérations ou les vitesses sont aussi égales, $C = c$; d'où il suit $M = m$: les masses sont égales, si les poids sont les mêmes, malgré l'hétérogénéité des matières; donc les poids sont proportionnels aux masses (1).

Il en sera de même des attractions ou des forces centrales des corps célestes, lesquelles ne sont autre chose que la pesanteur agissant à une plus grande distance (§. 39.). La force centrale du soleil agit indifféremment sur tous les corps, grands ou petits, plus ou moins denses, sur la lune précisément comme sur Mercure ou Jupiter, en communiquant à tous la même vitesse, à proportion de leurs distances: la pression de la masse entière est donc la somme des pressions de tous ses élémens. Si le soleil ou Jupiter accélérait une partie de la masse plus que l'autre, les différentes parties n'auraient pas le même mouvement, d'où il résulterait des séparations, ou des irrégularités dans la figure sphérique et dans le mouvement. Il suit de la loi de la force centrale du soleil, que la terre, étant transportée dans la région de Jupiter, ferait une révolution en douze ans à peu près. Si donc la masse de Jupiter, qui est beaucoup plus grande que celle de la terre, n'était accélérée exactement comme la terre, Jupiter ne pourrait pas avoir la même période de douze ans; et la troisième loi de Kepler ne pourrait avoir lieu que relativement aux mêmes masses. Or puisqu'elle a lieu pour tous les corps célestes, dont les masses sont sans doute fort différentes l'une de l'autre, il s'en suit que les forces centrales des corps célestes accélèrent également tous les corps, que par conséquent la quantité motrice de ces forces est proportionnelle aux masses des mobiles.

On verra dans le cours de cet ouvrage, que cette vérité est confirmée par une foule d'observations astronomiques. La précession des équinoxes, la nutation de l'axe de la terre, l'aplatissement des planètes, etc. ont été calculés suivant une théorie qui est fondée sur cette hypothèse, dont la vérité est prouvée par l'accord qui se trouve entre elle et les observations. Si

(1) *Newt. Phil. Nat. Princ. Math. Lib. III. Prop. VI.*

on calcule par ex. l'aplatissement de la terre, en supposant que la pesanteur est dirigée vers le centre seul, on trouvera le rapport des axes comme 578 à 577, et pour Jupiter on trouvera 24 à 23 (Voy §. 121.). Mais en prenant pour base l'hypothèse précédente, que chaque molécule a une force attractive, on trouvera les rapports 230 à 229 et 10 à 9, ce qui est plus conforme aux observations (II. §. 167.).

§. 41. Si l'on suppose, conformément à ce qui précède, que tous les corps gravitent l'un vers l'autre, ou ce qui revient au même, que l'attraction est une propriété commune aux plus petites molécules, (§. 40.), il s'en suit de la même manière, que l'attraction qu'exerce un corps sur tous les autres, est la somme des attractions de tous les élémens dont il est composé, ou ce qui revient au même, que la quantité absolue de la force centrale de chaque corps est proportionnelle à sa masse. Il en résulte un nouveau lien qui réunit l'univers. La force centrale du soleil n'est pas seulement semblable à la pesanteur sur la terre, en suivant les mêmes lois, mais elle est identique avec la pesanteur, elle est absolument la même force, et de la même intensité. Deux molécules dont les masses sont égales, ont exactement la même force attractive sur le soleil et sur la terre, et la différence entre les attractions des corps célestes ne dépend pas de la qualité, mais uniquement de la quantité de la matière dont ils sont composés. Ainsi l'univers est un ouvrage exécuté d'après un seul plan. En connaissant la force attractive de deux corps célestes à égale distance, on connaît en même tems le rapport de leurs masses. La première ne peut être connue que par l'accélération qu'ils communiquent à d'autres corps, c'est-à-dire par la chute des corps à leur surface, par les orbites que d'autres corps célestes décrivent autour d'eux, ou enfin par des effets quelconques de leur attraction. La chute des corps ne peut être observée que sur la terre, d'où il suit que nous pourrions comparer la masse de la terre avec celles d'autres corps célestes, quand même elle n'aurait point de lune; le second moyen ne peut être employé que relativement au soleil et aux planètes qui sont entourées de satellites; le troisième peut être appliqué aux perturbations que les planètes exercent l'une sur l'autre, et qui ont servi à déterminer les masses de la plupart des

planètes, et même celles des satellites de Jupiter, mais principalement la masse de la lune par son influence sur les marées, la nutation, etc.

En nommant donc la masse du corps central, par ex. du soleil, S, celle du corps attiré, par ex. de la terre, M, la distance de l'un à l'autre, r, la quantité *absolue* de la force centrale du soleil pourra être exprimée par S, la quantité *accélératrice* par $\frac{S}{r^2}$, et la quantité *motrice* ou la pression de la terre vers le soleil par $\frac{SM}{r^2}$ (§. 10.), S devant être exprimé en parties de la masse terrestre, si la pesanteur sur la terre est prise pour unité de forces.

§. 43. Puisque la force attractive est une propriété générale des corps, et proportionnelle à la masse, le soleil sera aussi attiré par la terre et les autres planètes, avec une force dont l'intensité est proportionnelle à leurs masses. Relativement à cette attraction, la force absolue de la planète est $= M$, la force accélératrice $= \frac{M}{r^2}$, et la pression du soleil vers la planète $= \frac{MS}{r^2}$, donc égale à la pression de la planète vers le soleil (§. 42.). C'est le théorème connu, que *la réaction est constamment égale et opposée à l'action*, qui est généralement adopté comme l'un des premiers principes des lois du mouvement, dans la métaphysique même ([1]). Un corps ne peut tirer ou pousser un autre corps, qu'en tant que celui-ci résiste, et il ne pourrait pas du tout agir sur un corps pénétrable, ou qui ne lui opposerait aucune résistance. La main, en poussant ou tirant un corps, éprouve une égale pression ou attraction, et nous mesurons la force avec laquelle nous agissons sur un corps, par l'action qu'il exerce sur nous suivant la direction opposée. C'est sur ce principe que se fonde toute la théorie de la percussion des corps. Il est vrai que dans les machines, l'action de tirer et la réaction ne se transmettent qu'au moyen d'une corde; mais le résultat doit être le même, si l'attraction se fait, sans que le lien qui joint les deux corps soit visible: si la réaction nous paraît alors inconcevable, il faut considérer que nous ne voyons pas non plus la corde, au moyen de laquelle se fait l'attraction même. En vertu de la loi d'inertie, le corps attiré résiste constamment à proportion de sa masse, parce que chaque élément est inerte. Cette résis-

(1) *Neut. Phil. Nat. Princ. Math. Lib. I. Lex III.*

tance est opposée à l'attraction, elle est donc aussi une attraction. Supposons que le corps attiré approche du corps central, jusqu'à ce qu'il soit en contact avec lui. Si la réaction n'était pas exactement égale à l'action, les deux corps prendraient, au moment du contact, un commun mouvement suivant la direction de la pression qui l'emporte sur l'autre. La terre devrait avoir un mouvement rectiligne d'un côté ou de l'autre, en vertu de l'attraction seule qu'elle exerce sur les corps graves, si elle n'éprouvait une réaction de ces corps, égale à la sienne. Chaque corps serait mis en mouvement par sa propre force centrale, ainsi qu'un homme tombe à la renverse, quand la corde par laquelle il tire un corps se rompt, et que par conséquent la résistance du corps attiré cesse brusquement.

Lorsqu'un corps communique à un autre une certaine quantité de mouvement, il doit nécessairement perdre la même quantité, de même qu'un vase ne peut se remplir, sans vider un autre vase. Supposons qu'un corps A agisse sur un autre B qui est en repos, avec la force $+V$, le signe $+$ indiquant la direction. Or le repos peut être envisagé comme le résultat de deux forces égales et directement opposées l'une à l'autre: on peut donc concevoir le corps B sollicité par deux forces $+V$ et $-V$. Mais il ne reste après l'action que la force $+V$: ainsi l'action de A se réduit à détruire la force $-V$, ou à lui résister: donc B agit sur A avec la force $-V$; la réaction est égale et contraire à l'action.

Nous en tirerons une conclusion très-importante. Nommons m°, m', m'', etc. les masses des corps d'un système, qui s'attirent mutuellement en raison de leurs masses et d'une fonction quelconque f de leurs distances; nommons de plus ${}^{\circ}r'$, ${}^{\circ}r''$, etc. les distances des corps m', m'', etc. au corps m°; ${}'r^{\circ}$, ${}'r''$, etc. celles de m°, m'', etc. à m', et ainsi de suite; x°, y°, z°, les trois coordonnées de m° relativement à un point fixe J; x', y', z', celles de m', etc. Cela posé, les forces accélératrices qui tirent m° vers m' et vers m'', seront $m'.f({}^{\circ}r')$ et $m''.f({}^{\circ}r'')$; et les mêmes forces, décomposées suivant x, et dirigées vers J, seront $m'.f({}^{\circ}r')\frac{x^{\circ}-x'}{{}^{\circ}r'}$, $m''.f({}^{\circ}r'')\frac{x^{\circ}-x''}{{}^{\circ}r''}$, etc. En nommant donc p°, p', p'', etc. les forces motrices ou les pressions vers J et suivant x, qu'éprouvent les corps m°, m', m'', etc. on aura

$$p^\circ = m^\circ m'.f({}^\circ r')\frac{x^\circ - x'}{{}^\circ r'} + m^\circ m''.f({}^\circ r'')\frac{x^\circ - x''}{{}^\circ r''} + \text{cet.} = {}^\circ P' + {}^\circ P'' + \text{cet.}$$

$$p' = m' m^\circ.f({}'r^\circ)\frac{x' - x^\circ}{{}'r^\circ} + m' m''.f({}'r'')\frac{x' - x''}{{}'r''} + \text{cet.} = {}'P^\circ + {}'P'' + \text{cet.}$$

$$p'' = m'' m^\circ.f({}''r^\circ)\frac{x'' - x^\circ}{{}''r^\circ} + m'' m'.f({}''r')\frac{x'' - x'}{{}''r'} + \text{cet.} = {}''P^\circ + {}''P' + \text{cet.}$$

Or ${}^\circ r' = {}'r^\circ$, ${}^\circ r'' = {}''r^\circ$, ${}'r'' = {}''r'$, etc. donc ${}'P^\circ = -{}^\circ P'$, ${}''P^\circ = -{}^\circ P''$, ${}''P' = -{}'P''$, etc. d'où il suit $p^\circ + p' + p'' + \text{cet.} = 0$. Il en est de même des forces suivant y et z, d'où il résulte qu'en vertu de la réaction, la somme des pressions de tous les élémens d'un système, suivant une direction quelconque, est nulle, en tant qu'on ne considère que l'action mutuelle des élémens du système, en faisant abstraction des forces étrangères; c'est-à-dire, quel que soit le nombre des corps ou des élémens qui composent le système, la pression de chacun de ces corps éprouve, en vertu de la réaction, une pression contraire qui la détruit.

Le principe de la réaction est de la plus haute importance dans l'astronomie physique, et la proposition du §. précédent en est une suite nécessaire. En nommant S, M, les masses de deux corps qui s'attirent réciproquement, C, c, les vitesses ou accélérations que l'un communique à l'autre, A, B, l'intensité de leurs forces, r leur distance; on aura en vertu de la réaction, $SC = Mc$, ou $C : c :: M : S$, et suivant la loi des forces centrales, $C = \frac{B}{r^2}$, $c = \frac{A}{r^2}$, donc $C : c :: B : A :: M : S$, d'où il suit que l'intensité des forces est comme les masses, et que les vitesses sont en raison inverse des masses. Il résulte de la dernière proportion, que deux corps isolés dans l'espace, qui n'ont été sollicités par un choc qui leur ferait décrire des ellipses, s'approcheront l'un de l'autre suivant la droite qui les joint, et se rencontreront dans le centre de leur gravité (§. 40.). Voyons maintenant ce qui en résulte pour le mouvement des corps célestes.

§. 44. Suivant la théorie de Kepler on ne considère que les centres du soleil et des planètes, et l'objet de l'astronomie, en faisant abstraction de la rotation, est le mouvement du centre de chaque planète. Mais nous venons de voir, que tous les élémens d'une planète sont attirés par chaque élément du soleil en raison inverse du carré de la distance. Il faut donc examiner, si le mouvement elliptique n'est pas troublé par la grandeur et

la figure du soleil et des planètes, c'est-à-dire, si la résultante de toutes ces attractions élémentaires passe par les centres du soleil et de la planète, et si elle est réciproque au carré de la distance. Il est aisé de voir, que la solution de ce problème dépend non-seulement de la figure des deux corps, mais aussi de l'uniformité ou de la loi de leurs densités; et l'on peut imaginer une infinité de cas, où les corps célestes sont tellement formés, que malgré la loi de l'attraction, découverte par Newton, leurs orbites ne seront pas conformes aux loïs de Kepler. La figure de tous les corps célestes que nous connaissons, est à très-peu près *sphérique;* mais il n'est pas en notre pouvoir de faire des recherches sur la distribution de la masse dans chaque sphère. Nous sommes donc réduits à adopter l'hypothèse la plus simple, que le soleil et les planètes sont des sphères d'une densité uniforme, ou dont la densité croît ou décroît suivant une loi quelconque, de sorte que, dans toute l'étendue de la sphère, elle est une même fonction de la distance au centre. En réfléchissaut sur ce qui devait arriver aux corps célestes, dans le tems où la pesanteur de tous leurs élémens leur donna une figure sphérique, on se convaincra aisément, qu'en général la densité doit dépendre de la distance au centre, malgré les exceptions qui auront sans doute lieu.

§. 45. D'après le principe de la gravitation universelle, chaque point matériel M est attiré par un autre N, dont la distance est r, avec la force accélératrice $\frac{N}{r^2}$; en même tems le corps M communique à N l'accélération $\frac{M}{r^2}$, et ces deux vitesses sont l'une à l'autre comme N à M. Si le corps attirant est d'une densité uniforme, la masse et la force accélératrice de chaque élément sera proportionnelle à son volume.

Soit (*Fig.* 4.) AMDN une couche sphérique d'une densité δ et d'une épaisseur infiniment petite ε; et P un élément materiel qui est attiré par chaque point de la couche en raison inverse du carré de la distance. Supposons que la droite PC qui joint le point P et le centre C de la couche, la rencontre en A et D, et que le cercle MN soit l'intersection de la couche avec un plan perpendiculaire à l'axe PD en B: cela posé, tous les points du cercle MN, et d'un autre mn qui lui est parallèle, auront la même distance à

leurs centres B, b, et au pole P. En nommant V l'attraction du segment entier MAN sur P, celle de la zone infiniment petite Mn sera $= \partial V$. Chaque élément Mm de cette zone attirera P suivant PM, avec une force proportionnelle à $\frac{Mm \,.\, \delta\varepsilon}{PM^2}$, qui pourra être décomposée suivant PB et BM: la dernière force étant détruite par celle de l'élément opposé Nn suivant BN, P ne sera attiré par chaque élément de la zone Mn que vers le centre B ou C, avec une force ∂u qui sera à celle suivant PM, $\frac{Mm \,.\, \delta\varepsilon}{PM^2}$, comme PB est à PM; on a donc $\partial u = \frac{Mm \,.\, PB \,.\, \delta\varepsilon}{PM^3}$, dont l'intégrale est $\partial V = \frac{Mn \,.\, PB \,.\, \delta\varepsilon}{PM^3}$. Mais l'aire de la zone Mn est $2\pi \,.\, CD \,.\, Bb$, donc $\partial V = \frac{2\pi \,.\, CD \,.\, Bb \,.\, PB \,.\, \delta\varepsilon}{PM^3}$. Si l'on fait $CD = CA = a$, $CP = r$; $AB = x$; on aura $Bb = \partial x$, $PB = r - a + x$, $BM^2 = x(2a - x)$, et $PM = \sqrt{\{(r-a)^2 + 2rx\}}$, donc

$$\partial V = \frac{2\pi\delta\varepsilon a (r - a + x)\partial x}{\{(r-a)^2 + 2rx\}^{\frac{3}{2}}}.$$

En faisant $PM = z$ ou $(r-a)^2 + 2rx = z^2$, il viendra $r - a + x = \frac{r^2 - a^2 + z^2}{2r}$, $\partial x = \frac{z\partial z}{r}$, et

$$\partial V = \frac{\pi\delta\varepsilon a (r^2 - a^2 + z^2)\partial z}{r^2 z^2},$$

dont l'intégrale est $V = \frac{\pi\delta\varepsilon a}{r^2}\left(z - \frac{r^2 - a^2}{z} + C\right)$. Pour que cela soit l'attraction du segment MAN, la constante C doit être déterminée ensorte que l'intégrale soit nulle, si $x = 0$ ou $z = r - a$, d'où il vient $C = 2a$, et

$$V = \frac{2\pi\delta\varepsilon a}{r^2}\left(\frac{a^2 + r(x - a)}{z} + a\right).$$

Pour avoir l'attraction de la couche entière AMDN, il faut faire $x = AD = 2a$, d'où il viendra $z = r + a$, et

$$V = \frac{4\pi\delta\varepsilon a^2}{r^2}.$$

Si l'on nomme S le volume de la couche, et δ sa densité, S sera $4\pi a^2 \varepsilon$, et

$$V = \frac{S\delta}{r^2};$$

d'où il suit que chaque point materiel P est attiré par une couche sphérique vers le centre seul, avec une force dont l'accélération est en raison directe de la masse de la couche, et en raison inverse du carré de la distance de P au centre de la couche; précisément comme si toute la masse attractrice était réunie au centre.

Si P est aussi une couche sphérique, chacun de ses élémens sera attiré par la couche AD de la même manière, dont il le serait, si toute la masse AD était réunie en C; et l'effet doit être le même, si chaque élément de P attire la masse réunie en C suivant la même loi, parce qu'en vertu de la réaction, ces deux attractions ne diffèrent l'une de l'autre qu'à l'égard de la direction. Mais alors on a le cas que nous venons de considérer: l'attraction se fera exactement, comme si la masse entière P était réunie au centre de la couche P. Il en résulte en général, que deux couches sphériques d'une densité uniforme s'attirent réciproquement avec des forces, dont la résultante passe par les deux centres, et dont les accélérations sont en raison directe des masses, et en raison inverse du carré de la distance; comme si chacune des deux masses était réunie dans son centre.

§. 46. Soit AD (*Fig.* 5.) une sphère d'une densité uniforme δ, PD la droite qui joint le point attiré P et le centre C, BE, *be*, deux sphères décrites du centre C, leur différence infiniment petite $BE - be = S$. En faisant $CA = a$, $CP = r$, $Cb = x$, $Bb = \partial x$, S sera la différentielle de la sphère *be*, le point P sera attiré par la couche S vers le centre C seul, et son accélération sera $= \frac{S\delta}{r^2}$ (§. 45.). En substituant $S = 4\pi x^2 \partial x$ (§. 45.), et intégrant, on aura l'attraction de la sphère $BE = \frac{4\pi\delta x^3}{3r^2}$, et en faisant $x = a$, l'attraction de la sphère AD,

$$V = \frac{4\pi\delta a^3}{3r^2}.$$

Le volume de la sphère est $\Sigma = \frac{4}{3}\pi a^3$, d'où il vient

$$V = \frac{\Sigma\delta}{r^2}.$$

Il suit des raisonnemens précédens (§. 45.), qu'il en est de même, si P est une sphère de la densité δ'. Deux sphères uniformes s'attireront réciproquement de la même manière, dont elles le feraient, si chaque masse était réunie dans son centre: les accélérations seront en raison directe de la massse attractrice et en raison inverse du carré de la distance; et la résultante de toutes les attractions sera dirigée vers le centre de la masse attractrice. Les vitesses communiquées aux deux sphères S et Σ seront entre elles comme Σ et S, elles approcheront l'une de l'autre avec la vitesse $\frac{\Sigma + S}{r^2}$, la pression de chaque sphère vers le centre de l'autre sera $\frac{\Sigma S}{r^2}$, et la quantité du mouvement entier $\frac{2\Sigma S}{r^2}$.

§. 47. Si la densité de chaque sphère est la même fonction de la distance au centre dans toute l'étendue de la sphère, on peut concevoir les sphères A, B, partagées en couches sphériques infiniment minces, dont chacune aura une densité uniforme qui est fonction du rayon, et par conséquent attirera les couches de l'autre sphère avec une force $\frac{S}{r^2}$, dirigée vers le centre (§. 45.), S étant la masse de la couche attractrice, et r la distance des deux centres. Comme la distance des couches à leur centre n'entre pas dans cette expression, on aura, en nommant S', S'', etc. les masses des différentes couches, la force totale qui attire B vers le centre de A, $= \frac{S+S'+S''+\text{cet.}}{r^2}$; $S + S' +$ cet. étant la masse totale de la sphère A, qui est trouvée par l'intégration, la densité étant donnée en fonction de la distance au centre. Il est aisé de voir que la somme de la série $S + S' +$ cet. sera le volume de la sphère A, multiplié par un nombre qui exprime la densité moyenne, et qui est déterminé par la loi, suivant laquelle la densité dépend de la distance du centre. Comme il en est de même de la sphère B, il en suit, que chaque sphère A attire une autre B avec la force $\frac{A}{r^2}$, dirigée vers son centre, exactement comme si les masses étaient réunies au centre. La vîtesse avec laquelle les sphères approcheront l'une de l'autre, sera $\frac{A+B}{r^2}$, et la quantité du mouvement entier $\frac{2AB}{r^2}$ (1).

En supposant donc, que la figure du soleil et des planètes est sphérique, et que la densité de chaque couche est une fonction du rayon, il a été prouvé, que le mouvement sera tel qu'il serait, si les centres seuls s'attiraient réciproquement; le centre de chaque planète décrira, suivant les lois de Kepler, une section conique dont le foyer est le centre du soleil; et dans toutes les recherches suivantes on n'a à considérer que les centres, et les masses réunies dans ces centres: la première question (§. 40.) a donc été décidée. On pourrait demander, si la densité irrégulière des corps célestes, et leur figure non-sphérique, ne dérangent pas le mouvement elliptique; mais cette question ne peut pas être décidée par la théorie, parce que nous ne connaissons pas la loi de leur dénsité. Il est possible que quelques irrégularités qu'on a observées dans le mouvement, et que la théorie de l'at-

(1) *Neut. Phil. Nat. Princ. Math. Lib. I. Sect. XII. et Lib. III. Prop. XLVII. XLVIII.*

traction n'explique pas entièrement, en sont l'effet; mais ces perturbations doivent être très-petites, et celles qui dépendent de la densité, ne pourront être déterminées qu'empiriquement ([1]). Au reste, M. de Laplace a tenu compte des irrégularités lunaires, dues à la non-sphéricité, et il les a trouvées peu sensibles ([2]).

§. 48. On peut être curieux de savoir, si la propriété remarquable des sphères, d'agir sur tous les corps, comme si leurs masses étaient réunies à leurs centres, peut avoir lieu dans d'autres loix, où l'attraction est représentée par une fonction quelconque de la distance $PM = z$ (*Fig.* 4.), que nous désignerons par $\Phi(z)$. On a vu (§. 45.) que l'attraction suivant PM est $2\pi\delta\varepsilon . CD . Bb . \Phi(z)$, d'où il résulte l'attraction vers le centre $\frac{2\pi\delta\varepsilon . CD . Bb . PB}{PM}\,\Phi(z)$, donc

$$\partial V = 2\pi\delta\varepsilon a \partial x \frac{r-a+x}{z}\,\Phi(z).$$

Si l'on différentie $z^2 = (r-a)^2 + 2rx$ par rapport à r, on trouvera $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) = \frac{r-a+x}{z}$: en substituant cette valeur et $\partial x = \frac{z\,\partial z}{r}$ (§. 45.), il viendra

$$\partial V = 2\pi\delta\varepsilon a \frac{z}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\Phi(z)\,\partial z.$$

Mais on a $\frac{z}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) = \frac{r-a+x}{r} = \frac{r^2-a^2+z^2}{2r^2}$ (§. 45.), donc

$$\frac{r^2\partial V}{\pi\delta\varepsilon a} = (r^2-a^2+z^2)\,\Phi(z)\,\partial z,$$

d'où l'on tirera, en intégrant et faisant $\int\Phi(z)\,\partial z = f(z)$,

$$\frac{r^2 V}{\pi\delta\varepsilon a} = (r^2-a^2+z^2)f(z) - 2\int z\,\partial z . f(z).$$

Si l'on fait $\int z\,\partial z . f(z) = \psi(z)$, il viendra

$$\frac{r^2 V}{\pi\delta\varepsilon a} = 2rz\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)f(z) - 2\psi(z) = 2r\left(\frac{\partial . \psi(z)}{\partial r}\right) - 2\psi(z) = 2r^2\left(\frac{\partial . \frac{\psi(z)}{r}}{\partial r}\right); \text{ donc}$$

$$(1) \ldots\ldots V = 2\pi\delta\varepsilon a\left(\frac{\partial . \frac{\psi(z)}{r}}{\partial r}\right).$$

L'intégrale doit être prise depuis $z = PA = r-a$ jusqu'à $z = PD = r+a$, d'où il suit

---

(1) Voy. le mémoire de L. Euler, *de perturb. motus Planet. etc.* dans les *Nov. Comment. Ac. Sc. Imp. Petrop. Tom. III.*

(2) *Mécan. cel. Tom. III. L. VII. Ch. II.*

$$(2) \ldots\ldots V = 2\pi\delta\varepsilon a \left\{ \frac{\partial . \frac{\psi(r+a)}{r}}{\partial r} - \frac{\partial . \frac{\psi(r-a)}{r}}{\partial r} \right\},$$

ce qui, par hypothèse, doit être égal à l'attraction de la masse $4\pi\delta\varepsilon a^2$, réunie au centre, ou à $4\pi\delta\varepsilon a^2 . \phi(r)$. On aura donc

$$(3) \ldots\ldots \partial \frac{\psi(r+a)}{r} - \partial \frac{\psi(r-a)}{r} = 2a . \phi(r)\, \partial r.$$

En intégrant par rapport à r, et faisant pour abréger, $\psi(r+a) = \varrho$, $\psi(r-a) = \sigma$, $\varrho - \sigma = R$, l'équation (3) se transformera en

$$(4) \ldots\ldots R = 2ar\int \phi(r)\, \partial r + rC,$$

C étant une fonction de a. Si on différentie deux fois par rapport à r et a, on trouvera $\left(\frac{\partial\partial R}{\partial r^2}\right) = 4a . \phi(r) + 2ar\left(\frac{\partial . \phi(r)}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial\partial R}{\partial a^2}\right) = r\left(\frac{\partial\partial C}{\partial a^2}\right)$. Mais on a $\left(\frac{\partial\varrho}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial\varrho}{\partial a}\right)$, $\left(\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right) = -\left(\frac{\partial\sigma}{\partial a}\right)$, $\left(\frac{\partial\partial\varrho}{\partial r^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\varrho}{\partial a^2}\right)$, $\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial r^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial a^2}\right)$, donc $\left(\frac{\partial\partial R}{\partial r^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial R}{\partial a^2}\right)$, c'est-à-dire,

$$(5) \ldots\ldots \frac{2}{r}\phi(r) + \left(\frac{\partial . \phi(r)}{\partial r}\right) = \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial\partial C}{\partial a^2}\right);$$

d'où il suit que le premier membre est une fonction de a seul. Si l'on désigne cette fonction par A, on aura, en multipliant l'équation (5) par $r^2\partial r$, $2\phi(r) . r\partial r + r^2\partial . \phi(r) = Ar^2\partial r$, dont l'intégrale est $r^2 . \phi(r) = \frac{A}{3}r^3 + B$, ou la fonction cherchée

$$(6) \ldots\ldots \phi(r) = \frac{A}{3}r + \frac{B}{r^2}.$$

Le terme $\frac{A}{3}r$ donnerait une attraction, croissante à l'infini avec la distance, ce qui est absurde. Il faut donc faire $A = 0$, et alors l'équation $\phi(r) = \frac{B}{r^2}$ donne la loi de la nature; d'où il résulte que dans le nombre infini des lois, suivant lesquelles l'attraction devient insensible à de grandes distances, la raison inverse du carré de la distance est la seule, dans laquelle les sphères agissent, comme si leurs masses étaient réunies à leurs centres.

C'est encore la seule loi, dans laquelle un corps placé au-dedans d'une couche sphérique est également attiré de toutes parts, et reste par conséquent en repos ou en équilibre. Pour appliquer les formules précédentes à ce cas d'un corps intérieur, on n'a qu'à supposer r plus petit que a, ce qui ne

change rien dans l'expression (1) de V. Or V devant être nul, par hypothèse, on a $\left(\frac{\partial \cdot \frac{\psi(z)}{r}}{\partial r}\right) = 0$, et en intégrant par rapport à r, $\psi(z) = Ar$, dont la différentielle seconde donnera $\frac{\partial \partial . \psi(z)}{\partial z^2} = 0$, puisque r est constant. Mais on a $\frac{\partial . \psi(z)}{\partial z} = z . f(z)$, $\frac{\partial \partial . \psi(z)}{\partial z^2} = f(z) + z \frac{\partial . f(z)}{\partial z} = 0$, dont la différentielle donnera, en substituant $\partial . f(z) = \phi(z) \partial z$,

$$0 = 2 \phi(z) \partial z + z \partial . \phi(z).$$

Si on l'intègre, après l'avoir multiplié par z, il viendra

$$z^2 . \phi(z) = B, \text{ ou } \phi(z) = \frac{B}{z^2},$$

ce qui est la loi de la nature.

On voit donc que, sous tous les rapports, la loi de la nature est la plus vraisemblable, et la seule qui soit conforme à nos capacités et au sens commun (§. 31.).

CHAPITRE III.

Correction de la théorie de Kepler, due à la réaction.

§. 49. La seconde question (§. 40), concernant les changemens que le mouvement planétaire éprouve en vertu de la réaction des planètes sur le soleil, admet une solution plus directe que la première. On a vu dans le Chapitre précédent, qu'on n'a à considérer que les centres du soleil et des planètes, s'attirant réciproquement en raison directe des masses entières, et en raison inverse du carré de la distance. Le rapport des masses rappelle naturellement le *centre de gravité*, ou le point à l'égard duquel les momena statiques des deux masses sont égaux; et si l'on ne considère que deux corps qui s'attirent mutuellement, le résultat est, que le mouvement de l'un et de l'autre est une section conique autour du commun centre de gravité, suivant les lois de Kepler; de sorte que cette théorie n'a pas besoin d'autre correction, que de prendre le centre de gravité du soleil et de la planète, au lieu du centre du soleil, pour le siège de la force centrale, et d'attribuer au soleil même un mouvement semblable autour du centre de gravité, en vertu de la réaction de chaque planète. Mais on doit faire ici encore une autre observation.

Le système solaire est composé de diverses parties, dont quelques-unes forment des systèmes particuliers de plusieurs corps, ainsi que Jupiter avec ses satellites. Il a été prouvé dans le chapitre precédent, que le soleil agit sur chacun de ces corps, comme si sa masse était réunie à son centre; mais il se présente ici une autre question: on peut demander, si l'action du soleil sur les divers corps qui forment un système, ne dérangera pas l'ordre et l'organisation intérieure de ce système, en empêchant les corps de décrire des

ellipses autour du corps central de leur système. Le résultat de ces recherches est, qu'en vertu de l'arrangement qui a actuellement lieu dans le système solaire, ce n'est pas le cas; que tous les corps, appartenans au même système, se meuvent autour du centre de gravité de ce système suivant les lois de Kepler; et que le système entier exerce une réaction sur le soleil, comme si toutes les masses étaient réunies au centre de gravité du système. Nous verrons à la vérité, que ce n'est pas exactement le cas, et que la proposition précédente est sujette à quelques anomalies, d'où résultent les petites irrégularités, connues sous le nom de perturbations, qui seront traitées particulièrement dans le V. Livre. Dans le chapitre présent il ne sera développé que ce qui a lieu, si l'on fait abstraction des perturbations, et que l'on peut regarder comme la première approximation de la mécanique du ciel: cette approximation est trouvée, en ne tenant compte que de la première puissance des quantités très-petites du premier ordre, et nous appellerons perturbations, toutes les irrégularités qui dépendent des puissances plus élevées. Au reste il est aisé de voir, que ce que nous allons prouver du centre de gravité d'un système de corps, sera également vrai des divers corps en particulier, parce qu'on peut regarder chaque corps comme le centre de gravité ou le système de toutes ses molécules.

§. 50. Toute cette théorie est donc fondée sur la nature du *centre de gravité*, et sur l'idée que nous devons nous former d'un *système* de plusieurs corps. Tous les corps qui agissent l'un sur l'autre, forment par là même un *système* qui, par conséquent, n'est composé que de corps qui, n'étant sollicités par aucune force étrangère, n'éprouvent que les actions intérieures et réciproques de toutes les masses du système. On voit donc qu'en vertu de la gravitation universelle, et de l'étendue infinie de l'attraction de chaque corps, il n'y a à la rigueur qu'un seul système qui est l'univers même, et que par conséquent le terme *système* n'est qu'une approximation: nous comprenons dans un même système tous les corps qui sont si près l'un de l'autre, que leur distance est une quantité très-petite ou du second ordre par rapport aux distances des corps étrangers, ensorte que les puissances au delà de la première du rapport des premières distances aux dernières, ou

des actions étrangères relativement aux actions réciproques dans le système, peuvent être négligées. Ainsi la terre avec la lune, Jupiter avec ses satellites, forment des systèmes particuliers, parce qu'ils sont séparés des autres corps par un intervalle si grand, que la distance de la lune à la terre. par rapport à celle du soleil et des autres planètes, peut être regardée comme une quantité du second ordre. Autrement ces recherches ne pourraient pas avoir lieu: si Mars était beaucoup plus près de la terre qu'il ne l'est, il cesserait d'être une planète principale, et deviendrait une partie de notre système; si la lune était beaucoup plus éloignée de la terre, elle ne serait plus notre satellite, mais une planète principale, ou son orbite serait si compliquée, que notre théorie actuelle ne suffirait pas pour la calculer. Il est donc clair, que les vérités qui seront prouvées ici, ne sont pas de la même généralité que les lois de Kepler, mais qu'elles dépendent de l'arrangement arbitraire qu'il a plu à l'auteur de la nature, de donner au système solaire.

§. 51. Le *centre de gravité* d'un corps, ou d'un système de corps, est le point, à l'égard duquel la somme des momens statiques de toutes les masses qui composent le corps ou le système, est nulle, ou ce qui revient au même, le point dont le moment statique, si la masse entière y était réunie, par rapport à un point quelconque, est égal à la somme de tous les momens statiques du système par rapport au même point. Soit A ce point (*Fig.* 21.); dans lequel nous supposerons le soleil, Z le centre de gravité du système, dont la position est déterminée par les coordonnées rectangles $AX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$; soit G un élément quelconque du système, ses coordonnées $AE = x$, $EF = y$, $FG = z$; et nommons u, v, w, les coordonnées de G, comptées du centre de gravité, de sorte qu'on aura

$$w = z - Z, \quad v = y - Y, \quad u = x - X.$$

En nommant m la masse de l'élément G, m' celle d'un autre élément quelconque dont les coordonnées seront marquées d'un trait; la première définition du centre de gravité donnera trois équations de cette forme:

$$o = mu + m'u' + \text{cet.} \quad o = mv + m'v' + \text{cet.} \quad o = mw + m'w' + \text{cet.}$$

ou si l'on désigne par Σ la somme de tous les produits qu'on obtient en

multipliant chaque élément du système par sa distance au centre de gravité suivant une des trois directions x, y, z, ou u, v, w,

$$(A)\ldots\ldots o = \Sigma . mu, \quad o = \Sigma . mv, \quad o = \Sigma . mw.$$

Si l'on nomme la masse entière du système, $\Sigma . m = M$, la seconde définition du centre de gravité fournira ces équations:

$$(B) \ldots M . X = \Sigma . mx, \quad M . Y = \Sigma . my, \quad M . Z = \Sigma . mz;$$

et il est aisé de voir que cela suit nécessairement des équations (A). En effet, les valeurs $x = X + u$, $y = Y + v$, $z = Z + w$, donnent

$$\Sigma . mx = \Sigma . m (X + u) = \Sigma . mX + \Sigma . mu = \Sigma . mX,$$

parce que $\Sigma . mu = o$ par l'équation (A). Or X se rapportant au centre de gravité, cette abscisse aura la même valeur pour toutes les masses, et doit être regardée comme une constante par rapport à m, m', etc. d'où il suit $\Sigma . mX = X . \Sigma m$, donc $\Sigma . mx = X . \Sigma m = M . X$. Il en est de même des autres coordonnées Y, Z, ce qui donne les équations (B).

Si l'on se rappelle ce qui a été prouvé (§. 47.), qu'en supposant les corps célestes sphériques, l'attraction et le mouvement se font précisément, comme si chaque masse était réunie à son centre, il est visible, qu'on peut regarder chaque corps G comme un point matériel dont la masse est égale à m; ensorte que les formules précédentes sont applicables à tous les corps du système.

§ 52. Lorsque les corps du système sont en mouvement, m sera une constante relativement à chaque élément ou au centre de chaque corps, mais x, y, z, seront variables; de plus, comme le centre de gravité peut aussi être en mouvement, $M = \Sigma . m$ a une valeur constante, tant que le système entier n'est pas changé, mais X, Y, Z, sont variables. Or $M . X$ étant $= \Sigma . mx = mx + m'x' +$ cet. (§. 51. (B)), on aura, en différentiant deux fois,

$$(C)\ldots \left\{\begin{matrix} M . \partial\partial X = m\partial\partial x + m'\partial\partial x' + \text{cet.} = \Sigma . m\partial\partial x, \\ M . \partial\partial Y = \Sigma . m\partial\partial y, \; M . \partial\partial Z = \Sigma . m\partial\partial z. \end{matrix}\right\}$$

Si l'on désigne par p, p', la force motrice, ou les pressions que les élémens m, m', éprouvent suivant $EA = -x$, par q, q', les pressions suivant $FE = -y$, par r, r', celles suivant $GF = -z$, dont résulte la pression

suivant GA, et par P, Q, R, les pressions du centre de gravité suivant les mêmes directions; les forces accélératrices seront $\frac{p}{m}$, $\frac{p'}{m'}$, $\frac{q}{m}$, etc. $\frac{P}{M}$, $\frac{Q}{M}$, $\frac{R}{M}$ (§. 11.), et l'on a les équations (§. 17. n. 4.),

$$\partial\partial x = -\frac{2gp}{m}\partial t^2,\ \partial\partial x' = -\frac{2gp'}{m'}\partial t^2,\ \partial\partial X = -\frac{2gP}{M}\partial t^2, \text{ etc.}$$

d'où il suit, $m\partial\partial x + m'\partial\partial x' + \text{cet.} = -2g\partial t^2(p + p' + \text{cet.})$, et $M\partial\partial X = -2gP\partial t^2$, donc par l'équation (C),

$$\text{(D)} \ldots P = p + p' + \text{cet.} = \Sigma p,\quad Q = \Sigma q,\quad R = \Sigma r,$$

c'est-à-dire, la pression du centre de gravité suivant une direction quelconque est la somme des pressions que tous les corps du système éprouvent suivant la même direction.

Maintenant il y a trois cas qui peuvent avoir lieu: les corps ne sont sollicités par aucune force, ou ils sont sollicités par leurs propres actions réciproques, on enfin par des forces étrangères. Dans le premier cas, les corps du système se meuvent en vertu de la loi d'inertie seule, et toutes les forces p, p', etc. sont nulles, donc par l'équation (D), $P = o$, $Q = o$, $R = o$, d'où il suit $\partial\partial x = o$, $\partial\partial X = o$, etc. et en intégrant, $\partial x = a\partial t$, $\partial X = A\partial t$, $x = b + at$, $X = B + At$; c'est-à-dire, le mouvement de chaque corps et du centre de gravité suivant une direction quelconque, et par conséquent aussi le mouvement résultant est rectiligne et uniforme.

Dans le second cas on a, en vertu de la réaction (§. 43.), $p + p' + \text{cet.} = o$, ou $\Sigma p = o$, $\Sigma q = o$, $\Sigma r = o$, donc par l'équation (D) $P = o$, $Q = o$, $R = o$; d'où il suit, ainsi qu'on vient de le voir, $\partial\partial X = o$, $X = B + At$, etc. Ainsi, quelles que soient les actions réciproques des corps du système, pourvu qu'aucune force étrangère n'agisse sur eux, le mouvement du centre de gravité se fera exactement, comme si les corps n'agissaient point l'un sur l'autre; il suivra la loi d'inertie, et les actions des corps du système n'auront aucune influence sur lui, en se détruisant réciproquement: le centre de gravité sera donc en repos, ou son mouvement sera uniforme suivant une ligne droite. Il est aisé de voir, que la proposition précédente n'est autre chose que la loi d'inertie, appliquée à des systèmes entiers. Chaque corps est au fonds un système de toutes ses molécules, et l'on peut regarder les

corps d'un système comme les élémens d'un seul corps réuni au centre de gravité. De même que chaque corps est soumis à la loi d'inertie, quels que soient les mouvemens ou les révolutions qui se font dans son intérieur, et les intervalles vides qui se trouvent en-dedans du corps; de même le centre de gravité d'un système entier suivra la loi d'inertie, malgré les mouvemens et les actions des corps qui composent le système. De même qu'une force extérieure est nécessaire, pour faire sortir un corps de son inertie, de même il faut des forces étrangères, pour troubler le repos ou l'inertie du centre de gravité d'un système. Cette application de la loi d'inertie à des systèmes de plusieurs corps, est de la plus grande importance pour l'astronomie physique.

Considérons maintenant le troisième cas. Soit (*fig.* 21.) A le corps externe qui agit sur chaque corps du système $G = m$, suisant la direction GA, nommons S la masse de A, $k = GA$, $K = ZA$, les distances du corps m et du centre de gravité Z au corps A, et employons les désignations précédentes (§. 51.). Suivant la loi de la gravité, la pression de m suivant GA est $\frac{S.m}{k^2}$, d'où résultent les pressions suivant $-x, -y, -z$, $p = \frac{S.mx}{k^3}$, $q = \frac{S.my}{k^3}$, $r = \frac{S.mz}{k^3}$, et par l'équation (D)

$$P = S.\Sigma \frac{mx}{k^3},\quad Q = S.\Sigma \frac{my}{k^3},\quad R = S.\Sigma \frac{mz}{k^3}.$$

Dans notre système solaire la distance d'nn corps étranger, k, K, est infiniment plus grande que les distances des corps d'un système au commun centre de gravité, GZ: on peut donc regarder u, v, w, comme des quantités du second ordre par rapport à x, X, etc. (§. 51.), ensorte qu'on pourra négliger les carrés et les produits des quantités $\frac{u}{X}$, $\frac{v}{Y}$, $\frac{w}{Z}$ (§. 50.): on aura done

$$k^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (X + u)^2 + (Y + v)^2 + (Z + w)^2 =$$

$$X^2 \left(1 + \frac{u}{X}\right)^2 + Y^2 \left(1 + \frac{v}{Y}\right)^2 + Z^2 \left(1 + \frac{w}{Z}\right)^2 =$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2Xu + 2Yv + 2Zw =$$

$$K^2 \left\{1 + \frac{2(Xu + Yv + Zw)}{K^2}\right\},$$ d'où il vient

$$\frac{1}{k^3} = \frac{1}{K^3} \left\{1 + \frac{2(Xu + Yv + Zw)}{K^2}\right\}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{K^3} \left\{1 - \frac{3(Xu + Yv + Zw)}{K^2}\right\},$$ et

$$\frac{x}{k^3} = \frac{x}{K^3} - \frac{3X(Xu + Yv + Zw)}{K^5}.$$

en substituant dans le dernier terme X au lieu de $x = X + u$. Il en suit (D)

$$P = S.\Sigma\frac{m x}{K^3} - S.\Sigma.\frac{3 m X (X u + Y v + Z w)}{K^5} =$$

$$\frac{S}{K^3}\Sigma m x - \frac{3 S X}{K^5}(X.\Sigma m u + Y.\Sigma m v + Z.\Sigma m w),$$

parce que X, Y, Z, ont la même valeur relativement à tous les corps m. On en conclura, en vertu des équations (A) (§. 51.),

$$P = \frac{S}{K^3}\Sigma m x,\quad Q = \frac{S}{K^3}\Sigma m y,\quad R = \frac{S}{K^3}\Sigma m z,$$

et par les équations (B), $P = \frac{S.M.X}{K^3}$, etc. Les forces accélératrices qui sollicitent le centre de gravité suivant $-X, -Y, -Z$, sont donc

$$\frac{P}{M} = \frac{S.X}{K^3},\quad \frac{Q}{M} = \frac{S.Y}{K^3},\quad \frac{R}{M} = \frac{S.Z}{K^3}.$$

Si le corps S agissait immédiatement sur le centre de gravité, auquel la masse du système entier serait réunie, la pression suivant ZA serait $= \frac{S.M}{K^2}$, d'où résulteraient les pressions $\frac{S.M.X}{K^3}$, etc. suivant $XA = -X$, etc. donc les forces accélératrices $\frac{S.X}{K^3}$, etc. Il en suit que, si des forces étrangères agissent sur les divers élémens d'un système, le mouvement du centre de gravité du système se fera exactement, comme s'il était seul sollicité par les forces étrangères, toute la masse du système étant réunie au centre de gravité. Mais cela n'est exact, que dans la supposition que la distance du corps étranger est si grande par rapport au diamètre du système, qu'on peut négliger les puissancea du diamètre plus élevées que la première. Il en suit, 1) que les perturbations que par ex. la lune ou les satellites de Jupiter éprouvent par l'action du soleil ou d'une autre planète, ne peuvent résulter que du carré et des puissances plus élevées de la distance de la lune à la terre, divisée par la distance du soleil; 2) que ce résultat extrêmement simple, d'où dépendent l'ordre et l'harmonie des mouvemens planétaires, n'est dû qu'à l'arrangement arbitraire de notre système solaire, et qu'il peut exister des systèmes, où la même simplicité n'a point lieu.

Au reste il est aisé de voir, que le résultat sera le même dans telle autre loi de l'attraction, qui pourra être exprimée par k^n, k étant la distance des deux corps. En effet, on a comme ci-dessus, $k = K\left(1 + \frac{Xu+Yv+Zw}{K^2}\right)$. En faisant donc pour abréger, $X u + Y v + Z w = U$, on aura

$$p = \frac{S \cdot m\, k^n \cdot x}{k} = = S\, m\, x\, k^{n-1} = S\, m\, x\, K^{n-1} \left\{ 1 + \frac{(n-1)\, U}{K^2} \right\}, \text{ donc}$$

$$P = \Sigma p = S \cdot \Sigma m x\, K^{n-1} + (n-1)\, S \cdot \Sigma m x\, U \cdot K^{n-3}.$$

Le dernier terme est égal au premier, multiplié par $\frac{(n-1)\, U}{K^2}$; or K étant supposé infiniment plus grand que U, le dernier terme sera très-petit, à moins que n ne soit un nombre immense; de sorte qu'on peut y mettre X à la place de $x = X + u$, ce qui donnera

$$P = S \cdot \Sigma m x\, K^{n-1} + (n-1)\, S \cdot \Sigma m\, K^{n-3} \cdot X\, (X u + Y v + Z w).$$

Puisque X, Y, Z, K, ont la même valeur pour tous les corps m, on peut faire sortir ces coordonnées du signe Σ, d'où il viendra

$$P = S \cdot K^{n-1} \cdot \Sigma\, m\, x + (n-1)\, S K^{n-3}\, X\, \{ X \cdot \Sigma m u + Y \cdot \Sigma m v + Z \cdot \Sigma m w \}.$$

Or la propriété du centre de gravité donne (A) (B), $\Sigma m u = 0$, $\Sigma m v = 0$, $\Sigma m w = 0$, et $\Sigma\, m x = M \cdot X$: on aura donc $P = S \cdot M \cdot X \cdot K^{n-1}$, et les forces accélératrices du centre de gravité, qui résultent des forces étrangères,

$$P' = \frac{P}{M} = S X K^{n-1}, \quad Q' = S Y K^{n-1}, \quad R' = S Z K^{n-1}.$$

Si le centre de gravité, renfermant la masse entière du système, est sollicité seul par le corps S, il éprouvera la pression $S M K^n$ suivant ZA, donc suivant X, Y, Z, les pressions $S M X K^{n-1}$, $S M Y K^{n-1}$, $S M Z K^{n-1}$, d'où résultent les mêmes accélérations P', Q', R'.

§. 53. En vertu de la gravitation universelle il est impossible, qu'un système de corps soit en repos; et puisque les systèmes les plus éloignés s'attirent réciproquement, il est visible, que tout dans l'univers doit être en mouvement; mais dans tous ces mouvemens, les lois relatives au centre de gravité, que nous venons de prouver, auront constamment lieu. Deux corps isolés forment, en vertu de leur attraction réciproque, un système, ainsi que la terre et la lune, le soleil et la terre, en faisant abstraction des perturbations. Dans un pareil cas, les deux corps doivent être en mouvement, le corps central aussi bien que le satellite: car à la rigueur il n'existe point de corps central, à cause de la réaction; mais le véritable centre du mouvement est le point qui est seul en repos, ce qui est le centre de gravité de tous les corps. Si ce point a un mouvement uniforme en ligne droite,

le système entier, ou si l'on veut, la portion de l'espace absolu, qui est occupée par le système, aura le même mouvement; cet espace sera transporté comme une assiette, sur laquelle plusieurs toupies circulent, sans être dérangées par le commun mouvement. Dans cette portion de l'espace le mouvement des divers corps se fait, comme si le centre de gravité était en repos; et leur mouvement *relatif*, qui est le seul objet de l'astronomie, n'est point dérangé par le mouvement du centre de gravité. Quand on fait des recherches sur le mouvement des planètes autour du soleil, on ne demande pas, si le soleil, et par conséquent tout le système solaire, a un mouvement de translation, qui peut être curviligne, s'il est dû à des forces étrangères. On peut donc regarder le centre de gravité comme un point fixe, et comme le seul centre immobile du mouvement. Si deux corps s'attirent réciproquement, les orbites relatives qu'ils décrivent l'un autour de l'autre, aussi bien que celles qu'ils décrivent autour du commun centre de gravité, doivent être *semblables;* les dernières étant en même tems les véritables orbites, si le centre de gravité est en repos.

Puisque le centre de gravité C (*Fig.* 6.) est constamment sur la droite SP ou TQ qui joint les deux corps, ils doivent nécessairement décrire autour de C des angles égaux SCT, PCQ, dans le même tems: leurs vitesses angulaires et leurs révolutions sont donc égales. D'ailleurs, en nommant S, P, les deux masses, les distances seront toujours dans le même rapport, $CS:CP::CT:CQ::P:S$; d'où il suit, que les orbites autour de C, ST, PQ, sont des courbes semblables. Supposons que les deux corps aient parcouru les arcs ST, PQ, et tirons $S\pi$, parallèle et égale à TQ: alors π aura la même position relativement à S, que Q par rapport à T; π est donc le lieu relatif, et $P\pi$ l'orbite relative de P autour du corps S, supposé immobile. Or on a $CT = \frac{P}{S} CQ$, donc $TQ = \frac{P+S}{S} CQ = S\pi$, et pareillement $\frac{P+S}{S} = \frac{SP}{CP}$, d'où il suit $S\pi = \frac{SP}{CP} CQ$, ou $CP : CQ :: SP : S\pi$, et $PS\pi = PCQ = SCT$. Les trois orbites, PQ, ST, $P\pi$, sont donc parfaitement semblables, et décrites dans le même tems. Les axes et toutes les lignes analogues de ces trois orbites sont entre elles, comme les distances CP, CS, SP, et par conséquent comme les masses S, P, S + P.

§. 54. Il faut maintenant chercher la relation qui existe entre les orbites relatives que nous venons de déterminer, et celle qui aurait lieu, si S était en repos, en attirant P, sans être attiré par la réaction de P, ainsi que nous l'avons supposé jusqu'ici. On a vu que les planètes doivent décrire des sections coniques autour du soleil, si elles sont sollicitées par une seule force dirigée vers le soleil immobile, et réciproque au carré de la distance; mais il s'agit maintenant d'examiner, si les orbites relatives autour du soleil mobile, et autour du centre de gravité, seront encore les mêmes sections coniques, malgré la réaction.

Les deux corps P, S, sont, dans chaque instant, sollicités suivant PS et SP, ou QT et TQ, et C est le seul point qui soit commun à toutes ces directions: le centre de gravité C est donc le centre des forces, et P est poussé vers C par une force accélératrice qui est constamment proportionnelle à $\frac{S}{PS^2}$ ou $\frac{S}{QT^2}$. En nommant x la distance entre les deux corps PS ou QT, y la distance variable du corps P au centre de gravité, CP ou CQ, et $\frac{P+S}{S}=m$, on aura constamment $x=my$, d'où il suit que P est sollicité par une force centrale, dirigée vers C, et proportionnelle à $\frac{S}{x^2}=\frac{S}{m^2y^2}$ ou à $\frac{S}{y^2}$, et l'on trouvera de la même manière, que la force qui agit sur S, est proportionnelle à $\frac{P}{CT^2}$. Ainsi tous les deux corps sont sollicités par des forces centrales, dirigées vers le centre de gravité, supposé immobile, et réciproques au carré de leurs distances à ce centre. Ils devront donc se mouvoir, comme s'ils étaient attirés seulement par un corps central demeurant en repos dans le centre de gravité, suivant les mêmes lois, suivant lesquelles les corps mêmes s'attirent réciproquement: d'où il suit, que leurs véritables orbites autour du centre de gravité, ainsi que les orbites relatives de l'un autour de l'autre, seront également des sections coniques, décrites conformément aux lois de Kepler. Nous allons voir quelle différence il y a entre la section conique décrite autour du centre de gravité, et celle que le corps P décrirait autour du corps S, supposé immobile, s'il n'y avait point de réaction.

§. 55. Si le corps P seul est attiré par S, il sera sollicité par une force, proportionnelle à la masse S; et il en est de même de S. Si les deux

corps s'attirent réciproquement, chacun sera sollicité par la même force que dans le premier cas; mais S se mouvant en même tems suivant la direction opposée, le mouvement relatif sera plus rapide, et la durée d'une révolution plus courte: par conséquent, si la vitesse de projection est changée ensorte que les deux révolutions soient de même durée, le grand axe de l'orbite relative doit être plus grand. Lorsque P est arrivé en Q, PSQ est le vrai mouvement autour du corps S, supposé immobile; tandis que $PS\pi = PCQ$ est le mouvement relatif autour du corps S, allant de S à T, et PCQ est plus grand que PSQ. Le corps P est sollicité suivant PS ou PC, par une force $\frac{S}{SP^2}$. Si l'on veut y substituer en C une masse centrale C, sa force accélératrice sera $\frac{C}{CP^2}$, d'où l'on tirera $\frac{C}{CP^2} = \frac{S}{SP^2}$, donc

$$C = \frac{CP^2}{SP^2} S = \left(\frac{S}{S+P}\right)^2 S.$$

Puisque la section conique est déterminée par la vitesse de projection dans un point quelconque (§. 33.), on peut demander, quel rapport aura lieu entre les orbites, si les vitesses sont égales dans deux points analogues, ou bien, quel doit être le rapport entre les vitesses, pour que les orbites soient les mêmes. Soit (*Fig.* 6.) $P\pi$ l'orbite relative autour du corps S qui est aussi en mouvement, PQ la véritable orbite autour du centre de gravité C, et pq (*Fig.* 7.) l'orbite que P décrirait autour du corps S, si celui-ci était immobile en s; et nommons V la force centrale de S, par laquelle P est accéléré dans l'un et l'autre cas, T, Θ, les durées des révolutions dans les orbites PQ et pq, τ, θ, deux tems infiniment petits, et $\tau : \theta :: T : \Theta$. Maintenant, si les orbites $P\pi$, pq, doivent être égales et semblables, PQ et pq seront aussi semblables, parce que PQ et $P\pi$ le sont (§. 53.). Supposons que P, p, soient deux points analogues, par ex. les périhélies, PR, pr, les tangentes, PQ, pq, les arcs parcourus dans les tems τ, θ; u, v, les vitesses en P et p. Cela posé, les angles PCQ, psq, sont égaux, et les figures PCQ, PCR, QPR, et psq, psr, qpr, sont semblables, à cause de $\tau : \theta :: T : \Theta$; et toutes les lignes analogues dans les deux orbites seront entre elles comme CP est à sp, ou CP à SP, parceque $sp = SP$. Pendant que le corps P est allé à Q, il aurait parcouru PR sur la tangente, en vertu

de l'inertie, si la force centrale V ne l'avait forcé de décrire RQ: on a donc

$$PR = u\tau,\quad RQ = gV\tau^2\ (\S.\ 17.),\quad pr = v\theta,\quad rq = gV\theta^2;$$

d'où l'on tire

$$\tau = \frac{PR}{u},\ \theta = \frac{pr}{v},\ RQ : rq :: \tau^2 : \theta^2 :: \frac{PR^2}{u^2} : \frac{pr^2}{v^2},\ \text{donc}\ u : v :: \frac{PR}{\sqrt{RQ}} : \frac{pr}{\sqrt{rq}}.$$

Or $PR : pr :: RQ : rq :: CP : SP$, donc $u : v :: \sqrt{CP} : \sqrt{SP} :: \sqrt{S} : \sqrt{(S+P)}$. Ainsi le corps P, étant lancé de p avec la vitesse $v = u.\sqrt{\frac{S+P}{S}}$, décrirait autour du corps S immobile, précisément la même section conique qu'il décrit autour du corps mobile avec la vitesse u. On a d'ailleurs

$$T : \Theta :: \tau : \theta :: \frac{PR}{u} : \frac{pr}{v} :: \frac{CP}{\sqrt{CP}} : \frac{SP}{\sqrt{SP}} :: \sqrt{CP} : \sqrt{SP} :: \sqrt{S} : \sqrt{(S+P)};\ \text{donc}$$

$$(1) \ldots\ldots \Theta = T\sqrt{\frac{S+P}{S}}.$$

Si les forces accélératrices sont réciproques au carré de la distance, ce qui est le cas dans notre système solaire, les deux orbites $P\pi$, pq, auront le même grand axe A, parce qu'elles sont supposées égales et semblables; mais les révolutions T, Θ, qui répondent au même axe A, seront différentes. Supposons que P décrive autour du corps fixe *s*, une autre ellipse, dont l'axe soit *a*, et la révolution *t* au lieu de Θ: cela posé on aura, suivant la troisième loi de Kepler, $t = \Theta\sqrt{\frac{a^3}{A^3}} = T\sqrt{\frac{a^3(S+P)}{A^3 S}}$. En supposant donc $t = T$, il viendra

$$(2) \ldots\ldots a = A\sqrt[3]{\frac{S}{S+P}},$$

d'où il suit, que les grands axes des ellipses, décrites dans le même tems autour d'un corps S, supposé en repos et en mouvement, c'est-à-dire en faisant abstraction et en tenant compte de la réaction, seront entre eux comme les racines cubiques de la masse S, et de la somme des masses S, P; au lieu que les durées des révolutions, Θ, T, seront entre elles comme les racines carrées de la somme S + P et de la masse S, si les distances ou les grands axes sont les mêmes.

§. 56. Il est aisé d'appliquer les théorèmes précédens au mouvement des planètes. Malgré les mouvemens compliqués et la grande variété des actions de toutes les planètes, comètes, et satellites du système solaire, le centre de gravité du soleil et de tous ces corps peut être regardé comme immobile,

quoiqu'il y ait toute apparence que le système solaire a un mouvement propre qui sera rectiligne et uniforme, s'il n'est pas altéré par des forces étrangères, ou qui dans le cas contraire résultera de l'attraction des corps étrangers (§. 52.). Mais le soleil est en mouvement, aussi bien que les planètes: le système de Copernic n'est donc pas rigoureusement vrai, mais il approche de la vérité plus qu'aucun autre, parce que le soleil est la plus grande masse, et par conséquent le plus près du centre de gravité du système entier, qui est le vrai point central du mouvement. Le soleil n'est pas le corps central, mais une planète, qui circule autour du centre de gravité, comme les autres, dont elle se distingue seulement par la grosseur de sa masse. Si Jupiter avait une masse 800 ou 900 fois plus grande, le centre du mouvement de toutes les planètes, y compris le soleil et Jupiter, serait constamment à peu près sur le milieu de la ligne droite qui joint ces deux corps. Si l'on ne compare le soleil qu'avec une seule planète, par ex. Jupiter, il est facile de déterminer les orbites: cette planète décrit autour du soleil, en douze ans, une ellipse dont le demi-grand axe est 5,2 et l'excentricité 0,05. Comme ce résultat est trouvé par observation, il donne l'orbite relative qui est l'objet des tables astronomiques. Dans la même période, Jupiter et le soleil décrivent, autour de leur centre de gravité, des ellipses de la même excentricité, qui sont leurs véritables orbites. Le grand axe de l'ellipse de Jupiter est à 10,4 comme la distance de Jupiter au centre de gravité est à sa distance au soleil, ou comme la masse du soleil est à la somme des deux masses; et l'axe de l'ellipse du soleil est à 10,4 comme la masse de Jupiter est à la même somme: le premier demi-axe est donc 5,19682; le dernier est 0,00418, environ deux rayons et demi de l'orbite lunaire, ou 100 demi-diamètres de la terre, ensorte qu'en supposant la parallaxe du soleil $= 8'',65$, le centre de gravité de ces deux corps est en dedans du soleil, mais très-près de sa surface, la distance n'étant que de onze demi-diametres de la terre. L'orbite apparente du soleil autour de Jupiter est la même que l'orbite relative de Jupiter autour du soleil. Toutes ces orbites sont décrites suivant les trois lois de Kepler. Mais ce mouvement est troublé par l'action des autres planètes: les perturbations de la planète, dont il sera parlé dans la suite,

sont peu considérables, à cause de la petitesse des masses des planètes par rapport à celle du soleil, et ne changent pas sensiblement la figure de l'orbite de la planète; mais celle du soleil peut être entièrement défigurée par les autres planètes qui, selon leurs positions, peuvent doubler ou détruire l'action de Jupiter. Le mouvement du soleil autour du centre de gravité du système entier fera donc des oscillations continuelles, et sera composé d'une infinité de petits arcs elliptiques. En vertu des variations continuelles de la position et de la distance des corps qui agissent sur le soleil, principalement des comètes dont nous ne connaissons ni le nombre ni les masses, le mouvement du soleil est tellement compliqué, qu'il est impossible de le soumettre au calcul. Mais il est aisé de voir, que ce calcul serait inutile, parce que, indépendamment de ce calcul, on trouve l'orbite relative de chaque planète autour du soleil, qui est le seul objet de l'astronomie, en employant la somme des masses du soleil et de chaque planète au lieu de la première, d'autant plus que le centre de gravité du système, autour duquel se fait ce mouvement, est peu éloigné du centre du soleil. En supposant par ex. toutes les planètes en conjonction héliocentrique, la distance du centre de gravité au centre du soleil sera 0,008 rayons de l'orbite de la terre, ou 1,734 demi-diamètres du soleil, de sorte que le centre de gravité sera éloigné de la surface du soleil de $\frac{3}{4}$ de son demi-diamètre. Dans tous les autres cas la distance sera beaucoup moindre; et si les masses des planètes et des comètes sont dispersées de tous côtés, ce qui sera ordinairement le cas, le centre de gravité du système coïncidera à peu près avec le centre du soleil.

Les autres propositions (§. 55.) ne sont d'aucune utilité pour l'astronomie, parce qu'elles servent à déterminer ce qui arriverait dans un cas qui n'a pas lieu dans la nature, c'est-à-dire, si les planètes n'exerçaient aucune réaction sur le soleil. Ce qui importe de savoir, a été prouvé, savoir, que l'attraction réciproque ne change rien aux lois de Kepler, qui sont la base du mouvement des planètes autour du centre de gravité, et de leurs orbites relatives autour du soleil, aussi bien que du mouvement autour d'un corps central immobile ([1]).

---

(1) *Newt Phil. Nat. Princ. Math. Lib. I. Leg. Corol. IV. Prop. LVII — LXI. et Lib. III. Prop. XII.*

§. 57. La seule chose qui éprouve un petit changement par l'attraction réciproque, c'est la troisième loi de Kepler, et la détermination des grands axes des orbites suivant cette loi. Si deux planètes P, p, circulent autour du soleil S, nommons A, a, leurs distances moyennes au soleil, T, t, leurs révolutions dans l'orbite relative, qui sont données par les observations, et Θ, θ, les durées de leurs révolutions qui auraient lieu, si le soleil était immobile, la réaction des planètes étant nulle. Cela posé, on a (§. 55. (1)) $\Theta = T\sqrt{\frac{S+P}{S}}$, ou en prenant pour unité la masse du soleil S,

$$\Theta = T\sqrt{(1+P)}, \qquad \theta = t\sqrt{(1+p)},$$

et suivant la troisième loi de Kepler, $\Theta^2 : \theta^2 :: A^3 : a^3$, d'où il suit

$$(1) \ldots\ldots A : a :: T^{\frac{2}{3}}(1+P)^{\frac{1}{3}} : t^{\frac{2}{3}}(1+p)^{\frac{1}{3}}.$$

Si P représente la terre, T sera l'année sidérale, et $A = 1$ le rayon de l'orbite de la terre, d'où il vient

$$(2) \ldots\ldots a = \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1+p}{1+P}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ et à peu près } a = \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{p}{3} - \frac{P}{3}\right).$$

En nommant N, n, les moyens mouvemens de la terre P et de la planète p dans un tems quelconque, on aura $N : n :: t : T$, d'où il suit

$$(3) \ldots\ldots a = \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1+p}{1+P}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{p}{3} - \frac{P}{3}\right).$$

La théorie de Kepler donnerait, au lieu des équations (2) (3),

$$a = \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Si l'on nomme x, y, z, les trois coordonnées rectangles du corps S, x', y', z', celles du corps P, leur origine étant au centre de gravité; la distance de P à S sera

$$(4) \ldots\ldots r = \sqrt{\{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\}},$$

et les forces de S qui sollicitent P suivant $-x$, $-y$, $-z$, seront

$$(5) \ldots\ldots h' = \frac{x'-x}{r^3}\,S, \quad k' = \frac{y'-y}{r^3}\,S, \quad l' = \frac{z'-z}{r^3}\,S,$$

celles de P qui sollicitent S suivant les mêmes directions,

$$(6) \ldots\ldots h = \frac{x-x'}{r^3}\,P, \quad k = \frac{y-y'}{r^3}\,P, \quad l = \frac{z-z'}{r^3}\,P.$$

Or on a, conformément à la nature du centre de gravité, $Sx + Px' = 0$, $Sy + Py' = 0$, $Sz + Pz' = 0$, d'où il suit

$$(7) \ldots\ldots x = -\frac{P}{S}x', \quad y = -\frac{P}{S}y', \quad z = -\frac{P}{S}z'.$$

Si l'on nomme ϱ, ϱ', les distances des corps S et P au centre de gravité, on aura

$$\varrho = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}, \qquad \varrho' = \sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)};$$

donc en vertu des équations (4) et (7),

$$r = \frac{S+P}{S}\varrho', \quad \text{et} \quad r = \frac{S+P}{P}\varrho.$$

Ces valeurs de r donneront (5) (6) et (7),

$$h = \frac{P^3}{(S+P)^2}\cdot\frac{x}{\varrho^3}, \quad k = \frac{P^3}{(S+P)^2}\cdot\frac{y}{\varrho^3}, \quad l = \frac{P^3}{(S+P)^2}\cdot\frac{z}{\varrho^3},$$

$$h' = \frac{S^3}{(S+P)^2}\cdot\frac{x'}{\varrho'^3}, \quad k' = \frac{S^3}{(S+P)^2}\cdot\frac{y'}{\varrho'^3}, \quad l' = \frac{S^3}{(S+P)^2}\cdot\frac{z'}{\varrho'^3}.$$

Or on a (§. 17. n. 4. $\frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = -2gh$, $\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = -2gk$, $\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = -2gl$, donc

$$(8)\ldots\ \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = -\frac{2gP^3}{(S+P)^2}\cdot\frac{x}{\varrho^3}, \text{ etc. } (9)\ldots\ \frac{\partial\partial x'}{\partial t^2} = -\frac{2gS^3}{(S+P)^2}\cdot\frac{x'}{\varrho'^3}, \text{ etc.}$$

Il s'en suit, que les corps S et P tournent autour du centre de gravité, comme s'ils étaient attirés vers ce centre, en raison inverse du carré des distances, par les masses $\frac{P^3}{(S+P)^2}$ et $\frac{S^3}{(S+P)^2}$.

Pour déterminer le mouvement relatif de P autour de S, il faut regarder le corps S comme immobile, et réduire les coordonnées de P à ce point fixe S. En nommant ces coordonnées ξ, η, ζ, on aura

$$x'-x=\xi, \quad y'-y=\eta, \quad z'-z=\zeta, \quad \text{et} \quad r^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2.$$

On a donc (7) $\xi = \frac{S+P}{S}x'$, et $\partial\partial\xi = \frac{S+P}{S}\partial\partial x'$; ce qui étant substitué dans l'équation (9), donne $\frac{\partial\partial\xi}{\partial t^2} = -\frac{2gS^2}{(S+P)^2}\cdot\frac{\xi}{\varrho'^3}$. Mais

$$\varrho' = \sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)} = \frac{S}{S+P}\cdot\sqrt{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} = \frac{S\cdot r}{S+P}, \text{ donc}$$

$$\frac{\partial\partial\xi}{\partial t^2} = -2g(S+P)\frac{\xi}{r^3}, \quad \frac{\partial\partial\eta}{\partial t^2} = -2g(S+P)\frac{\eta}{r^3}, \quad \frac{\partial\partial\zeta}{\partial t^2} = -2g(S+P)\frac{\zeta}{r^3},$$

r étant la distance de P à S, et ξ, η, ζ, les coordonnées de P, prises du point fixe S. Le mouvement relatif de P autour du corps S, regardé comme immobile, est donc le même que celui qui aurait lieu, si P était attiré par S avec la force S+P. Comme l'astronomie ne considère que les mouvemens relatifs, il faut mettre la somme des masses du soleil et de chaque planète, S+P, au lieu de S: ce qui est la correction précédente de la théorie de

Kepler. Suivant cette théorie on a trouvé (§. 32. (9)) $a^3 n^2 = 2gf^2 = 2gS$ (§. 28.), la masse de la terre étant prise pour unité des masses, et le rayon de la terre pour unité des lignes. La correction consiste donc à mettre $a^3n^2 = 2g(S+P)$ au lieu de $a^3n^2 = 2gS$. Si l'on veut exprimer toutes les masses par celle du soleil, en faisant $S = 1$, $\frac{P}{S} = m$, on doit multiplier les masses par le nombre μ qui indique, combien de fois la masse de la terre est renfermée dans celle du soleil. On a donc

$$(A) \ldots . n^2 a^3 = 2 g \mu (1 + m),$$

n étant le moyen mouvement en parties du rayon, pour une seconde, et a, g, étant exprimés en rayons de la terre (§. 28.). Suivant Bouguer g est $\frac{1}{1307915}$, donc

$$2g = \frac{1}{653958} = \lambda, \text{ et } \sqrt{2g} = \sqrt{\lambda} = \frac{1}{808,677} = \delta.$$

Si l'on désigne par a le demi-grand axe de l'orbite planétaire en parties de la moyenne distance de la terre au soleil, ainsi que cela se fait dans les tables astronomiques, et par ϖ la parallaxe du soleil $= 8'', 6$; la valeur de a dans l'équation (A) sera $\frac{a}{\varpi} = 23984, 28 \,.\, a = \varkappa \,.\, a$, d'ou il vient $\varkappa^{\frac{3}{2}} = 3714410 = \varepsilon$, donc

$$(B) \ldots . n^2 a^3 = \frac{\lambda \mu}{\varkappa^3} (1 + m), \text{ et } n a^{\frac{3}{2}} = \frac{\delta \sqrt{\mu (1 + m)}}{\varepsilon}.$$

Si les mêmes quantités, relatives à une autre planète, sont marquées d'un trait, on aura

$$(C) \ldots . n^2 a^3 : n'^2 a'^3 :: 1 + m : 1 + m'.$$

En substituant $a = 1$, et le moyen mouvement de la terre $n = 0'', 0411 = 0,000000199258 4 = \nu$, et négligeant la masse m de la terre par rapport à celle du soleil, on aura

$$(D) \ldots . n'^2 a'^3 = \nu^2.$$

On peut déterminer le mouvement relatif d'une planète autour du soleil, et la correction des lois de Kepler qui en résulte, d'une manière fort simple. Si la planète P (*Fig.* 8.) décrit autour du soleil S l'arc Pp, pendant que le soleil marche de S en s, son lieu relativement au soleil sera déterminé par la ligne sp. Ayant donc mené la droite Sπ, égale et parallèle à sp, π sera son lieu, et Pπ son mouvement relatif au soleil, suppposé

immobile en S. Ce mouvement $P\pi$ est composé du mouvement vrai Pp et de $p\pi$, lequel est égal et contraire au mouvement vrai du soleil, parce que $S\pi ps$ est un parallélogramme. Ainsi, pour déterminer le mouvement relatif d'une planète, on n'a qu'à lui attribuer, outre son vrai mouvement, un autre qui est égal et contraire à celui du soleil; ce qui se fait, en concevant la planète sollicitée par la force qui agit effectivement sur elle, et par celle qui agit sur le soleil, mais suivant la direction opposée, et en supposant le soleil immobile. La première force est $\frac{S}{SP^2}$ suivant PS, et la seconde $\frac{P}{SP^2}$ suivant SP: d'où il résulte une force accélératrice de la planète $= \frac{S+P}{SP^2}$ vers le centre du soleil, ou la masse S+P au lieu de S, comme ci-dessus; ce qui suffit pour expliquer tous les phénomènes du mouvement relatif. Si la planète est le corps central d'un système particulier, comme la terre, Jupiter, Saturne et Uranus, le système entier se mouvra autour du soleil, comme si toute sa masse était réunie au centre de gravité (§. 52.): il faut donc mettre à la place de P la masse de la planète et de ses satellites, pour avoir la force $\frac{S+P}{SP^2}$ qui sollicite le centre de gravité du système.

CHAPITRE IV.

Masse et densité des corps qui forment le système solaire.

§. 58. Sans supposer l'attraction universelle, prouvée précédemment, il est certain, que tous les corps, autour desquels d'autres corps décrivent des courbes, sont doués d'une force attractrice; et si ces courbes sont des sections coniques, le foyer est le siège d'une force centrale, réciproque au carré de la distance; et tout ce qui a été prouvé de ces forces, a également lieu à l'égard du corps qui occupe le foyer: ce qui servira à comparer l'intensité des forces de divers corps centraux. Or l'intensité étant proportionnelle à la masse (§. 42.), on aura en même tems le rapport des *masses,* ce qui étant combiné avec la *grosseur* des corps, servira à comparer les *densités.* La grosseur est donnée par le diamètre apparent et la distance ou la parallaxe; or le rapport des distances des planètes au soleil étant connu par les périodes de leurs révolutions, en vertu de la troisième loi de Kepler, il suffit de connaitre une seule distance, par ex. celle de la terre au soleil, d'où il suit, que la parallaxe du soleil est le fondement de tout ce calcul. L'intensité de la force donne, pour chaque distance, la force accélératrice, et ce qui revient au même, la *chute des corps* à sa surface, son diamètre étant connu. Pour cela il suffit, de connaitre l'accélération à la surface d'un seul corps; si l'on prend pour base la chute des corps sur la terre, que nous pouvons mesurer immédiatement, la masse et la densité de la terre sera la mesure des autres. Mais il est aisé de voir, qu'on peut substituer à la chute des corps, le sinus verse de l'arc parcouru par un satellite: d'où résultent deux méthodes.

Les révolutions de plusieurs satellites autour du même corps central, ne peuvent servir d'aucune manière à comparer entre elles leurs masses,

parce que l'accélération ne depend pas de la masse du mobile, mais de celle du corps central. Connaissant donc la révolution de la terre, qui détermine la masse du soleil, on pourrait y comparer la masse de chaque autre planète, par ex. Jupiter, si l'on pouvait rapprocher la terre de Jupiter, ensorte qu'elle ferait autour de lui une révolution qui, étant comparée à la durée de l'année, donnerait la masse de Jupiter. Mais comme cette révolution ne dépend pas de la masse de la terre, elle pourra être remplacée par un corps quelconque; d'où il est aisé de voir, que la comparaison des révolutions des satellites de Jupiter avec celle de la terre ou d'une autre planète autour du soleil, servira à déterminer le rapport entre les masses de Jupiter et du soleil. On voit qu'on ne peut trouver par ce moyen que les masses du soleil, de la terre, de Jupiter, Saturne, et Uranus.

§. 59. L'intensité de la force centrale est déterminée par l'accélération qu'elle communique à une masse quelconque dans une distance donnée; et l'intensité de deux forces est proportionnelle aux accélérations à distance égale (§. 11.). Or les accélérations étant réciproques au carré des distances, il est visible, que les intensités de deux forces seront comme les carrés des distances, auxquelles leurs accélérations sont égales. Si deux forces centrales P, p, exercent, dans les distances F, f, la même accélération que la pesanteur sur la terre, c'est-à-dire, de $g = 15$ à 16 pieds dans la première seconde; l'accélération h que la force p communiquerait dans la distance F, est $\frac{gf^2}{F^2}$; et à la même distance, l'accélération de la force P est g, d'où il suit $P : p :: g : \frac{gf^2}{F^2} :: F^2 : f^2$. Cette proportion servira à comparer la masse d'un corps central à celle de la terre.

Soit M la masse d'un corps, dont la force accélératrice à la distance F est égale à la pesanteur sur la terre; et supposons qu'un autre corps décrive autour de lui, dans le tems T, une ellipse dont le demi-grand axe soit A, ou qu'il parcoure en une seconde l'arc n: cela posé on aura (§. 28.)

$$M = \frac{2\pi^2 A^3}{g T^2} = \frac{A^3 n^2}{2g},$$

la masse et le rayon de la terre étant pris pour unité. Si a est le demi-axe exprimé par la moyenne distance de la terre au soleil, on a (§. 57.) $A = \frac{a}{\varpi}$ et $2g = \frac{1}{653958} = \lambda$, ϖ étant la parallaxe du soleil; d'où il vient

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{\lambda \varpi^3 T^2} = \frac{n^2 a^3}{\lambda \varpi^3},$$

où $\lambda \varpi^3$ et $\frac{4\pi^2}{\lambda \varpi^3}$ ont une valeur constante pour toutes les planètes, ϖ étant 8″, 6 et $\frac{1}{\varpi} = 23984,28$. Si l'on veut se servir de l'orbite terrestre, pour déterminer la masse du soleil, on a $a = 1$, $n = 0{,}0000001992584 = \nu$ (§. 57.), et la masse du soleil par rapport à celle de la terre

$$S = \frac{\nu^2}{\lambda \varpi^3} = 358231.$$

Les rayons r des orbites des satellites sont donnés par rapport au demi-diamètre R de la planète principale (II. §. 311.), $r = \mu R$; et le diamètre apparent de la planète à la distance moyenne du soleil, 2ρ, est connu (II. §. 153.). Le dernier est le vrai diamètre $2R$, divisé par le rayon de l'orbite terrestre: ayant donc converti ρ en parties du rayon, on aura $\rho = R$ en parties de la distance moyenne du soleil, partant r par rapport à cette distance, ou $a = \mu \rho$, et la masse de la planète, par rapport à celle de la terre,

$$M = \frac{n^2 \mu^3 \rho^3}{\lambda \varpi^3}.$$

§. 60. On peut aussi trouver les masses des planètes par rapport à celle du soleil, sans connaître la chute des corps g, par le moyen des proportions du §. 57:

$$M : m :: N^2 A^3 : n^2 a^3 :: \frac{A^3}{T^2} : \frac{a^3}{t^2} :: \frac{A^3}{a^3} : \frac{T^2}{t^2},$$

M et m étant la somme des masses du corps central et de son satellite, N et n les moyens mouvemens, T et t les révolutions, A et a les demi-grands axes. Si l'on prend pour base l'orbite de la terre, on aura, en désignant par ☉, ♁, ☾, les masses du soleil, de la terre, et de la lune,

$A = 1$, $M = ☉ + ♁$, $T = 31558151'',5$ l'année sidérale.

Maintenant, si l'on veut déterminer la masse de la terre, on a

$m = ♁ + ☾ = \nu\, ♁$, $t = 2360591'',5$ le mois sidéral.

En nommant la parallaxe moyenne de la lune $\Pi = 57'\,1''$, celle du soleil $\varpi = 8'',6$; et faisant la masse lunaire $= \frac{\delta}{59}$, on aura

$$\frac{A}{a} = \frac{\Pi}{\varpi}, \quad \frac{T}{t} = 13,3687472; \text{ donc}$$

$$\nu\,♁ = (\odot + ♁)\,\frac{T^2}{t^2}\cdot\frac{\varpi^3}{\Pi^3},\ \text{ou}\ \frac{\odot}{♁} = \nu\left(\frac{t}{T}\right)^2\cdot\left(\frac{\Pi}{\varpi}\right)^3 - 1.$$

Cette formule donne $\frac{\odot}{♁} = 358163$. On a vu (§. 39.), que ce calcul a besoin de plusieurs corrections, pour être exact. M. de Laplace trouve par la première méthode, après y avoir appliqué toutes ces corrections, en supposant la parallaxe du soleil $= 8'',748$ (1), $\frac{\odot}{♁} = 337086$. Si l'on suppose la parallaxe $= 8'',6$; il en résulte $\frac{\odot}{♁} = 354790$; et cette valeur sera employée dans le cours de cet ouvrage.

Quand on veut déterminer la masse d'une planète, entourée de satellites, par la comparaison du mouvement des satellites avec celui de la terre, on a (§. 59.) $\frac{a}{A} = \mu\rho$, donc $\odot + ♁ : m :: \frac{1}{\mu^3\rho^3} : \frac{T^2}{t^2}$, ou $\frac{m}{\odot} = \left(\frac{T}{t}\right)^2 \mu^3\rho^3$. Si l'on veut comparer l'orbite d'un satellite avec celle de la planète principale, T, t, seront les durées des révolutions de la planète et du satellite, et $\frac{a}{A}$ est le rayon de l'orbite du satellite, divisé par la distance de la planète au soleil, c'est-à-dire la distance du satellite à la planète, vue du soleil. En la nommant δ, on aura

$$\frac{m}{\odot + m} = \delta^3\left(\frac{T}{t}\right)^2 \ \text{donc}\ \frac{m}{\odot} = \frac{\delta^3\left(\frac{T}{t}\right)^2}{1 - \delta^3\left(\frac{T}{t}\right)^2}.$$

Suivant M. de Laplace (2) on a, relativement à Jupiter et son IV satellite, $\delta = 8'\,15'',84 = 0,0024039002$; $T = 4332,6022$ jours, $t = 16,689$ j. d'où l'on tire

$$\frac{♃}{\odot} = 0,0009371154 = \frac{1}{1067,09}.$$

Relativement à Saturne et son IV (VI) satellite, on a $\delta = 2'\,59'' = 0,0008678165$; $T = 10758,96984$ jours, $t = 15,9453$ j. d'où il résulte

$$\frac{♄}{\odot} = 0,0002976383 = \frac{1}{3359,7}.$$

Relativement à Uranus et son IV satellite, on a $\delta = 44'',23 = 0,0002144331$; $T = 30688,7127$ jours, $t = 13,4559$ jours, d'où il suit

$$\frac{♅}{\odot} = 0,0000512896 = \frac{1}{19497}.$$

Mais les distances de Saturne et d'Uranus à leurs planètes respectives n'étant

(1) *Expos. du Syst. du Monde, 3. édit. L. IV. Ch. III. pag. 207.*

(2) *Mécan. Cél. Tom. III. pag. 62.*

pas aussi certaines que celles du IV satellite de Jupiter, les deux dernières masses auront besoin d'être vérifiées par les observations. La masse de Saturne peut être corrigée par la grande inégalité de Jupiter, due à l'action de Saturne: c'est par ce moyen qu'on a trouvé la masse de Saturne, qui sera adoptée dans la suite, $\frac{♄}{☉} = \frac{1}{3534{,}08}$.

§. 61. Si l'on nomme M la masse d'une planète, celle de la terre étant prise pour unité, C son volume, Δ sa densité, R son vrai demi-diamètre, exprimé en rayons terrestres, ρ le demi-diamètre apparent à la distance moyenne du soleil, ϖ la parallaxe du soleil, on aura

$$\Delta = \frac{M}{C}, \quad R = \frac{\rho}{\varpi}, \quad C = \frac{\rho^3}{\varpi^3}$$ par rapport à la grandeur de la terre.

En substituant $M = \frac{n^2 \mu^3 \rho^3}{\lambda \varpi^3}$ (§. 59.), il viendra

la *densité* par rapport à celle de la terre, $\Delta = \frac{n^2 \mu^3}{\lambda}$,

expression qui est indépendante de la parallaxe du soleil, ou de la grandeur du système solaire; ce qui ne serait pas le cas, si la loi d'attraction était différente de celle de la nature (§. 31.).

La masse M donne immédiatement l'accélération h à une distance, égale au rayon terrestre, $h = Mg$. Puisque l'accélération est réciproque au carré de la distance, celle G que la masse M communique à une distance quelconque R, exprimée en rayons terrestres, se trouvera par la proportion $R^2 : 1 :: h : G$. Si l'on désigne par R le vrai demi-diamètre du corps M, exprimé en rayons terrestres, on aura $R = \frac{\rho}{\varpi}$, d'où il vient $G = \frac{h}{R^2} = \frac{Mg}{R^2}$, donc l'accélération ou la chute des corps à la surface de la planète M

en une seconde $= \frac{M \varpi^2}{\rho^2} g = \frac{\Delta \rho}{\varpi} g$.

§. 62. Résumons les formules précédentes. Si l'on nomme M la masse d'une planète, Δ sa densité, C son volume, par rapport à la terre, J l'année sidérale, i le mois sidéral, t la durée d'une révolution d'un satellite autour de la planète principale, T celle de cette planète autour du soleil, Π la parallaxe de la lune, ϖ celle du soleil, ρ le sinus du demi-diamètre apparent de la planète à la distance moyenne du soleil, δ le sinus de l'angle sous lequel le rayon de l'orbite du satellite est vu du centre du soleil à la moyenne distance de la planète, μ le même rayon divisé par le demi-

diamètre de la planète, G la chute des corps à la surface de la planète en une seconde, et $1 + \frac{☾}{\delta} = \frac{60}{59} = \nu$, on aura par ce qui précède,

$$(1) \ldots \frac{\delta}{☉} = \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{J}{i}\right)^2 \left(\frac{\varpi}{\Pi}\right)^3, \quad (2) \ldots \frac{M}{☉} = \frac{\delta^3 \left(\frac{\Gamma}{t}\right)^2}{1 - \delta^3 \left(\frac{T}{t}\right)^2};$$

$$(3) \ldots C = \frac{\rho^2}{\varpi^3}, \quad (4) \ldots \Delta = \frac{M}{C}, \quad (5) \ldots G = \frac{\Delta \rho}{\varpi} g.$$

Les valeurs numériques des masses de la terre, de Jupiter, Saturne, et Uranus, ont été calculées sur les formules (1) et (2) (§. 60.), d'où il est aisé de conclure les valeurs de C, Δ, G, à l'aide des formules (3) (4) (5): on les trouvera dans la table (§. 65.). Il faut substituer à g (5) l'espace que les corps parcourraient sur la terre en une seconde, si la pesanteur n'était pas diminuée par la force centrifuge, due à la rotation; et cet espace est $g = 2174,95$ lignes ou 15,1 pieds de France [1].

§. 63. Les formules précédentes ne sont pas applicables à la lune; mais les perturbations que la terre éprouve par l'action de son satellite, sont si considérables, à cause de sa proximité, qu'elles peuvent servir à déterminer la force ou la masse de la lune dont elles dépendent. Ces perturbations sont de deux espèces: les unes sont proprement du ressort de l'astronomie, ainsi que la nutation, la précession, etc. les autres sont des effets physiques, dont le plus important, le plus frappant, et le mieux connu est le flux et reflux de la mer. On sait que la force attractrice de la lune élève et abaisse les eaux de l'océan deux fois par jour, et il est aisé de voir que le soleil doit produire un effet semblable, quoique moins sensible, à cause de sa grande distance. On a observé que les plus grandes et les plus petites marées arrivent un jour et demi après les syzygies et les quadratures, parce que dans le premier cas, les forces de la lune et du soleil agissent dans le même sens, tandis que dans le second cas elles sont opposées l'une à l'autre. En nommant donc x, y, ces deux forces, le rapport des marées dans les syzygies et dans les quadratures donnera celui de $x + y$ à $x - y$, d'où il est aisé de conclure la force et la masse de la lune, celle du soleil étant connue. Mais les

(1) Voy. *Bouguer, figure de la terre, Sect. VII.* §. 25.

circonstances locales peuvent considérablement augmenter ou diminuer la grandeur des marées. M. de Laplace trouve par la comparaison d'un grand nombre d'observations, que la masse de la lune est $\frac{1}{68}$ de celle de la terre. D'un autre côté on a conclu de la nutation, où l'action de la lune est aussi combinée avec celle du soleil, que la masse lunaire n'est que $\frac{1}{88}$. Dans la table qu'on trouvera (§. 65.), on a pris le milieu $\frac{1}{78}$. Si l'on nomme D le demi-diamètre apparent, et Π la parallaxe de la lune, son volume par rapport à la terre sera $C = \frac{D^3}{\Pi^3} = (0,27293)^3$ (II. §. 214.) $= 0,0203308$. Sa densité sera $\frac{M}{C} = \frac{1}{1,5858024} = 0,6306 = \Delta$, et la pesanteur à la surface de la lune, $G = \frac{D}{\Pi} \Delta g = 0,27293 \times 0,6306 \times 15,1 = 0,172109 \cdot g = 2,5989$ pieds.

§. 64. A l'égard des autres planetes il faut avoir recours à l'analogie. Pour peu qu'on ait étudié la nature, on doit être frappé par les analogies et proportions qui se présentent partout, là même où l'on s'y attend le moins. Il est donc à présumer, que la nature a suivi certaines lois et proportions dans la distribution des masses qui forment les corps célestes; et en cherchant ces lois, on considéra d'abord la *densité* des planètes, qui ne paraît dépendre que du rapport des distances (§. 61.). Les densités de Jupiter et de Saturne sont à celle de la terre, comme 1 à 4 et 1 à 10, ce qui est à peu près le rapport inverse des distances au soleil, 1 à 5,2 et 1 a 9,54. En prenant pour base cette loi, adoptée par Lagrange ([1]), on trouvera la densité de Mercure $= 2,58332 = \Delta$. Connaissant le demi-diamètre apparent à la distance moyenne du soleil, $\varrho = 3'', 3$; on aura le volume $C = \frac{\varrho^3}{\varpi^3} = 0,0565$; la masse $M = C\Delta = 0,145958$, et la pesanteur $G = \frac{\varrho}{\varpi} \Delta g = 0,991274 \cdot g = 14,9682$ pieds. Mais ces valeurs sont très-incertaines, parce qu'on ne voit aucune raison physique de la règle, sur laquelle elles sont fondées, et de laquelle Uranus, dont la densité surpasse celle de Saturne, s'écarte sensiblement.

Vénus et Mars approchent assés de la terre, pour qu'il a été possible de déterminer leurs masses par les perturbations de l'orbite terrestre, et principalement par la diminution de l'obliquité de l'écliptique, qui résulte

(1) *Mém. de Berlin*, 1782. *pag.* 188.

de leur action. Leurs masses par rapport au soleil, sont suivant M. de Laplace, $\frac{♂}{⊙} = \frac{1}{2546320}$, $\frac{♀}{⊙} = \frac{1}{356632}$, suivant M. Burckhardt, $\frac{♂}{⊙} = \frac{1}{2673637}$, $\frac{♀}{⊙} = \frac{1}{396257}$. M. de Lindenau a conclu des perturbations que l'orbite de Mercure éprouve par l'action de Vénus, $\frac{♀}{⊙} = \frac{1}{349444}$. Nous avons pris le milieu

$$\frac{♂}{⊙} = \frac{1}{2610000}, \quad \frac{♀}{⊙} = \frac{1}{367440}.$$

§. 65. La table suivante renferme les résultats des règles précédentes.

Par rapport à la Terre

	Masse	Volume	Densité	Chute des graves en 1″
⊙	354790	1395323	0,25427	28,4133 = 429,04 pieds
♅	18,1906	81,3418	0,22363	0,96896 = 14,63 —
♄	100,3911	994,9507	0,10090	1,0073 = 15,21 —
♃	332,4838	1281,4	0,25947	2,8183 = 42,56 —
♂	0,13593	0,14327	0,94883	0,4965 = 7,50 —
♀	0,96557	0,88281	1,09375	1,0492 = 15,84 —
☿	0,14596	0,0565	2,58332	0,9913 = 14,97 —
☾	0,01282	0,02033	0,6306	0,1721 = 2,60 —

Par rapport au Soleil

	Masse	Volume	Densité	Chute des graves en 1″
♅	$\frac{1}{19504}$	$\frac{1}{17153,8}$	0,8795	0,0341 = $\frac{1}{29,3}$
♄	$\frac{1}{3534,08}$	$\frac{1}{1402,4}$	0,39682	0,0355 = $\frac{1}{28,2}$
♃	$\frac{1}{1067,09}$	$\frac{1}{1088,9}$	1,02044	0,0992 = $\frac{1}{10,1}$
♂	$\frac{1}{2610000}$	$\frac{1}{9739407}$	3,73158	0,0175 = $\frac{1}{57,2}$
♁	$\frac{1}{354790}$	$\frac{1}{1395323}$	3,93281	0,0352 = $\frac{1}{28,4}$
♀	$\frac{1}{367440}$	$\frac{1}{1580550}$	4,30152	0,0369 = $\frac{1}{27,1}$
☿	$\frac{1}{2025810}$	$\frac{1}{24696091}$	10,1597	0,0349 = $\frac{1}{28,7}$
☾	$\frac{1}{27673626}$	$\frac{1}{68631078}$	2,48	0,0061 = $\frac{1}{165,1}$

La seule quantité absolue que renferme la table précédente, est la chute des graves à la surface des planètes, exprimée en pieds de France. Pour les masses et densités, la table ne donne que des rapports. On y voit par ex. que le soleil a 354790 fois plus de masse que la terre, et que celle-ci est quatre fois plus dense que le soleil; mais elle n'indique pas la quantité de masse contenue dans chacun de ces globes, et l'on ne sait pas si la terre entière est plus ou moins compacte que l'eau ou l'or. On a essayé de déterminer cela de la manière suivante. Puisque l'attraction en raison directe des masses et en raison inverse du carré de la distance est une propriété générale de tous les corps, on parviendrait à connaître la masse de la terre, si l'on pouvait mesurer l'attraction, exercée par un corps dont la masse et la grandeur sont connues. Il est aisé de voir, que cette masse doit être fort grande, afin que son attraction soit sensible par rapport à celle de la terre, ou à la pesanteur: on a donc choisi, pour cet effet, les grandes masses des montagnes, et l'attraction latérale qu'elles exercent sur le fil-à-plomb d'un quart-de-cercle, dont la moindre déviation de la position verticale devient sensible, par les observations de la hauteur méridienne d'une étoile qui passe à peu près par le zénit. Si l'on a observé cette hauteur au nord et au sud d'une montagne, et qu'on ait réduit les deux hauteurs à une seule, en les corrigeant par la différence de latitude entre les deux points où l'on a fait les observations, la différence qui se trouvera entre les deux hauteurs malgré cette correction, sera l'effet de l'attraction de la montagne sur le fil-à-plomb; et il est visible, que ce petit angle peut servir à déterminer le rapport entre les attractions de la montagne et de la terre. Or, si l'intérieur de la montagne est assés uniforme, et sa forme extérieure assés régulière, il est aisé de mesurer son volume, sa masse, et sa densité; d'où l'on conclura celle de la terre, les distances étant connues. C'est ainsi que Bouguer en Amérique, et Maskelyne en Ecosse, ont trouvé la densité moyenne de la terre deux fois plus grande que celle des montagnes, auprès desquelles ils avaient fait ces observations, ou quatre à cinq fois plus grande que la densité de l'eau. La terre étant aussi quatre fois plus dense que le soleil, il s'en suit que la densité moyenne du soleil est à peu près égale à

celle de l'eau. Si ce résultat était sûr, on aurait une mesure absolue, qui servirait à déterminer la densité et la masse de tous les corps du système solaire, à l'aide des rapports donnés dans la table précédente. Mais ceci même ne serait, rigoureusement parlant, qu'un rapport, parce que nous ignorons la densité absolue de l'eau.

LIVRE IV.

DE LA ROTATION DES CORPS CÉLESTES.

CHAPITRE I.

Lois générales de rotation.

§. 66. La rotation d'un corps autour d'un de ses diamètres paraît d'abord très-simple; et celle des corps célestes, si l'on fait abstraction des perturbations à peine sensibles, est si uniforme et régulière, qu'il ne faut presqu'aucun calcul pour la déterminer; cependant si elle est examinée rigoureusement et dans tout son détail, elle donne lieu à des recherches plus compliquées, que le mouvement de translation. La figure sphérique, et la densité à peu près uniforme des corps célestes, nous permettent de les regarder, relativement à leur mouvement progressif, comme des points matériaux, ce qui simplifie singulièrement sa théorie. Mais il est impossible de concevoir seulement leur rotation, sans les regarder comme des corps, et sans tenir compte de leur figure, de leur densité, de la position de leur axe, etc. ce qui rend ces recherches difficiles et compliquées.

Le mouvement d'un *point* ne peut être que progressif; celui d'un *corps* peut être une *translation*, une *rotation*, ou un mouvement *composé* de l'une et de l'autre. Ce n'est qu'une simple translation, lorsque tous les élémens

du corps ont le même mouvement, la même vitesse suivant des directions parallèles, et que par conséquent le mouvement du corps entier sera annullé, si tous ses élémens sont conçus être également accélérés suivant une direction contraire, de sorte que tous les points du corps n'ont aucun mouvement relatif entre eux, mais qu'ils paraissent être en repos, vus d'un point quelconque de ce corps. Il s'en suit que, le mouvement d'un seul point étant donné, on connaît celui du corps entier, et que par conséquent on peut le regarder comme un point.

Pour se former une idée distincte de la *rotation* d'un corps, il faut faire abstraction de son mouvement de translation. Si les diverses parties d'un corps se meuvent suivant différentes directions, et avec des vitesses différentes, on peut concevoir un mouvement qui tient le milieu entre tous ces mouvemens partiels, et qui est proprement la translation du corps: en supposant que ce mouvement *moyen* est communiqué à toutes les molécules suivant la direction contraire, le mouvement qui restera, sera la rotation du corps; la portion du corps, qui n'avait que le mouvement moyen, demeurera en repos, et les autres points auront un mouvement relatif ou de rotation autour de cette portion. Une rotation aura donc lieu, quand quelques points du corps ont un mouvement absolu qui diffère de celui des autres points; si dans un pareil cas, une certaine partie du corps est dans un repos absolu, le mouvement du corps sera une pure rotation sans translation; mais il sera composé de l'une et de l'autre, si tous les points du corps sont dans un mouvement absolu. Il en résulte la règle générale, qu'une rotation a lieu, lorsque les lieux apparens de tous les points, relativement à un point quelconque du corps, ne sont pas invariables, ensorte que la longitude ou la latitude des points dans la surface d'un corps céleste, vue de son centre, ou leur lieu apparent relativement aux étoiles fixes varie. Il en suit, que la lune tourne sur son axe, dans le même tems dans lequel elle fait une révolution autour de la terre; en effet, comme elle tourne constamment le même côté vers la terre, la longitude sélénocentrique de ses taches qui sont dirigées vers la terre, et par conséquent celle de toutes les autres, varie de 180 degrés dans un demi-mois.

§. 67. La loi d'*inertie*, dont nous n'avons fait usage que relativement aux points matériels, peut aisément être appliquée à des corps entiers. Si tous les points d'un corps se meuvent avec la même vitesse, suivant des directions parallèles, ce mouvement uniforme de translation sera toujours invariable, à moins qu'il ne soit troublé par des forces étrangères. En effet, comme un pareil mouvement ne change point la position des molécules relativement aux autres, leur cohésion ne peut avoir aucune influence sur le mouvement: toutes les molécules se mouvant, comme si elles étaient séparées l'une de l'autre, avec la même vitesse et suivant la même direction, elles ne s'empêchent nullement les unes les autres: d'où il suit qu'après leur réunion en un seul corps, leur mouvement sera également rectiligne et uniforme, et il ne peut être interrompu que par des forces étrangères. Pour voir, comment ces forces doivent être constituées, examinons d'abord celles qui produisent une pure translation sans rotation. Comme cela suppose, que tous les élémens du corps ont un mouvement parallèle et la même vitesse, il faut nécessairement que chaque élément soit sollicité par une force parallèle et proportionnelle à sa masse, ou que la résultante de toutes les forces qui agissent sur le corps, soit équivalente à ces forces élémentaires.

Pour mettre en mouvement un corps *solide*, il n'est pas nécessaire, que les forces mouvantes soient appliquées à chacun de ses élémens: en vertu de la cohésion, une force qui n'agit immédiatement que sur un seul point, sera répandue sur tout le corps, en accélérant chaque élément; mais comme la force doit être distribuée uniformément parmi tous les élémens, c'est-à-dire à proportion de leurs masses, le point auquel la force est appliquée, n'est pas indifférent. Pour trouver ce point, on peut renverser la question, en se proposant ce problème: tous les élémens étant accélérés par des forces, parallèles et proportionnelles à leurs masses, trouver le point du corps, où doit être appliquée la force moyenne, qui est équivalente à la totalité de ces forces élémentaires, de sorte qu'elle leur fera équilibre, lorsqu'elle y est appliquée dans le sens contraire. Il est visible que ce point ne saurait être que le *centre de gravité*, auquel on donne ici le nom de *centre d'inertie* ou

de la masse: car le premier est trouvé dans la statique de la même manière, en substituant la pesanteur aux forces parallèles en général.

Une impulsion ou *force qui passe par le centre de gravité, ne peut communiquer au corps qu'un mouvement de translation sans rotation*: car elle a le même effet, qu'auraient des forces qui solliciteraient chaque élément suivant la même direction et à proportion de sa masse. Quel que soit le nombre et la nature des forces, on peut toujours trouver leur résultante: d'où il suit que, si la résultante de toutes les forces qui agissent sur le corps, passe par son centre de gravité, elles ne lui communiqueront qu'un mouvement de translation sans rotation.

§. 68. L'inverse de la proposition précédente est également vraie: si la direction moyenne des forces ne passe pas par le centre de gravité, une rotation du corps aura lieu. Supposons qu'une force égale et contraire à la force moyenne soit appliquée au centre de gravité: cette force ne peut produire aucune rotation (§. 67.); cependant il est visible, que les deux forces ensemble doivent nécessairement tourner le corps autour du centre de gravité qui est mis en repos par la force fictive: par conséquent la vraie force seule donnera aussi au corps un mouvement de rotation autour de son centre de gravité. La rotation la plus simple est celle, où le corps tourne avec une vitesse uniforme, sur un axe invariable et en repos. En ce cas la vitesse angulaire est constante, et la même pour tous les élémens: par conséquent les uns n'empêchent pas les autres, et le mouvement est libre, comme si chaque élément le faisait séparément. Une pareille rotation continuera donc suivant la loi d'inertie, si elle a duré un instant; mais il faut examiner, comment elle peut naître.

On a vu qu'un corps, sollicité par une force qui ne passe pas par son centre de gravité, prendra un mouvement de rotation, parceque ses élémens sont différemment accélérés. En vertu de la loi d'inertie, chaque élément décrirait, s'il était libre, non pas un cercle, comme la rotation le suppose, mais la tangente, et les élémens dont l'accélération est plus ou moins grande que celle des autres, s'éloigneraient de ceux-ci et de l'axe, s'ils n'étaient retenus par la cohésion du corps: il en résulte une rotation,

mais en même tems, suivant la loi de réaction, une pression sur l'axe; et cette pression est la seule cause qui puisse troubler l'uniformité de la rotation, en faisant abstraction des causes étrangères. Pour que cette perturbation soit nulle, il faut nécessairement que l'un des deux cas suivans ait lieu: ou que l'axe soit affermi ou retenu par des forces, propres à résister aux pressions; ou que toutes les pressions se détruisent réciproquement, en ne communiquant à l'axe qu'un mouvement de translation. Dans le premier cas, l'axe de rotation est appelé *fixe*, dans le second cas c'est un axe *libre*, parce qu'il n'a pas besoin d'être retenu. Il est visible que le dernier cas est proprement l'objet des recherches astronomiques.

§. 69. Lorsqu'un corps tourne autour d'un axe, tous ses élémens décrivent des cercles dont les plans sont perpendiculaires à l'axe: leurs vitesses angulaires sont égales, et les vitesses réelles sont proportionnelles aux distances de l'axe. Soit (*Fig.* 9.) AB l'axe, M un élément du corps, MC, NC, perpendiculaires à AB, donc MCN le plan du cercle que M décrit autour de C. En nommant le rayon $CM = CN = r$, l'arc $MN = \partial s$, qui est décrit pendant le tems ∂t, l'angle $MCN = \partial \Phi$; la vitesse angulaire de tous les élémens sera $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \gamma$, et la vitesse réelle de l'élément $M = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{r \partial \Phi}{\partial t} = r\gamma = c$. Si Mn, Nm, sont perpendiculaires, et Nn parallèle à CM, on peut regarder l'arc MN comme la diagonale du parallèlogramme $MnNm$. L'élément M suivrait la tangente Mn, s'il n'était pas retenu suivant MC par un fil ou par la cohésion du corps: il aura donc deux mouvemens, Mn et Mm, et la force suivant MC fait parcourir à l'élément M l'espace $Mm = nN$ dans le tems ∂t. En nommant donc cette force $= C$, et la masse de l'élément $= \partial M$, on aura (§. 17.)

$$Mm = \frac{C}{\partial M} g \partial t^2, \text{ et } MN^2 \text{ ou}$$

$$\partial s^2 = Mm^2 + mN^2 = Mm^2 + Mm(2r - Mm) = 2r \cdot Mm, \text{ donc}$$

$$Mm = \frac{\partial s^2}{2r} = \frac{C}{\partial M} g \partial t^2, \text{ ou } C = \frac{\partial M \cdot \partial s^2}{2 g r \partial t^2} = \frac{c^2 \partial M}{2 g r} = \frac{\gamma^2}{2g} r \partial M.$$

C'est la quantité absolue de la force qui tire l'élément M vers C, et qui, en vertu de la réaction, pousse l'axe suivant CM. La pression C, ou l'effort que l'axe éprouve par la rotation de chaque élément, est appelé la for-

ce *centrifuge* de cet élément: sa direction CM ou CN est constamment perpendiculaire à l'axe. On peut donner à la dernière équation cette forme $\frac{Cg}{\partial M} = \frac{c^2}{2r}$, d'où il suit, que l'accélération de la force centrifuge, ou l'espace parcouru en une seconde en vertu d'elle, est la troisième proportionnelle au diamètre ($2r$) du cercle que l'élément décrit, et à sa vitesse (c). La même accélération est $= \frac{1}{2} r\gamma^2$.

§. 70. Soit (*Fig.* 10.) AB une *ligne* matérielle qui tourne autour du point fixe C avec la vitesse angulaire γ, soit M sa masse, son centre de gravité en G; cela posé, chaque élément M dont la masse est ∂M, et la distance au point fixe $CM = r$, exercera une force centrifuge $C = \frac{\gamma^2}{2g} r\partial M$ (§. 69.): par conséquent, la force centrifuge de la ligne entière sera $\frac{\gamma^2}{2g} \int r\partial M$. Mais $r\partial M$ est le *moment statique* de l'élément M relativement au point C, et $\int r\partial M$ est celui de la ligne entière ou de son centre de gravité, partant $\int r\partial M = CG.M$, et la force centrifuge de la ligne entière, $C = \frac{\gamma^2}{2g} CG.M$. Si la ligne tourne autour du centre de gravité, on a $CG = 0$, $C = 0$, et l'axe de rotation qui passe par G n'éprouve aucune pression, d'où il suit, que toute ligne matérielle peut tourner *librement* autour de son centre de gravité. On voit en même tems, que c'est le seul cas où la rotation *libre* soit possible, parce que la force centrifuge C ne peut être nulle, à moins que CG ne soit nul.

Si un *plan* matériel, dont la masse est M, tourne sur un axe perpendiculaire en C, on aura pour chacun de ses élémens (§. 69.), $\partial C = \frac{\gamma^2}{2g} r\partial M$, partant la force centrifuge du plan entier, $C = \frac{\gamma^2}{2g} \int r\partial M = \frac{\gamma^2}{2g} CG.M$, $\int r\partial M$ étant le moment statique du plan, ou de son centre de gravité G, relativement à l'axe C. La force centrifuge C est donc nulle dans le seul cas, où l'axe passe par le centre de gravité, CG étant nul, d'où il suit, que tout plan matériel peut tourner *librement* autour d'un axe perpendiculaire qui passe par son centre de gravité, sans que cet axe éprouve aucune pression. Si l'axe de rotation passe par un point C qui n'est pas le centre de gravité, l'axe ou le point C doit être retenu par une force égale à $\frac{\gamma^2}{2g} CG.M$. Si l'axe est retenu dans un autre point D, la pression sur C produira une rotation de l'axe autour de D, à moins qu'il ne soit retenu encore dans un

autre point: il faut donc que l'axe soit appuyé au point C, ou dans deux points quelconques.

§. 71. Une masse quelconque, qui tourne sur un axe fixe, peut être partagée en un nombre infini de plans matériels d'une épaisseur évanouissante, qui sont perpendiculaires à l'axe; et ce qui vient d'être prouvé, doit être dit de chacun de ces plans. Chaque point de l'axe éprouve, par l'action du plan qui passe par ce point, une pression perpendiculaire, qui est égale au produit de la masse du plan par la distance de son centre de gravité à l'axe (§. 70.). Si l'axe passe par le centre de gravité d'un plan, la pression de ce plan est nulle; donc, si l'axe passe par les centres de gravité de tous les plans, il n'éprouvera aucun éffort, et le corps peut tourner *librement* autour de cet axe. Mais ce cas ne peut avoir lieu que lorsque tous les centres de gravité sont sur une même ligne droite, par ex. si le corps est un solide de révolution, dont la densité est uniforme ou une fonction de la distance à l'axe. Dans d'autres cas l'axe éprouvera une pression vers chaque centre de gravité, qui est situé hors de l'axe. Ces centres de gravité peuvent être situés de tous les côtés de l'axe, tellement que leurs pressions se détruisent réciproquement; mais comme elles passent par différens points de l'axe, elles le tourneront autour d'un certain point, à moins que leurs momens statiques, relativement à ce point et à tout autre point de l'axe, ne se détruisent en même tems. Il est aisé de voir, que cela ne peut arriver, que lorsque l'axe passe par le centre de gravité du corps entier, mais qu'il est impossible que chaque axe passant par le centre de gravité soit un axe *libre*, à moins que le corps ne soit régulier, et sa densité uniforme. Les recherches sur cet objet ont enfin donné le résultat, que toute masse, quelle que soit sa figure et formation, *a du moins trois axes libres*, qui se coupent perpendiculairement au centre de gravité. Cette découverte importante est le fondement de la théorie de la rotation, qui fera l'objet des recherches suivantes.

§. 72. Si un corps dont la masse est M, tourne autour de l'axe AB (*Fig.* 11.) avec la vitesse angulaire v, chaque elément Z dont la masse est ∂M, et la distance à l'axe $ZX = r$, exercera sur l'axe, suivant la direction

perpendiculaire XZ, la pression $\frac{u^2}{2g} r\partial M$ (§. 69.), et la pression du corps entier sur l'axe est $\frac{u^2}{2g} \int r\partial M$. Il en résulte qu'en faisant abstraction des forces étrangères, l'axe ne peut être *libre*, que dans le cas où $\int r\partial M = o$, c'est-à-dire où le moment statiqne du corps entier ou de son centre de gravité, relativement à l'axe AB, est nul: chaque axe libre doit nécessairement passer par le centre de gravité, mais il n'en suit pas que toutes les lignes passant par ce centre soient des axes libres. La force centrifuge $\int r\partial M$ peut être nulle, si chaque pression $r\partial M$ d'un élément Z est détruite par la pression contraire d'un autre élément P. Si les masses Z et P sont comme QP et XZ, qui sont supposées parallèles entre elles, la pression de Z sera $\frac{u^2}{2g}$ XZ.Z $= p$, et celle de P $= \frac{u^2}{2g}$ QP.P $= p$, ensorte que l'une détruit l'autre; et de cette manière, la somme entière $\int r\partial M$ peut devenir nulle. Mais la pression p suivant XZ a le moment AX.p, pour faire tourner l'axe AB autour d'un point A, tandis que le moment de la pression de P pour faire tourner l'axe dans le sens contraire QP, est AQ.p: l'axe tournera donc autour du point A suivant XZ, en vertu du moment QX.p, s'il n'est pas retenu. Pour qu'il soit un axe libre, il ne suffit pas que $\int r\partial M$ soit nul; mais tous les momens statiques des forces élémentaires $r\partial M$, relativement à un point quelconque A de l'axe, doivent se détruire réciproquement. Si l'on fait $AX = x$, le moment de chaque élément, pour faire tourner l'axe autour du point A, sera $px = \frac{u^2}{2g} xr\partial M$: il faut donc satisfaire à ces deux conditions, $\int r\partial M = o$ et $\int xr\partial M = o$, pour que AB soit un axe libre. La première condition est nécessaire, afin que l'axe ne reçoive pas un mouvement de translation, perpendiculaire à sa longueur; la seconde est nécessaire, afin que l'axe ne tourne pas autour d'un point A. L'équation $\int xr\partial M = o$ indique, que le moment de toutes les forces $r\partial M$, relativement au point A, est nul, ou que la pression moyenne $\int r\partial M$ passe par A. Si donc $\int r\partial M$ n'est pas nul, le corps éprouvera en A une pression $\int r\partial M$, perpendiculaire à AB; mais si $\int r\partial M$ est aussi nul, la force résultante est nulle, et le corps n'éprouve aucun effort.

Soit ABGC le plan par AB et le centre de gravité G, ZY perpendiculaire à ce plan, YX et GH perpendiculaires à AB, et qu'on nomme

$$AX = x, \quad XY = y, \quad YZ = z.$$

Par la nature du centre de gravité (§. 51.), la somme de tous les momens, relativement au plan ABGC est nulle, et le moment du centre de gravité, relativement à l'axe AB, et à la droite AC qui lui est perpendiculaire, est égal à la somme des momens de tous les élémens Z, par rapport aux mêmes lignes: on a donc

$$\int x\partial M = AH.M, \quad \int y\partial M = HG.M, \quad \int z\partial M = o.$$

La pression élémentaire suivant XZ, $\frac{u^2}{2g} r\partial M$, pourra être décomposée en deux autres, $\frac{u^2}{2g} y\partial M$ et $\frac{u^2}{2g} z\partial M$, suivant XY et YZ; en faisant donc, pour abréger, $\frac{u^2}{2g} = \gamma$, la pression totale sera équivalente aux forces, $\gamma \int y\partial M$ parallèle à AC, et $\gamma \int z\partial M$ perpendiculaire au plan ABGC. Chaque force élémentaire $\gamma y\partial M$ a un moment pour faire tourner l'axe autour du point A suivant XY, qui est égal au produit de la force par sa distance $AX = \gamma xy\partial M$: il y aura donc dans la ligne AB un certain point E, auquel la somme de toutes les forces élémentaires $\gamma \int y\partial M$ étant appliquée, aura le même moment par rapport à AC, que toutes ces forces ensemble ($\gamma \int xy\partial M$); ce qui donne l'équation

$$AE.\int y\partial M = \int xy\partial M, \quad AE = \frac{\int xy\partial M}{\int y\partial M}, \quad \text{et la force } EF = \gamma \int y\partial M.$$

Il en est de même des forces YZ ou XV: si l'on fait $AI = \frac{\int xz\partial M}{\int z\partial M}$, la force $IK = \gamma \int z\partial M$, appliquée en I, aura le même moment pour faire tourner l'axe autour de A suivant IK, que toutes les forces YZ ensemble. Or $\int z\partial M$ étant nul, si le plan des x, y, passe par le centre de gravité, la force IK sera nulle, et la distance AI infinie, à moins que $\int xz\partial M$ ne soit nul en même tems; si le plan des x et y ne passe pas par le centre de gravité, la force IK ou $\int z\partial M$ n'est pas nulle.

Il suit de ce qui précède que l'axe des abscisses x éprouve les mêmes pressions, qu'elle éprouverait, si une force $\gamma \int y\partial M = \gamma . HG . M$, parallèle aux y, était appliquée dans le point E, éloigné de l'origine des abscisses de $AE = \frac{\int xy\partial M}{\int y\partial M}$, et une force évanouissante à une distance infinie, où si le plan des x, y, ne passe pas par le centre de gravité, une force $\gamma \int z\partial M$ à la distance $AI = \frac{\int xz\partial M}{\int z\partial M}$: les momens des forces EF et IK, pour faire

tourner l'axe autour de A, sont $\gamma \int xy \partial M$ et $\gamma \int xz \partial M$. Pour que l'axe ne reçoive point de mouvement de rotation, et qu'il n'éprouve aucune pression, de manière que le corps peut tourner *librement* autour de cet axe, sans qu'il soit retenu, il faut que non-seulement les deux forces précédentes, mais aussi leurs momens soient nuls: d'où l'on tire

$$\int y \partial M = 0, \quad \int z \partial M = 0, \quad \int xy \partial M = 0, \quad \int xz \partial M = 0.$$

Les deux premières équations indiquent, que l'axe libre doit passer par le centre de gravité; les deux autres déterminent celui des diamètres passant par ce centre, qui est un axe libre. Si les deux dernières équations ont lieu sans les premières, l'axe ne passe point par le centre de gravité; mais la moyenne direction de toutes les forces centrifuges passe par A: car on aura $AE = \frac{\int xy \partial M}{\int y \partial M} = 0$, et $AI = \frac{\int xz \partial M}{\int z \partial M} = 0$. Dans ce cas, le point A seul a besoin d'être retenu; dans tout autre cas, il faut retenir deux points de l'axe.

§. 73. Chaque mouvement de rotation, imprimé à un corps, durera sans cesse en vertu de la loi d'inertie, si l'axe de rotation est libre ou suffisamment appuyé. La rotation que le corps a reçue par un choc ou une force étrangère, peut se faire de deux manières. Le corps peut être affermi en deux points, ou il est abandonné à lui-même: dans le premier cas il ne peut tourner qu'autour de la droite qui joint ces deux points, dans le second cas l'axe de rotation sera déterminé par les forces mêmes.

L'axe étant donné, toutes les forces qui agissent sur le corps, peuvent être décomposées suivant deux directions, l'une étant parallèle à l'axe, l'autre dans un plan perpendiculaire à l'axe. Soit (*Fig.* 12.) AB l'axe, PQ la direction d'une force V, inclinée relativement à AB d'une manière quelconque. Ayant mené par un point quelconque P, PR parallèle à AB, et par un point arbitraire R dans cette ligne, un plan perpendiculaire à PR, qui coupe PQ en Q; la force PQ est décomposée en PR et RQ, dont l'une est parallèle à l'axe, et l'autre dans un plan qui lui est perpendiculaire. La première force ne peut pas faire tourner le corps autour de l'axe AB; son seul effet consiste à pousser l'axe suivant sa longueur, ou à faire tourner le corps et l'axe même autour d'un point dans cet axe, mais la dernière fera tourner le corps autour de l'axe AB: la pression de la première se trouvera facilement.

Supposons que la force $PQ = V$ (*Fig.* 13.) soit dans le même plan que l'axe AB, sans lui être parallèle, de sorte que sa direction rencontre l'axe dans un point C: alors l'axe éprouvera le même effort, que si la force était appliquée en C suivant CD qui est la prolongation de PQC. En nommant l'angle que la direction de la force fait avec l'axe, $DCE = \eta$, et décomposant la force $CD = V$ suivant CE et ED ou CF, on aura deux forces $CE = V\cos\eta$ et $CF = V\sin\eta$. Pour trouver la pression que l'axe éprouvera en deux points donnés A, B, on n'a qu'à chercher les forces qui, étant appliquées en A et B, seront en équilibre avec les forces CE et CF. La première n'agit sur l'axe que suivant sa longueur AB, au lieu que la seconde CF ferait tourner l'axe suivant AP, s'il était retenu en B, et suivant BR, s'il était appuyé en A. Etant donc retenu en ces deux points, l'axe éprouvera en A la pression P suivant AP, et en B la pression Q suivant BR. Concevons que l'axe soit retenu en C avec la force $CF = V\sin\eta$, et que les forces AS, BQ, égales et opposées aux pressions P, Q, soient appliquées en A, B: cela posé, il suit de la théorie du lévier, que l'équilibre aura lieu, si les momens des forces P et Q, par rapport au point C, sont égaux, et qu'en même tems la somme des forces CF, AS, est égale à la force BQ. Or les forces P et AS, Q et BQ, étant aussi en équilibre, la pression de l'axe sera la même, que si la force CF agissait seule. En nommant donc $AB = a$, on aura

$$CA.P = CB.Q, \text{ et } Q = V\sin\eta + P;$$

d'où l'on tire $P + V\sin\eta = \frac{CA}{CB}P$, ou

$$P = \frac{CB.V\sin\eta}{CA - CB} = \frac{BQ\cos\eta}{a}V, \text{ et } Q = \frac{CA.V\sin\eta}{CA - CB} = \frac{AP\cos\eta}{a}.V.$$

Si PQ est parallèle à AB, l'angle η est nul, et $AP = BQ = b$ sera la distance de la direction de la force V à l'axe, qui éprouvera alors ces trois forces ou pressions:

1. suivant sa longueur AB, la force $V\cos\eta = V$,
2. en A suivant AP, la force $= \frac{b}{a}V$,
3. en B suivant la direction contraire BR, la même force $\frac{b}{a}V$.

§. 74. Quant aux forces qui agissent dans des plans, perpendiculaires à l'axe, commençons par le cas le plus simple, lorsque toutes les forces sont dans le même plan, et en équilibre, de manière qu'il n'y aura point de rotation: dans un pareil cas l'axe éprouvera le même effort, que si chaque force était imprimée à l'axe même, parallèlement à sa direction. Si deux forces P, Q, suivant Pp, Qq (*Fig.* 14.), qui tendent à faire tourner autour du point C le plan PQC, perpendiculaire à l'axe ACB, sont en équilibre, on a $CP.P = CQ.Q$, CP et CQ étant perpendiculaires aux directions des forces. La commune section D de ces directions peut être regardée comme l'origine des deux forces: leur résultante passera donc par D, et sa direction Dd sera déterminée par les angles $PDd = \alpha$ et $QDd = \beta$. Ayant donc mené Pd parallèlement à Qq, on aura $PdD = \beta$, et

$$P : Q :: PD : Pd :: \sin\beta : \sin\alpha.$$

En joignant DC, on a

$$\sin PDC : \sin QDC :: CP : CQ :: Q : P :: \sin\alpha : \sin\beta,$$

et $PDC + QDC = \alpha + \beta$, d'où il suit

$$PDC = \alpha \text{ et } QDC = \beta;$$

c'est-à-dire, les droites Dd et DC coïncideront, et la résultante des deux forces P, Q, passera par C. L'axe AB éprouvera donc le même effort, que si une seule force agissait en C suivant DC ou sa prolongation CE: il en serait de même, si les forces P, Q, étaient appliquées en C suivant CF et CG, parallèlement à leurs directions Pp et Qq; car on a également $ECF = \alpha$ et $ECG = \beta$. Si l'on y ajoute une troisième force R suivant Rr, ce cas peut être ramené au précédent, où il n'y a que deux forces, Dd et Rr, et ainsi de suite. Quel que soit donc le nombre de ces forces, l'axe éprouvera le même effort, que si chacune était imprimée à l'axe même.

Dans le cas de l'équilibre on déterminera donc facilement la pression de l'axe, en supposant que chaque force est appliquée à l'axe même, et cherchant, suivant les principes de la statique, la direction et la grandeur de la résultante de toutes ces forces. Pour ce qui regarde le cas, où les forces font tourner le corps, on le réduira aisément au cas précédent par une fiction, en imaginant des forces opposées qui, en rétablissant l'équilibre, tien-

nent le corps en repos, mais qui doivent être de nature, à n'exercer aucune pression sur l'axe, parce qu'autrement il résulterait une nouvelle pression inconnue, outre celle qu'on cherche. Cela posé on a le cas précédent, et la pression qu'éprouve l'axe, ne diffère pas de celle qui a lieu dans le cas de la rotation. On trouvera donc cette pression, comme ci-dessus, en concevant que toutes les forces, c'est-à-dire, les forces étrangères qui font tourner le corps, aussi bien que les forces fictives qui détruisent la rotation, sont appliquées à l'axe même dans son intersection avec le plan des forces, chacune suivant sa direction.

§. 75. Supposons que chaque élément Y d'un plan matériel DCE (*Fig.* 15.), auquel l'axe AB est perpendiculaire en C, soit sollicité par une force P, suivant la direction YZ, perpendiculaire à CY dans le plan DCE, et que la force P soit telle qu'elle imprime à l'élément Y une vitesse angulaire autour de l'axe AB, égale mais opposée à celle que les forces étrangères V suivant V*v* impriment au corps entier: cela posé l'équilibre sera rétabli, et le plan restera en repos. Les forces fictives P, qui ont été nommées forces *élémentaires*, n'exerceront aucune pression sur l'axe, parce qu'elles ne font pas tourner le plan par une impulsion qui est répandue sur le plan en vertu de la cohésion, mais en agissant immédiatement sur chaque élément, et en les accélérant tous également, ensorte que les uns n'empêchent point le mouvement des autres, et que la cohésion du corps n'y a aucune influence. En cherchant donc (§. 74.) la pression que l'axe éprouve par l'action de toutes les forces étrangères V, et de toutes les forces élémentaires P, ou de leurs intégrales; on aura la pression que l'axe éprouve par l'action des forces V seules, dans le cas où le corps a un mouvement de rotation.

Toutes les forces étrangères qui agissent dans un plan perpendiculaire à l'axe AB, peuvent être réduites à une force moyenne $= V$. Si sa direction est V*v*, et qu'on ait abaissé la perpendiculaire $CV = f$ sur V*v*, le moment des forces V, pour faire tourner le plan autour de AB, sera $= Vf$. Supposons que la rotation du plan soit accélérée par cette force, ensorte que sa vitesse angulaire ϕ augmente dans le tems ∂t de $\partial \phi$: cela posé il faut que chaque force élémentaire imprime à son élément la même accélération

$\partial\phi$; d'ailleurs, afin que la totalité des forces élémentaires fasse équilibre à la force V, et qu'ainsi la rotation soit détruite, il est nécessaire que la somme de leurs momens statiques, par rapport à l'axe AB, soit égal au moment de la force $V = Vf$. Soit donc $CY = r$ la distance d'un élément quelconque $Y = \partial M$ à l'axe, soit $YX = y$ perpendiculaire à la droite CD qui passe par le centre de gravité G du plan, et $CX = x$: cela posé, l'élément ∂M recevra dans le tems ∂t, par la force élémentaire P, l'accélération $\frac{2gP}{\partial M}\partial t$ (§. 17. n. 3.), d'où il vient l'accélération angulaire $\frac{2gP}{r\partial M}\partial t = \partial\phi$: l'expression générale de chaque force élémentaire sera donc

$$P = \frac{\partial\phi}{2g\partial t} r\partial M.$$

Puisque $\frac{\partial\phi}{2g\partial t}$ a la même valeur dans toute l'étendue du plan, il s'en suit, que *chaque force élémentaire est proportionnelle au produit de la masse de l'élément par sa distance à l'axe.* Le moment de la force P, pour faire tourner le plan autour de AB, est $P \cdot r = \frac{\partial\phi}{2g\partial t} r^2\partial M$, proportionnel au produit de la masse par le carré de la distance. La somme de toutes les forces élémentaires est donc $= \frac{\partial\phi}{2g\partial t}\int r\partial M$, et la somme de tous les momens $= \frac{\partial\phi}{2g\partial t}\int r^2\partial M$, ce qui doit être égal à Vf. On a donc

$$\frac{\partial\phi}{2g\partial t} = \frac{Vf}{\int r^2\partial M}, \text{ et la somme des forces élémentaires} = \frac{Vf.\int r\partial M}{\int r^2\partial M}.$$

Mais comme ces forces ont des directions différentes, il faut décomposer chaque force P en deux autres p, q, suivant les directions Yz et zZ qui sont parallèles à XC et XY. Or $ZYz = 90° - CYz = CYX$, et $YZz = YCX$: on a donc les forces

$$\text{suivant } Yz \text{ ou } XC = P \sin YCX = \frac{Py}{r} = \frac{\partial\phi}{2g\partial t} y\partial M = p,$$

$$\text{suivant } zZ \text{ ou } XY = \frac{Px}{r} = \frac{\partial\phi}{2g\partial t} x\partial M = q;$$

d'où l'on conclura la somme de ces forces élémentaires,

$$\text{suivant XC, } \Sigma.p = \frac{Vf.\int y\partial M}{\int r^2\partial M},$$

$$\text{suivant XY, } \Sigma.q = \frac{Vf.\int x\partial M}{\int r^2\partial M}.$$

Mais chaque force p a un autre moment, pour faire tourner le plan autour de l'axe suivant Yz: ce moment est le produit de p par la distance XY

de la direction Yz à l'axe AB, donc py. On trouvera de même le moment de la force $q = qx$. Ainsi on aura la somme des momens des forces élémentaires, pour faire tourner le plan,

$$\text{suivant } Yz = \Sigma . py = Vf . \frac{\int yy\,\partial M}{\int rr\,\partial M},$$

$$\text{suivant } XY = \Sigma . qx = Vf\, \frac{\int xx\,\partial M}{\int rr\,\partial M}.$$

Chaque somme de ces forces parrallèles $\Sigma . p$ et $\Sigma . q$, peut être réduite à une force moyenne, dont le moment, relativement à AB, doit être égal à la somme des momens, $\Sigma . py$ et $\Sigma . qx$. Supposons que Ee et Ff soient les directions moyennes de toutes les forces p et q, nommons E, F, les forces moyennes, et menons CE parallèle à XY, et partant perpendiculaire à CX et Ee: cela posé on aura $E = \Sigma . p$, $F = \Sigma . q$, et leurs momens $CE . E = \Sigma . py$, $CF . F = \Sigma . qx$, d'où il suit

$$E = \frac{Vf . \int y\,\partial M}{\int rr\,\partial M},\ F = \frac{Vf . \int x\,\partial M}{\int rr\,\partial M},\ CE = \frac{\int y^2\,\partial M}{\int y\,\partial M},\ CF = \frac{\int x^2\,\partial M}{\int x\,\partial M}.$$

§. 76. Les trois forces $Vv = V$, $Ee = E$, $Ff = F$, sont en équilibre dans un plan, perpendiculaire à l'axe, ce qui est le cas du §. 74. On trouvera donc la pression que l'axe éprouve par l'action des forces étrangères V, lorsque la rotation a lieu, en concevant les trois forces précédentes appliquées à l'axe même: les pressions de l'axe seront donc $C\gamma = V$, $C\delta = E$, $C\varepsilon = F$, $C\delta$ étant la prolongation de CD, $C\varepsilon$ perpendiculaire à CD, et $C\gamma$ parallèle à la direction moyenne Vv des forces étrangères V. Comme $\int x\,\partial M$ et $\int y\,\partial M$ sont les momens statiques du plan entier ou de son centre de gravité, par rappòrt aux axes CE et CD, on aura $\int y\,\partial M = 0$ et $E = 0$, si l'axe des abscisses CD passe par le centre de gravité G: alors l'axe n'éprouvera que les pressions $C\gamma = V$ et $C\varepsilon = F = \frac{V . f . CG . M}{\int rr\,\partial M}$. Si CE passe aussi par le centre de gravité, le point C sera ce centre, et l'on aura $\int x\,\partial M = 0$ et $F = 0$; d'où il suit que la seule pression qu'éprouve un axe AB qui passe par le centre de gravité, est celle des forces étrangères V, comme si elles étaient appliquées à l'axe même. Il en suit encore, qu'un plan matériel, étant sollicité par une impulsion ou force, qui le fait tourner autour d'un axe passant par le centre de gravité, éprouvera la même impulsion au centre de gravité suivant une direction parallèle, d'où il résultera, outre la

rotation, un mouvement de translation du plan entier. Si la direction Vv de la force V passe effectivement par le centre de gravité C, on a $f=0$, et le moment, pour faire tourner le plan, est nul: par conséquent le plan recevra un pur mouvement de translation sans aucune rotation.

Pour que l'axe de rotation soit un axe *libre*, qui n'éprouve aucun effort, il faut que les trois forces V, E, F, se détruisent réciproquement, ce qui suppose que l'axe ne passe pas par le centre de gravité. Si la force $C\eta = H$ est la résultante des forces E, F, l'axe n'éprouvera aucune pression dans le seul cas, où $C\eta$ est la prolongation de γC, et $H = V$. Si g est le centre de gravité du plan, on a

$$\int x\partial M = CG \,.\, M, \qquad \int y\partial M = Gg \,.\, M, \text{ et}$$

$$H = \sqrt{(E^2+F^2)} = \frac{V.f.M}{\int r^2 \partial M} \,.\, \sqrt{(CG^2+Gg^2)} = \frac{V.f.M.Cg}{\int rr\partial M} = V, \text{ donc}$$

$$f = \frac{\int r^2 \partial M}{M.Cg} = \frac{\int r^2 \partial M}{\int r\partial M}.$$

On a d'ailleurs $\text{tang}\, \delta C\eta = \frac{F}{E}$, et $\delta C\eta = DC\gamma = 90° - DCV$, partant

$$\text{tang}\, DCV = \frac{E}{F} = \frac{\int y\partial M}{\int x\partial M} = \frac{Gg}{CG} = \text{tang}\, DCg,$$

c'est-à-dire CV coïncide avec Cg, et CV passe par le centre de gravité; d'où il suit que, pour que la force V n'exerce aucun effort sur l'axe, elle doit être perpendiculaire à la droite, menée du centre de gravité perpendiculairement à l'axe, et la distance de sa direction à l'axe doit être $f = \frac{\int r^2 \partial M}{M.Cg}$. On voit donc, que la fonction $\int rr\partial M$ est d'une grande importante dans cette théorie: on appelle cette fonction le *moment d'inertie* du plan ou du corps par rapport à l'axe AB; le moment d'inertie n'est donc autre chose que la somme des produits de la masse de chaque élément par le carré de sa distance à l'axe. Or $Cg.M = \int r\partial M$ étant le *moment statique* du corps relativement au même axe, la distance de la direction de la force à l'axe libre doit être égale au moment d'inertie, divisé par le moment statique. Cette distance $f = \frac{\int r^2 \partial M}{\int r\partial M}$ est identique avec ce qu'on appelle, sous un autre point de vue, la *distance du centre d'oscillation* à l'axe ACB.

Si ces deux conditions sont remplies, ensorte que $CV = f = \frac{\int r^2 \partial M}{\int r\partial M}$ passe par le centre de gravité, l'axe passant par C perpendiculairement à CV n'éprouvera aucun effort, et l'on aura (§. 75.)

$$\frac{\partial \Phi}{2g\,\partial t} = \frac{V.f}{\int r^2 \partial M} = \frac{V}{\int r \partial M} = \frac{V}{M.Cg}.$$

Cela posé le centre de gravité g, dans lequel on peut concevoir réunie la masse entière M, sera accéléré par la force $\frac{V}{M} = \frac{Cg.\partial\Phi}{2g\partial t}$. En nommant donc v la vitesse du centre de gravité, et u sa vitesse angulaire, on aura (§. 17. n. 3.)

$$\partial v = \frac{2gV}{M}\partial t = Cg.\partial\Phi, \quad u = \frac{v}{Cg}, \text{ et } \partial u = \partial\Phi = \frac{2Vg\partial t}{M.Cg}.$$

§. 77. Il est visible, que les raisonnémens précédens peuvent être appliqués à une masse quelconque. Toutes les forces, dont les directions sont dans un même plan, peuvent être réduites à une seule, dont il est aisé de déterminer le moment par les principes de la statique; ainsi qu'on vient de le voir: la somme de tous ces momens donne le moment total Vf, qui fait tourner le corps sur son axe, en lui communiquant dans le tems ∂t la vitesse angulaire $\partial u = \partial\Phi$ (§. 76.). Soit CABKY un plan quelconque passant par l'axe AB (*Fig.* 16.), Z un élément $= \partial M$, soient AD, ZY, perpendiculaires à ce plan, YX et Zz perpendiculaires à AB et à XZ, et nommons

$$AX = x,\ XY = y,\ YZ = z,\ XZ = r,\ \frac{\partial\Phi}{2g\partial t} = \alpha,$$

et le moment d'inertie du corps entier $\int r^2 \partial M = J$.

Cela posé, la force élémentaire suivant la direction Zz, opposée à la rotation, sera (§. 75.) $P = \alpha r \partial M$, $\alpha = \frac{Vf}{J}$, donc $P = \frac{Vfr\partial M}{J}$. En décomposant chaque force P en deux autres p et q, suivant Zx et xz, parallèlement à y et z, on aura

$$p = P\cos xZz = P\sin xZX = P\sin YXZ = \frac{z}{r}P = \frac{Vfz\partial M}{J},$$

$$q = P\sin xZz = P\cos YXZ = \frac{y}{r}P = \frac{Vfy\partial M}{J}.$$

Les momens de la force p, par rapport aux plans CAD et BAC, sont px et pz; ceux de q par rapport aux plans CAD et BAD sont qx et qy. On a donc la somme de tous les momens des forces p,

relativement au plan des y, z, $\Sigma.px = \frac{Vf}{J}\int xz\partial M$,

et relativement au plan des x, y, $\Sigma.pz = \frac{Vf}{J}\int zz\partial M$;

la somme des momens des forces q,

par rapport au plan des y, z, $\Sigma . qx = \frac{Vf}{J} \int xy \partial M$,

et au plan des x, z, $\Sigma . qy = \frac{Vf}{J} \int yy \partial M$.

Toutes les forces parallèles p peuvent être composées en une seule $Pp = P$, parallèle à YX et CA, et égale à $\Sigma . p$: les momens de cette résultante, par rapport aux plans CAD et BAC, doivent être égaux à $\Sigma . px$ et à $\Sigma . pz$. Il en est de même de la force moyenne $Qq = Q$, qui est équivalente aux forces q. Supposons que les directions des forces Pp, Qq, rencontrent les plans BAD et BAC en P et en Q, et que PE, QF, soient perpendiculaires à l'axe AB: cela posé on aura, par ce qui précède,

$P = \Sigma . p$, $AE . P = \Sigma . px$, $EP . P = \Sigma . pz$, $Q = \Sigma . q$, $AF . Q = \Sigma . qx$, $FQ . Q = \Sigma . qy$,

donc
$$P = \frac{Vf}{J} \int z \partial M, \quad AE = \frac{\int xz \partial M}{\int z \partial M}, \quad EP = \frac{\int zz \partial M}{\int z \partial M},$$
$$Q = \frac{Vf}{J} \int y \partial M, \quad AF = \frac{\int xy \partial M}{\int y \partial M}, \quad FQ = \frac{\int yy \partial M}{\int y \partial M}.$$

L'axe de rotation éprouvera donc, outre les pressions de toutes les forces étrangères V, encore celles de P suivant Pp, et de Q suivant Qq; et toutes ces forces agiront dans des plans différens, mais perpendiculaires à l'axe AB.

Quel que soit le nombre des forces V, leur totalité est en équilibre avec les deux forces P, Q: donc, si l'on décompose chaque force V en deux autres, u, v, suivant AC, et Cc ou DA, chacune des forces u fera équilibre à une portion de la force P, et chaque force v à une portion de Q. Chacune de ces combinaisons présentera le cas, où deux forces parallèles entre elles, et agissant dans deux plans différens qui sont perpendiculaires à l'axe, font équilibre l'une à l'autre: voyons ce qui en résulte. Si Pp, Qq, (*Fig.* 17.) représentent deux forces parallèles P, Q, dont les momens par rapport à l'axe AB sont égaux, et que AP, BQ, soient perpendiculaires aux directions Pp, Qq, on a $AP . P = BQ . Q$. Soit $AC = BQ$, et concevons que quatre forces, parallèles et égales à la force Q, agissent en A, B, C, Q, suivant Aa, Bb, Cc, Qk: cela posé, les résultantes des forces Aa, Qk, et de Bb, Cc, passeront par le centre du rectangle AQ suivant des directions contraires; par conséquent ces quatre forces seront en équilibre, et leurs pressions sur l'axe se détruiront réciproquement; d'où il suit que les trois

forces Aa, Bb, Cc, font équilibre à la force Qk: elles seront donc équipollentes à la force Qq qui est égale et opposée à Qk, et l'on peut lui substituer ces trois forces. L'effet sera donc le même, que si les quatre forces Aa, Bb, Cc, Pp, agissaient. Les deux dernières sont dans un plan, perpendiculaire à AB, et en équilibre, parce que $AC.Cc = BQ.Q = AP.P$: elles exerceront donc la même pression, que si elles étaient appliquées à l'axe même en A (§. 74.). Alors les forces Aa, Cc, se détruiront, et il ne restera qu'une force en A, et une autre en B, la première étant égale et parallèle à P, l'autre à Q: d'où il suit que deux forces, agissant dans différens plans, perpendiculaires à l'axe, exerceront la même pression, que si chacune était imprimée au point même, où son plan coupe l'axe.

Ce qui vient d'être prouvé de chaque combinaison de deux forces, sera donc aussi vrai de toutes les forces V, P, Q. L'axe éprouvera le même effort, que si chaque force étrangère V était appliquée à l'axe même, dans son intersection avec le plan, perpendiculaire à l'axe et passant par la direction de V, et qu'en outre les forces $P = \frac{Vf}{J} \int z\partial M$ et $Q = \frac{Vf}{J} \int y\partial M$ fussent appliquées en E et F, parallèlement à $-y$ et à z, aux distances $AE = \frac{\int xz\partial M}{\int z\partial M}$ et $AF = \frac{\int xy\partial M}{\int y\partial M}$, leurs directions E$e$, F$f$, étant opposées à la rotation du corps. En multipliant chaque force V par la distance de sa direction à l'axe, on aura son moment; et la somme de tous ces momens donnera le moment Vf, pour faire tourner le corps autour de l'axe AB.

Le plan des x, y, BAC, étant arbitraire, on peut le faire passer par le centre de gravité du corps; alors on aura $\int z\partial M = 0$, $P = 0$, et il n'y aura que les forces V et Q. Si l'axe de rotation AB passe aussi par le centre de gravité, on a $\int y\partial M = 0$ et $Q = 0$: l'axe n'éprouvera donc que la pression des forces étrangères V.

§. 78. Chaque force, quelle que soit sa direction, peut être décomposée en deux autres, dont l'une est parallèle, et l'autre perpendiculaire à l'axe (§. 73.). La première se décompose en trois forces, dont l'une sollicite l'axe suivant sa longueur, les deux autres étant perpendiculaires à l'axe, et opposées l'une à l'autre (§. 73.). Or toutes les autres forces étant pareillement perpendiculaires à l'axe, elles ne peuvent pas détruire celles qui

agissent suivant la longueur de l'axe: il est donc impossible, que l'axe n'éprouve aucun effort, à moins que toutes les forces n'agissent dans des plans perpendiculaires à l'axe, ou que toutes celles qui sollicitent l'axe suivant sa longueur, ne se détruisent réciproquement; dans le cas contraire, l'axe doit être appuyé suivant sa longueur, par une force égale à la somme ou à la différence des forces parallèles à l'axe. Toutes les autres forces agissent dans des plans perpendiculaires à l'axe, et quand on ne considère que la pression de l'axe, on peut les concevoir appliquées suivant leurs directions, au point de l'axe où il est coupé par ces plans (§. 77.). Il faut enfin concevoir, que les forces élémentaires, ou leurs deux intégrales $Ee = P$ et $Ff = Q$ (§. 77.), sont imprimées à l'axe: la totalité de ces forces déterminera la pression de l'axe.

Pour simplifier ces recherches, nous réduirons toutes les forces à deux points A, B, de l'axe (*Fig.* 16.), en cherchant l'effort que l'axe éprouvera dans ces deux points. Soit Vy la direction d'une des forces V perpendiculaires à l'axe, U la commune section de l'axe avec le plan VyU qui lui est perpendiculaire, et Uv parallèle à Vy: cela posé, VU et Uv seront perpendiculaires à l'axe AB qui éprouvera la pression $Uv = V$. Il en résultera en A et B des pressions parallèles à Uv ou Vy qui, en faisant $AB = a$, seront

$$AM = \frac{BU}{a} V \text{ et } BN = \frac{AU}{a} V.$$

La force élémentaire $Ee = P$ donnera de même en A et B les pressions

$$Aa = \frac{BE}{a} P = A, \quad Bb = \frac{AE}{a} P = B,$$

et la force $Ff = Q$ donnera les pressions

$$A\alpha = \frac{BF}{a} Q = \alpha, \quad B\beta = \frac{AF}{a} Q = \beta;$$

et en substituant les valeurs de P, Q, AE, AF (§. 77.),

$$A = \frac{Vf}{aJ} \int (a-x) z \partial M, \; B = \frac{Vf}{aJ} \int x z \partial M, \; \alpha = \frac{Vf}{aJ} \int (a-x) y \partial M, \; \beta = \frac{Vf}{aJ} \int x y \partial M.$$

Toutes les forces AM, Aa, $A\alpha$, peuvent être réduites à une seule; et il en est de même des forces qui agissent en B.

§. 79. Dès que la rotation a effectivement lieu, il en résultera des forces centrifuges qu'il faut ajouter aux précédentes. Si l'on nomme u la

vitesse angulaire de la rotation autour de l'axe AB, il éprouvera en A et B les pressions suivantes.

1. Les *forces étrangères* qui sollicitent le corps, dont chacune V sera décomposée en deux autres, dont l'une $= U$ est parallèle à l'axe, et l'autre $= W$ suivant Vy lui est perpendiculaire. La force U se décompose en trois autres (§. 73.), dont l'une $= U$ sollicite l'axe suivant sa longueur AB ou BA, et les deux autres exercent sur l'axe en A et B des pressions perpendiculaires dans le plan qui passe par l'axe et la force U: ces pressions sont égales à $\frac{b}{a}$ U (§. 73.), et opposées l'une à l'autre; elles feront donc tourner l'axe AB autour de son milieu. La force $Vy = W$ agit sur l'axe, comme si elle était perpendiculaire à l'axe en U (§. 77.); d'où il résulte en A et B des pressions AM, BN, parallèles à Uv et Vy, qui sont, en nommant $AU = u$ (§. 78.),

$$AM = \frac{a-u}{a} W, \quad BN = \frac{u}{a} W.$$

Chacune des forces W exerce un effort pour faire tourner le corps autour de AB suivant Vy, et l'on trouve ce moment, en abaissant sur Vy la perpendiculaire $Uy = w$, et multipliant W par w. Après avoir réduit de cette manière chacune des forces W à deux forces parallèles en A et B, on trouvera aisément la grandeur et la direction des deux résultantes, AM′ et BN′. La somme de tous les momens Ww donne le moment Vf de toutes les forces étrangères, pour faire tourner le corps sur l'axe AB: en faisant donc $\frac{Vf}{J} = k$, on connait $Vf = \Sigma . Ww$, $J = \int r^2 \partial M$, et $k = \frac{Vf}{J}$.

2. Si les forces étrangères V, au lieu d'être en équilibre, font tourner le corps, elles exerceront sur l'axe encore une autre pression qui est déterminée par la fiction des *forces élémentaires*, lesquelles peuvent être réduites à deux forces intégrales, appliquées à l'axe même, et opposées à la rotation, savoir (§. 77.)

$$Ee = P = k \int z \partial M, \quad Ff = Q = k \int y \partial M,$$

d'où résultent en A et B les forces (§. 78.)

$$Aa = A = \frac{k}{a} \int (a - x)\, z \partial M, \quad A\alpha = \alpha = \frac{k}{a} \int (a - x)\, y \partial M,$$

$$Bb = B = \frac{k}{a} \int x z \partial M, \quad B\beta = \beta = \frac{k}{a} \int x y \partial M.$$

3. Les *forces centrifuges* qui résultent de la rotation, peuvent aussi être réduites à deux forces intégrales, appliquées à l'axe même (§. 72.) (*Fig.* 11.), savoir

$$EF = E = \frac{u^2}{2g} \int y \partial M \text{ à la distance } AE = \frac{\int xy \partial M}{\int y \partial M} = e, \text{ et}$$

$$IK = H = \frac{u^2}{2g} \int z \partial M \text{ à la distance } AI = \frac{\int xz \partial M}{\int z \partial M} = h.$$

Il en résulte en A (*Fig.* 16.) les forces

$$Am \text{ ou } AC = \frac{a-e}{a} E = \frac{u^2}{2ag} \int (a-x)\, y \partial M = m,$$

$$A\alpha = \frac{a-h}{a} H = \frac{u^2}{2ag} \int (a-x)\, z \partial M = \mu,$$

et en B les forces

$$Bn = \frac{e}{a} E = \frac{u^2}{2ag} \int xy \partial M = n, \quad B\beta = \frac{h}{a} H = \frac{u^2}{2ag} \int xz \partial M = \nu.$$

L'axe éprouvera donc en général les pressions suivantes.

I. Suivant sa longueur AB ou BA, la somme de toutes les forces U.

II. En A,

1. autant de forces $\frac{a-x}{a}$ W, qu'il y a de forces étrangères, dont chacune a une autre direction AM, leur direction moyenne étant AM';
2. suivant Aa, la force $A - m = k \int z \partial M - \frac{u^2}{2g} \int y \partial M + \frac{u^2}{2ag} \int xy \partial M - \frac{k}{a} \int xz \partial M$;
3. suivant Aα, la force $\alpha + \mu = k \int y \partial M + \frac{u^2}{2g} \int z \partial M - \frac{u^2}{2ag} \int xz \partial M - \frac{k}{a} \int xy \partial M$;
4. autant de forces $\frac{b}{a}$ U, perpendiculaires à l'axe, qu'il y a de forces U, dont chacune a une autre direction; leur moment par rapport à l'axe étant nul.

III. En B,

1. autant de forces $BN = \frac{x}{a}$ W, qu'il y a de forces étrangères, dont la direction moyenne est BN';
2. suivant Bb, la force $B - n = \frac{k}{a} \int xz \partial M - \frac{u^2}{2ag} \int xy \partial M$;
3. suivant Bβ, la force $\beta + \nu = \frac{k}{a} \int xy \partial M + \frac{u^2}{2ag} \int xz \partial M$;
4. les forces $\frac{b}{a}$ U, égales et opposées à celles en A (II. 4.)

Toutes les forces, appliquées en A ou B, seront réduites, suivant les préceptes de la statique, à une seule force moyenne; ensorte que la pression

de l'axe sera entièrement déterminée par trois forces, dont l'une sollicite l'axe suivant sa longueur, les deux autres étant perpendiculaires à l'axe en A et B.

§. 80. Les forces centrifuges sont perpendiculaires à l'axe; mais elles agissent dans le plan de l'axe, et leur direction passe par un de ses points: leur moment, pour faire tourner le corps autour de l'axe, est donc nul, et leur effet consiste à solliciter l'axe, ou à lui imprimer un mouvement de translation, perpendiculaire à sa longueur. Les forces élémentaires sont un être idéal qu'on a imaginé, pour déterminer une partie de la pression de l'axe; si elles existaient seules, elles imprimeraient au corps une rotation, égale et opposée à celle que lui communiquent les forces étrangères. Les forces U, parallèles à l'axe, le sollicitent suivant sa longueur, et suivant une direction perpendiculaire; mais elles n'ont aucun moment par rapport à l'axe: elles ne pourront donc avoir d'autre effet, que de solliciter l'axe suivant sa longueur, ou de faire tourner l'axe autour d'un de ses points O, sans faire tourner le corps autour de cet axe. Il ne reste donc pour la rotation que les forces W, dont chacune a le moment $W.w$, pour faire tourner le corps autour de l'axe AB: la somme $\Sigma.Ww$ donne le moment Vf. Supposons qu'avant que les forces étrangères V commençaient à agir, le corps ait tourné uniformement autour de l'axe AB avec la vitesse angulaire γ, et qu'au bout du tems t, γ se change en υ; cela posé on aura (§. 76.)

$$\partial\upsilon = \frac{2Vfg\,\partial t}{\int r^2\,\partial M}.$$

En nommant Φ l'angle que le corps décrit par sa rotation, dans le tems t, on aura $\upsilon = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$, donc $\partial\upsilon = \frac{\partial\partial\Phi}{\partial t}$, et $\partial\partial\Phi = \frac{2Vfg\,\partial t^2}{\int r^2\,\partial M}$, d'où l'on tirera

$$\upsilon\partial\upsilon = \frac{\partial\Phi\,\partial\partial\Phi}{\partial t^2} = \frac{2Vfg\,\partial\Phi}{\int r^2\,\partial M},$$

donc l'intégrale donnera, pour un instant quelconque, la vitesse angulaire υ, et l'angle décrit Φ, la constante étant déterminée ensorte que υ soit $=\gamma$, et $\Phi = 0$, lorsque t est nul.

CHAPITRE II.

Rotation autour d'un axe libre.

§. 81. On appelle *axe libre* celui autour duquel le corps peut tourner avec une vitesse quelconque, sans que l'axe soit appuyé, qui par conséquent n'éprouve aucun effort. Si le corps est sollicité par des forces étrángères, dont la résultante ne passe pas par le centre de gravité, il tournera librement, du moins pendant quelque tems, autour d'un axe quelconque, qui pourrait être nommé libre, mais seulement par rapport aux forces données: chaque corps aurait alors une infinité d'axes libres, et chaque axe serait tantôt libre, et dans d'autres cas il ne le serait pas. Ainsi, pour fixer les idées, il faut entendre sous un axe libre celui qui n'éprouve aucun effort par la rotation, si le corps n'est pas sollicité par des forces étrangères. Dans un pareil cas, toutes les forces V, U, W, et les forces élémentaires qui leur sont opposées, disparaissent (§. 79. n. 1. 2.), et il ne reste que les forces centrifuges (§. 79. n. 3.), savoir, en faisant pour abréger, $\frac{u^2}{2ag} = \alpha$, les forces

$$Am \text{ ou } m = \alpha \int (a - x)\, y\, \partial M, \quad A\alpha \text{ ou } \mu = \alpha \int (a - x)\, z\, \partial M,$$

$$Bn \text{ ou } n = \alpha \int xy\, \partial M, \quad B\beta \text{ ou } \nu = \alpha \int xz\, \partial M,$$

les intégrales se rapportant au corps entier, où α est une quantité constante. Or ces pressions n'étant pas opposées l'une à l'autre, l'axe ne peut être libre, que dans le cas où chacune de ces pressions est nulle. La position des axes libres est donc déterminée par ces équations:

$$\int y\, \partial M = 0, \quad \int z\, \partial M = 0, \quad \int xy\, \partial M = 0, \quad \int xz\, \partial M = 0.$$

Il suit des deux premières, que chaque axe libre doit passer par le centre de gravité; les deux dernières nous apprennent, qu'un axe peut passer par

le centre de gravité, sans être libre, et elles déterminent la position des diamètres, passant par le centre de gravité, qui sont des axes libres (§. 72.). Puis donc que chaque axe libre AB passe par le centre de gravité, nous prendrons ce centre pour l'origine des abscisses x, de sorte qu'on aura aussi $\int x\partial M = 0$.

§. 82. Si AB. (*Fig.* 18.) est un axe passant par le centre de gravité A, et que la nature du corps soit donnée par une équation entre les coordonnées rectangles

$$AX = X,\ XY = Y,\ YZ = Z,$$

on connaît les intégrales

$$\int XX\partial M = A,\ \int YY\partial M = B,\ \int ZZ\partial M = C,$$
$$\int XY\partial M = D,\ \int XZ\partial M = E,\ \int YZ\partial M = F.$$

Soit AF un axe libre, et qu'on prenne les abscisses x sur AF, les ordonnées y, z, perpendiculaires à AF: cela posé, on aura (§. 81.)

$$\int xy\partial M = 0 \text{ et } \int xz\partial M = 0.$$

Ayant mené par AF un plan perpendiculaire au plan des X, Y, qui le coupe en AE, les angles $BAE = \eta$, $EAF = \theta$, détermineront la position de l'axe AF. En nommant $AX' = X'$, $X'Y = Y'$, $YZ = Z'$, les coordonnées rectangles de l'élément Z, rapportées à l'axe des abscisses AE, et prolongeant YX' jusqu'à sa rencontre avec l'axe AB en P, on aura $XYP = 90^\circ - APX' = \eta$, $XP = Y \tang \eta$, $YP = Y \sec \eta$, partant

$$X' = AP \cos\eta = X\cos\eta + Y\sin\eta,$$
$$Y' = Y\sec\eta - X'\operatorname{tg}\eta = Y\cos\eta - X\sin\eta,\ Z' = Z.$$

Si Zy et $X'y$ sont parallèles à YX' et YZ, $X'y$ sera dans le plan EAF, et coupera AF dans un point z; Zy sera perpendiculaire au plan EAF. Ayant donc abaissé dans ce plan la perpendiculaire yx à AF, dont la prolongation rencontre AE en v, on aura les coordonnées $Ax = x$, $xy = y$, $yZ = z$. Mais $AzX' = xzy = 90^\circ - \theta$, et $xyz = \theta$, partant

$$x = Av.\cos\theta = X'\cos\theta + X'y \tang\theta\cos\theta = X'\cos\theta + Z\sin\theta,$$
$$y = vy - vx = Z\sec\theta - x\tang\theta = Z\cos\theta - X'\sin\theta, \text{ et } z = Y'; \text{ ou}$$
$$x = X\cos\eta\cos\theta + Y\sin\eta\cos\theta + Z\sin\theta,$$
$$y = Z\cos\theta - X\cos\eta\sin\theta - Y\sin\eta\sin\theta,\ z = Y\cos\eta - X\sin\eta;$$

d'où l'on tirera

$$xy = -\tfrac{1}{2} XX \cos^2\eta \sin 2\theta - \tfrac{1}{2} YY \sin^2\eta \sin 2\theta + \tfrac{1}{2} ZZ \sin 2\theta$$
$$- XY \sin\eta \cos\eta \sin 2\theta + XZ \cos\eta \cos 2\theta + YZ \sin\eta \cos 2\theta,$$
$$xz = - XX \sin\eta \cos\eta \cos\theta + YY \sin\eta \cos\eta \cos\theta$$
$$+ XY \cos\theta (\cos^2\eta - \sin^2\eta) - XZ \sin\eta \sin\theta + YZ \cos\eta \sin\theta.$$

En substituant cela dans les équations de condition, $\frac{\int x y \partial M}{\cos 2\theta} = 0$ et $\frac{\int x z \partial M}{\cos\theta} = 0$, on aura les équations suivantes:

$$0 = -\tfrac{1}{2} \operatorname{tang} 2\theta (A \cos^2\eta + B \sin^2\eta - C) - D \sin\eta \cos\eta \operatorname{tg} 2\theta + E \cos\eta + F \sin\eta,$$
$$0 = (B - A) \sin\eta \cos\eta + D(\cos^2\eta - \sin^2\eta) - E \sin\eta \operatorname{tg}\theta + F \cos\eta \operatorname{tg}\theta.$$

En faisant $\operatorname{tang}\eta = t$, la dernière équation donnera

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{(A - B) t + D (t^2 - 1)}{(F - E t) \sec\eta}, \text{ donc}$$

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{2 (F - E t) \{D t^2 + (A - B) t - D\} \sec\eta}{(F - E t)^2 \sec^2\eta - \{D t^2 + (A - B) t - D\}^2}.$$

On conclura de la première équation,

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{2 (E + F t) \sec\eta}{(B - C) t^2 + 2 D t + A - C}.$$

En comparant ces deux valeurs de $\operatorname{tang} 2\theta$, on aura une équation du cinqième degré, divisible par $\sec^2\eta = 1 + t^2$, ensorte que t sera donné par une équation du *troisième* degré. Il y a donc dans chaque corps, une ou trois valeurs réelles de $t = \operatorname{tang}\eta$, et par conséquent de $\eta = BAE$, après quoi on aura

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang} EAF = \frac{(A - B) \sin 2\eta - 2 D \cos 2\eta}{2 (F \cos\eta - E \sin\eta)},$$

équation qui donne toujours une valeur réelle de θ; et les angles η, θ, détermineront la position de l'axe libre AB qui existe dans chaque corps.

§. 83. Il s'agit maintenant d'examiner, si les trois racines de l'équation précédente sont réelles dans tous les cas. Supposons pour cet effet, que AB soit l'axe libre, trouvé par l'une des trois racines qui est toujours réelle, et que AF soit un autre axe libre, dont la position est cherchée au moyen des angles $BAE = \eta$, $EAF = \theta$. Si ces angles sont toujours possibles, il est prouvé que le corps a, outre l'axe AB, encore un autre axe libre AF, d'où il suit, que l'équation cubique a deux, et par conséquent trois racines réelles. Soient, comme ci-dessus, les coordonnées de l'élément $Z = \partial M$, par rapport à l'axe AB, X, Y, Z, celles relatives à l'axe AF, x, y, z:

cela posé, les valeurs des produits xy, xz, seront les mêmes que dans le §. 82. Or AB étant un axe libre, on a (§. 81.) $\int XY\partial M = D = 0$ et $\int XZ\partial M = E = 0$: AF sera donc aussi un axe libre, si les équations (§. 82.) $\int xy\partial M = 0$ et $\int xz\partial M = 0$, après y avoir substitué $D = 0$ et $E = 0$, donnent des valeurs réelles de η et θ. Or ces équations se transformeront en

$$\text{(A)} \ldots\ldots 0 = F \sin\eta - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang} 2\theta\,(A\cos^2\eta + B\sin^2\eta - C),$$

$$\text{(B)} \ldots\ldots 0 = F\cos\eta \operatorname{tg}\theta - (A - B)\sin\eta\cos\eta:$$

ce sont les deux équations de condition, pour le cas où AB et AF sont des axes libres. On satisfait à la dernière équation, en supposant $\cos\eta = 0$ ou $\eta = 90°$ et $\sin\eta = 1$. En substituant cette valeur dans la première équation, on trouvera

$$\text{(C)} \ldots\ldots \operatorname{tang} 2\theta = \frac{2F}{B - C},$$

ce qui donne deux valeurs, $\theta = EAF$ et $\theta' = EAF + 90°$, qui déterminent les deux autres axes. Puisque $BAE = \eta$ est un angle droit, et que les plans BAE, EAF, sont perpendiculaires l'un à l'autre, BAF est aussi un angle droit, d'où il suit que AB est perpendiculaire aux deux autres axes. Mais la différence entre les angles θ et θ' est aussi un angle droit: d'où il résulte ce théorème important, que *chaque corps a au moins trois axes libres, qui se coupent l'un l'autre perpendiculairement dans son centre de gravité* (§. 71). En concevant donc une surface sphérique autour du centre de gravité (*Fig.* 19.), qui est coupée par les trois axes libres en B, C, D, les arcs BC, BD, CD, seront des *quadrans*.

§. 84. Soient (*Fig.* 18.) AB, AC, AD, les trois axes libres, A le centre de gravité, d'où l'on compte, comme ci-dessus, les coordonnées de l'élément $Z = \partial M$, $AX = X$, $XY = X$, $YZ = Z$. Cela posé, les distances de l'élément Z aux axes AB, AC, AD, seront

$$ZX = R = \sqrt{(Y^2 + Z^2)},\quad ZH = r = \sqrt{(X^2 + Z^2)},\quad Y'A = \varrho = \sqrt{(X^2 + Y^2)}.$$

Les *momens d'inertie* du corps (§. 76.) seront donc, relativement

$$\text{(D)} \ldots \left\{\begin{array}{l} \text{à l'axe } AB = \int R^2\partial M = B + C = Maa, \\ \text{à l'axe } AC = \int r^2\partial M = A + C = Mbb, \\ \text{à l'axe } AD = \int \varrho^2\partial M = A + B = Mcc. \end{array}\right.$$

Outre ces trois équations entre A, B, C, on aura $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$.

Soient relativement à un autre axe quelconque AF, $Ax = x$, $xy = y$, $yZ = z$; alors le moment d'inertie par rapport à cet axe sera (§. 82.)

$$(E) \ldots\ldots \int (y^2 + z^2)\, \partial M = A\,(\sin^2 \eta + \cos^2 \eta \sin^2 \theta)$$
$$+ B\,(\cos^2 \eta + \sin^2 \eta \sin^2 \theta) + C \cos^2 \theta = Mkk.$$

Or on a pour chaque axe, situé dans le plan BAC, $\theta = 0$: le moment d'inertie relativement à un pareil axe sera donc

$$A \sin^2 \eta + B \cos^2 \eta + C = Mmm;$$

d'où il suit

$$Maa - Mmm = (B - A) \sin^2 \eta, \quad Mbb - Mmm = (A - B) \cos^2 \eta,$$
$$Mcc - Mmm = A \cos^2 \eta + B \sin^2 \eta - C,$$
$$Mkk - Mmm = (A \cos^2 \eta + B \sin^2 \eta - C) \sin^2 \theta.$$

Quelle que soit donc la valeur de η, ou la position du plan EAF, la différence entre les momens d'inertie par rapport à l'axe AE et à un autre axe quelconque AF dans le plan EAF, savoir $Mkk - Mmm$, sera un *maximum*, lorsque $\theta = 90°$, ou que AF coïncide avec l'axe libre AD; c'est-à-dire, la différence entre les momens d'inertie par rapport à AD et à AE, est plus grande que celle entre les momens par rapport à AD et à un autre axe quelconque AF, quelle que soit la position du plan EAF ou EAD: donc le moment par rapport à AD est plus ou moins grand que le moment par rapport à AF, selon qu'il est plus ou moins grand que relativement à AE; d'où il suit que le moment d'inertie par rapport à l'axe AD est un *maximum* ou *minimum*. Puisqu'on doit dire autant des deux autres axes AB, AC, on en conclura en général, que dans chaque corps, *le moment d'inertie relativement à chacun des trois axes libres est un maximum ou minimum*. Or le moment d'inertie ne pouvant devenir ni négatif ni infini, il en suit par la nature des fonctions, que ces trois momens seront *alternativement* des *maxima* et des *minima*, de sorte que le plus grand de tous les momens d'inertie dans le corps appartiendra à l'un des trois axes libres, et le plus petit de tous les momens appartiendra à un autre axe libre. Cela mérite encore quelque développement. Dans le cas où η est nul, AE coïncide avec AB. Alors, le moment par rapport à AF étant plus ou moins grand que celui par rapport à AB, le moment relatif à AD le sera à plus forte raison, ainsi qu'on vient

de le voir. Si donc les momens relatifs à AB et AD sont égaux, le même moment appartiendra à tous les axes dans le plan BAD: il en est de même des axes AB, AC, et AD, AC. Dans tous les cas on peut regarder un des trois axes libres, par ex. AB, comme celui auquel appartient le plus grand moment, et un autre, AD, comme celui qui a le plus petit moment; de sorte que $Maa > Mbb$, et $Mbb > Mcc$. Supposons donc $a^2 = c^2 + \alpha^2$, $b^2 = c^2 + \beta^2$, $c^2 = a^2 - \alpha^2$, $b^2 = a^2 - \gamma^2$; les différences α, ou β, ou γ, seront nulles, si deux, ou tous les trois momens sont égaux. Maintenant les équations (D) donnent

$$A = \tfrac{1}{2}M(b^2 + c^2 - a^2), \quad B = \tfrac{1}{2}M(a^2 + c^2 - b^2), \quad C = \tfrac{1}{2}M(a^2 + b^2 - c^2),$$

ce qui étant substitué dans la valeur (E) du moment relatif à un axe quelconque AF, donnera

$$Mkk = Maa\cos^2\eta\cos^2\theta + Mbb\sin^2\eta\cos^2\theta + Mcc\sin^2\theta,$$

et en substituant $a^2 = c^2 + \alpha^2$, $b^2 = c^2 + \beta^2$, et ensuite $b^2 = a^2 - \gamma^2$, $c^2 = a^2 - \alpha^2$,

$$Mkk = Mc^2 + M\alpha^2\cos^2\eta\cos^2\theta + M\beta^2\sin^2\eta\cos^2\theta, \text{ et}$$

$$Mkk = Ma^2 - M\gamma^2\sin^2\eta\cos^2\theta - M\alpha^2\sin^2\theta;$$

d'où il suit que tous les momens Mkk sont moindres que le plus grand, et plus grands que le plus petit des momens qui appartiennent aux trois axes libres: l'un de ces derniers momens sera donc un *maximum absolu*, et un autre sera un *minimum absolu*. Si les trois momens principaux, Ma^2, Mb^2, Mc^2, sont égaux, α, β, γ, sont nuls, et $Mk^2 = Ma^2 = Mc^2 = Mb^2$: donc tous les momens dans le corps entier sont égaux. Si deux momens sont égaux, par ex. $Ma^2 = Mb^2$ qui se rapportent aux axes AB, AC, γ est nul, et l'on a $Mkk = Ma^2 - Ma^2\sin^2\theta = Ma^2\cos^2\theta + Mc^2\sin^2\theta$, et en faisant $\theta = 0$, $Mk^2 = Ma^2 = Mb^2$; d'où il suit, que les momens, relatifs à tous les axes dans le plan BAC sont égaux: ce qui est d'ailleurs évident, parce que si Mk^2 était plus ou moins grand que Ma^2, la différence entre Ma^2 et Mb^2 serait encore plus grande. C'est à cause de ces propriétés remarquables, que ces axes ont été nommés *axes principaux* de rotation; on a vu que chaque corps a au moins trois axes principaux, perpendiculaires l'un à l'autre, et passant par le centre de gravité. Pour fixer les idées, nous supposerons constamment, que le moment Ma^2 qui se rapporte à l'axe AB, est le plus grand

de tous les momens, et que le moment Mc^2, relatif à l'axe AD, est le plus petit.

§. 85. On a vu que, pour un moment quelconque Mk^2, on a $k < a$ et $k > c$, d'où il suit $b < a$ et $b > c$. Les cas particuliers, qui paraissent être une exception de cette règle, seront d'une grande importance dans la suite. Si par ex. la nature du corps est telle que $B = C$, les momens $Mb^2 = A + C$ et $Mc^2 = A + B$ (§. 84.) (D), relatifs aux axes AC, AD, sont égaux. En faisant donc $\eta = 0$, on aura, à cause de $D = E = F = 0$, $\tang 2\theta = \frac{0}{0}$ (§. 83.) (C); l'angle θ est donc indéterminé, d'où il suit, que tous les axes qui passent par A dans le plan CAD, satisfont aux conditions des axes libres, et sont par conséquent des axes principaux; le moment par rapport à chacun de ces axes étant $Mb^2 = Mc^2$.

Si $A = B = C$, tous les trois momens principaux sont égaux, $Ma^2 = Mb^2 = Mc^2$ (§. 84. (D)). Alors l'équation (B) (§. 83.) donnera $\sin \eta = \frac{0}{0}$: ainsi les deux angles η et θ sont indéterminés, d'où il suit que tous les diamètres, passant par le centre de gravité, sont des axes principaux, ayant le même moment d'inertie, $A + B = A + C = B + C$. Il est donc prouvé que, dans le cas où les momens par rapport à deux ou trois axes principaux sont égaux, le corps a une infinité d'axes libres.

§. 86. Soit (*Fig.* 20.) AC l'axe d'un solide, formé par la révolution de la courbe AMB autour de AC, ensorte que toute section du corps, perpendiculaire à AC, est un cercle. Si l'on mène un plan par l'axe AC et un point quelconque M du corps, la commune section de ce plan et de la surface du corps sera la courbe génératrice AMB: ayant donc abaissé sur l'axe la perpendiculaire MX, la nature de la courbe AMB sera donnée par une équation entre les coordonnées $AX = x$, $XM = u$. Imaginons deux plans, perpendiculaires à AC, et passant par deux points M, m, très-peu distans entre eux: alors on aura un disque $MmxX$ d'une épaisseur évanouissante, dont les bases sont deux cercles parallèles des rayons XM et xm. Soit ∂M la masse d'un élément Z de ce disque: ayant mené $ZY = z$ et $YX = y$, perpendiculairement au plan AMC et à l'axe AC, on pourra regarder l'élément Z comme un parallélepipède, dont les trois côtés sont l'arc circulaire,

décrit dans le plan MZX du rayon $XZ = r$, et les droites ∂x, ∂r. En nommant donc l'angle $MXZ = \phi$, les trois côtés seront ∂x, ∂r, $r\partial\phi$. Comme la densité du corps est supposée uniforme, on peut l'égaler à l'unité, ce qui donnera

$$\partial M = r\partial r\partial x\partial\phi.$$

Mais on a $y = r\cos\phi$, $z = r\sin\phi$, d'où il vient (§. 82.)

$$A = \int x^2 r\partial r\partial x\partial\phi,\quad B = \int r^3\cos^2\phi\,.\,\partial r\partial x\partial\phi,\quad C = \int r^3\sin^2\phi\,.\,\partial r\partial x\partial\phi,$$

$$D = \int xr^2\cos\phi\,.\,\partial r\partial x\partial\phi,\; E = \int xr^2\sin\phi\,.\,\partial r\partial x\partial\phi,\; F = \int r^3\sin\phi\cos\phi\,.\,\partial r\partial x\partial\phi,$$

$$\int x\partial M = \int xr\partial r\partial x\partial\phi,\; \int y\partial M = \int r^2\cos\phi\,.\,\partial r\partial x\partial\phi,\; \int z\partial M = \int r^2\sin\phi\,.\,\partial r\partial x\partial\phi;$$

les intégrales devant s'étendre à la masse entière du corps M.

Si l'on intègre d'abord les formules précédentes relativement à ϕ, depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = 360° = 2\pi$, on aura les intégrales pour la *zone* du rayon r, comprise entre les plans MX, mx. En intégrant ensuite par rapport à r, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = XM = u$, on aura les intégrales pour le *disque* entier du corps, terminé par les plans MX, mx. Si l'on intègre pour la troisième fois par rapport à x et u, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x$, on aura les intégrales pour le *corps* entier depuis A jusqu'à XM.

De cette manière on trouvera par la première intégration,

$$\int x\partial M = 2\pi\int xr\partial x\partial r,\; \int y\partial M = \sin 2\pi\,.\int r^2\partial r\partial x,\; \int z\partial M = (1 - \cos 2\pi)\int r^2\partial r\partial x,$$

$$\text{ou } \int y\partial M = 0 \text{ et } \int z\partial M = 0;$$

d'où il suit que l'axe AC passe par le centre de gravité. On a ensuite

$$A = 2\pi\int x^2 r\partial r\partial x,\; B = \tfrac{1}{2}\int\partial\phi(1 + \cos 2\phi) r^3\partial r\partial x = (\tfrac{1}{2}\phi + \tfrac{1}{4}\sin 2\phi)\int r^3\partial r\partial x,$$

$$\text{ou } B = \pi\int r^3\partial r\partial x,\quad C = \pi\int r^3\partial r\partial x = B,\quad D = \sin 2\pi\int r^2 x\partial r\partial x,$$

$$E = (1 - \cos 2\pi)\int r^2 x\partial r\partial x,\; F = \tfrac{1}{2}\int\partial\phi\sin 2\phi\,.\,r^3\partial r\partial x = \tfrac{1}{4}(1 - \cos 4\pi)\int r^3\partial r\partial x,$$

donc $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$.

Les équations $D = E = F = 0$ nous apprennent, que l'axe AC d'un solide de révolution est un des axes principaux de rotation ; et l'équation $B = C$ indique, que tous les axes, perpendiculaires à AC, et passant par le centre de gravité, sont aussi des axes principaux (§. 85.).

La seconde intégration donne

$$\int x\partial M = \pi\int u^2 x\partial x,\quad A = \pi\int u^2 x^2\partial x,\quad B = C = \frac{\pi}{4}\int u^4\partial x.$$

La troisième intégration ne peut s'effectuer, à moins que la nature de la courbe AMB ne soit donnée par une équation entre x et u. Pour cela

il sera plus commode de prendre les abscisses du centre de gravité C; et comme les deux premières intégrations sont indépendantes de l'origine des abscisses, les équations précédentes auront également lieu, si l'on fait $CX = x$.

§. 87. Si le solide est un *sphéroïde* aplati aux poles, et AMB une *ellipse* dont le grand et le petit demi-axe sont $BC = a$, $AC = b$, C sera le centre de gravité, et l'on aura $u^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$, d'où l'on conclura pour le demi-sphéroïde,

$$A = \frac{\pi a^2}{3} x^3 - \frac{\pi a^2}{5 b^2} x^5 = \pi a^2 b^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right),$$

$$B = C = \frac{\pi a^4}{4} x \left(1 - \frac{2 x^2}{3 b^2} + \frac{x^4}{5 b^4}\right) = \frac{\pi}{4} a^4 b \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right),$$

et pour le sphéroïde entier

$$A = \frac{4\pi}{15} a^2 b^3, \quad B = C = \frac{4\pi}{15} a^4 b = \frac{a^2}{b^2} A.$$

Le moment d'inertie est donc, par rapport au petit axe AC, $B + C = \frac{8\pi}{15} a^4 b$, et par rapport à chaque axe qui lui est perpendiculaire, ou à chaque diamètre de l'équateur, $A + B = \frac{4\pi}{15} a^2 b (a^2 + b^2)$. Puisque ∂M est $= r \partial r \partial x \partial \Phi$ (§. 86.), la triple intégration donnera la masse du demi-sphéroïde,

$$\frac{1}{2} M = 2\pi \int r \partial r \partial x = \pi \int u^2 \partial x = \pi a^2 \left(x - \frac{x^3}{3 b^2}\right), \text{ donc } M = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Les momens d'inertie seront donc, par rapport

$$\text{au petit axe} = \frac{2}{5} M a^2,$$

$$\text{aux diamètres de l'équateur} = \frac{M}{5}(a^2 + b^2).$$

Le dernier est donc le plus petit, et le premier est le plus grand de tous les momens du sphéroïde, la plus grande différence étant $\frac{M}{5}(a^2 - b^2)$. En permutant a et b, les formules précédentes donneront les momens d'un sphéroïde alongé aux poles.

Dans la *sphère* on a $a = b$, d'où il suit que le moment d'inertie, par rapport à tous les diamètres d'une sphère, est $\frac{8\pi}{15} a^5 = \frac{2}{5} M a^2$.

Si les méridiens et l'équateur sont des ellipses, ce qui est probablement le cas de la lune, soit C le centre, $CA = k$ le demi-axe de rotation et l'axe des ordonnées z, $CB = f$ le demi-grand axe de l'équateur et l'axe des x, et h le petit demi-axe de l'équateur et l'axe des y. Cela posé on aura pour l'élément $Z = \partial M$, $CX = z$, $XY = x$, $YZ = y$. En faisant donc $XM = u$,

$XZ = r$, et nommant r' le rayon r, prolongé jusqu'à la surface; on aura dans le méridien elliptique AMB,

$$(1) \ldots\ldots u^2 = \frac{f^2}{k^2}(k^2 - z^2),$$

et dans le parallèle passant par XZ, qui est semblable à l'équateur,

$$(2) \ldots\ldots y'^2 = \frac{h^2}{f^2}(u^2 - x'^2),$$

x' et y' étant les coordonnées qui répondent à r'. En nommant Φ l'angle YXZ, dont le rayon r est incliné au grand axe du parallèle, on a

$$x' = r'\cos\Phi, \quad y' = r'\sin\Phi, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2, \quad \text{donc}$$

$$r' = \frac{hu}{\sqrt{(f^2\sin^2\Phi + h^2\cos^2\Phi)}}.$$

La sphéricité de tous les corps célestes étant très-petite, en faisant $f = h(1+\delta)$, on pourra négliger la seconde puissance de δ, ce qui donnera

$$(3) \ldots\ldots r' = \frac{u}{\sqrt{(1+2\delta\sin^2\Phi)}} = u(1 - \delta\sin^2\Phi).$$

Si l'on intègre maintenant les fonctions A, B, etc. (§. 86.), d'abord par rapport à r, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = r'$, ensuite par rapport à Φ, depuis $\Phi = 0$ jusqu'à $\Phi = 2\pi$, enfin par rapport à z, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = k$, ces intégraies, étant multipliées par 2, s'étendront au corps entier. En substituant donc $\partial M = r\partial r\partial\Phi\partial z$, $x = r\cos\Phi$, $y = r\sin\Phi$, on aura

$$A = 2\int r^3\partial r.\partial\Phi\cos^2\Phi.\partial z, \qquad B = 2\int r^3\partial r.\partial\Phi\sin^2\Phi.\partial z,$$
$$C = 2\int r\partial r.\partial\Phi.z^2\partial z, \qquad D = 2\int r^3\partial r.\partial\Phi\sin\Phi\cos\Phi.\partial z,$$
$$E = 2\int r^2\partial r.\partial\Phi\cos\Phi.z\partial z, \qquad F = 2\int r^2\partial r.\partial\Phi\sin\Phi.z\partial z.$$

Après avoir intégré trois fois, on trouvera

$$A = \int\frac{r'^4}{2}\partial\Phi\cos^2\Phi.\partial z = \int\frac{u^4}{2}\partial\Phi\cos^2\Phi(1 - 4\delta\sin^2\Phi)\partial z =$$
$$\int\frac{u^4}{4}\partial\Phi(1+\cos2\Phi-\delta+\delta\cos4\Phi)\partial z = \frac{\pi}{2}(1-\delta)\frac{f^4}{k^4}\int(k^4 - 2k^2z^2 + z^4)\partial z; \text{ donc}$$

$$A = \frac{4\pi}{15}(1-\delta)f^4k.$$

On trouvera de la même manière

$$B = \frac{4\pi}{15}(1-3\delta)f^4k, \quad C = \frac{4\pi}{15}(1-\delta)f^2k^3, \quad D = 0, \; E = 0, \; F = 0.$$

On aura donc les momens d'inertie, par rapport

au grand axe de l'équateur, $B + C = \frac{4\pi}{15} f^2 k (f^2 + k^2 - 3\delta f^2 - \delta k^2) = M a^2$,

au petit axe de l'équateur, $A + C = \frac{4\pi}{15} (1 - \delta) f^2 k (f^2 + k^2) = M b^2$,

à l'axe de rotation, $A + B = \frac{8\pi}{15} (1 - 2\delta) f^4 k = M c^2$.

L'aire de l'ellipse, passant par MX, est $\frac{b}{f} \pi u^2$, d'où l'on tire le volume du disque $Mx = \frac{b}{f} \pi u^2 \partial z = \frac{\pi f b}{k^2} (k^2 - z^2) \partial z$, partant le segment $CM = \frac{\pi f b}{k^2} \left(k^2 - \frac{z^2}{3}\right) z$; d'où il suit le demi-volume du corps $= \frac{2}{3} \pi f h k$, et le volume entier $M = \frac{4}{3} \pi f h k$. En substituant dans les équations précédentes, $\frac{4\pi}{15} f^2 k = \frac{f}{5h} M$, et $\delta = \frac{f - b}{b}$, on trouvera

$$a^2 = \frac{f \{ f^2 (4b - 3f) + k^2 (2b - f) \}}{5 b^2}, \quad b^2 = \frac{f (2b - f)(f^2 + k^2)}{5 b^2}, \quad c^2 = \frac{2 f^3 (3b - 2f)}{5 b^2}.$$

§. 88. D'après ce qui précède, la théorie du mouvement des corps se réduit aux propositions suivantes.

1. Le corps ne peut tourner *librement* autour d'un axe invariable qui n'a pas besoin d'être appuyé, que dans le cas où c'est un des axes principaux. En effet, si le corps n'est sollicité par aucune force étrangère, l'axe n'éprouvera que l'effort des forces centrifuges qui, par conséquent, doivent se détruire réciproquement: ce qui est le caractère distinctif des axes principaux (§. 81.). Si le corps est sollicité par des forces, dont les momens statiques ne se détruisent pas, elles accéléreront sa rotation, ou changeront sa vitesse; mais il est impossible que les forces centrifuges, dépendant du carré de la vitesse (§. 79. n. 3.), fassent équilibre aux autres forces qui ne dépendent point de ce carré (§. 79. n. 1.), quelle que soit la vitesse. Il faut donc, que chacune des trois forces centrifuges soit séparément égale à zéro, et c'est ce qui détermine les axes principaux.

2. La rotation ne peut être *uniforme* que dans le cas, où il n'y a point de forces étrangères, ou qu'elles se détruisent mutuellement, ou que leur moment, pour faire tourner le corps, est nul: c'est une suite nécessaire de la loi d'inertie, et l'on peut en tirer la conséquence, que la rotation uniforme d'un corps doit avoir existé dès son origine, ou lui avoir été imprimée par une impulsion instantanée.

3. Des forces, dont la direction passe par le centre de gravité, ne peuvent pas faire tourner le corps (§. 67.): car, conformément à la nature du centre de gravité, elles font le même effet, que si tous les élémens étaient sollicités parallèlement, par des forces, proportionnelles à leurs masses; et il est visible que, dans un pareil cas, tous les élémens avanceraient suivant des directions parallèles avec la même vitesse: il n'y aura donc point de rotation. Ainsi ces forces ne dérangeront point l'uniformité de la rotation, et il faut en dire autant des forces, dont la moyenne direction passe par le centre de gravité.

4. Dans un cas contraire les forces feront tourner le corps: car la résultante qui ne passe pas par le centre de gravité, imprimera aux élémens du corps des vitesses différentes, d'où il naît nécessairement une rotation (§. 66.).

5. Puisque chaque force agit sur l'axe, comme si elle lui était imprimée immédiatement (§. 77.), l'axe et le corps entier recevront un mouvement, à moins que toutes les forces ne se détruisent mutuellement: ce mouvement fera tourner l'axe autour d'un de ses points, ou sera une pure translation. Le dernier mouvement mérite une attention particulière.

§. 89. *Quelles que soient les forces qui sollicitent le corps, le mouvement de translation du corps ou de son centre de gravité sera le même, que si chaque force était imprimée au centre de gravité, parallèlement à sa véritable direction.* Soient (*Fig.* 21.) AB, AC, AD, trois axes arbitraires qui se coupent perpendiculairement, et sur lesquelles on a pris les coordonnées $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, et $AE = e$, $EF = f$, $FG = h$, d'un élément $Z = \partial M$, et du centre de gravité G, pour un instant quelconque t. Cela posé on aura, par la nature du centre de gravité,

$$e = \frac{\Sigma . x \partial M}{M}, \quad f = \frac{\Sigma . y \partial M}{M}, \quad h = \frac{\Sigma . z \partial M}{M},$$

la caractéristique Σ se rapportant aux divers élémens du corps, et s'étendant à sa masse entière, de sorte que x, y, z, et ∂M, sont variables pour le même instant, en passant d'un élément à l'autre. Désignons par $\int$ l'intégrale qui se rapporte au mouvement d'un même élément, ensorte que t soit variable, et ∂t, ∂M, constans; et décomposons le mouvement de chaque élément Z, ainsi que celui du centre de gravité, suivant AB, AC, AD. On aura donc

$$\frac{\partial\partial e}{\partial t^2} = \frac{\Sigma . \partial\partial x \partial M}{M \partial t^2}, \quad \frac{\partial\partial f}{\partial t^2} = \frac{\Sigma . \partial\partial y \partial M}{M \partial t^2}, \quad \frac{\partial\partial b}{\partial t^2} = \frac{\Sigma . \partial\partial z \partial M}{M \partial t^2}.$$

En décomposant suivant les mêmes directions, les forces qui sollicitent chaque élément Z, en p, q, r, on aura (§. 17. n. 4.), $\partial\partial x = \frac{2gp}{\partial M} \partial t^2$, ou

$$\frac{\partial\partial x \partial M}{\partial t^2} = 2gp, \quad \frac{\partial\partial y \partial M}{\partial t^2} = 2gq, \quad \frac{\partial\partial z \partial M}{\partial t^2} = 2gr;$$

ce qui étant substitué dans les dernières équations, donnera

$$\frac{\partial\partial e}{\partial t^2} = \frac{\Sigma . 2gp}{M} = \frac{2g . \Sigma p}{M}, \quad \frac{\partial\partial f}{\partial t^2} = \frac{2g . \Sigma q}{M}, \quad \frac{\partial\partial b}{\partial t^2} = \frac{2g . \Sigma r}{M},$$

Σp, Σq, Σr, étant les sommes de toutes les forces qui sollicitent chaque élément, décomposées suivant AB, AC, AD. Or le mouvement du centre de gravité serait déterminé par les mêmes équations (§. 17. n. 4.), si toutes les forces étaient imprimées à ce centre, et que la masse entière M y fût réunie. Le mouvement de translation sera donc le même, que dans cette supposition: ce qu'il fallait prouver. Au reste, il est aisé de voir, que cette translation n'altère point la rotation du corps.

CHAPITRE III.

Rotation libre des corps célestes.

§. 90. Une expérience connue de tout le monde, et qui fait la base de l'astronomie entière, c'est que la terre tourne uniformément sur un axe, dans l'espace d'un jour (I. §. 36 — 40.). Cette rotation de la terre est même le seul mouvement parfaitement uniforme que nous connaissions, d'où il vient qu'on l'a pris pour mesure du tems, aussi bien dans les observations astronomiques, que dans la vie civile. Il n'est pas moins certain que cet axe ne change pas de position, ou que la terre tourne sur un axe invariable (I. §. 41.). Il en suit, que l'axe terrestre est un axe libre ou principal (§. 88. n. 1.); et l'on a vu, que le plus petit diamètre d'un sphéroïde elliptique, tel que l'axe terrestre paraît être, est effectivement un axe principal (§. 87.). Il est donc évident par ce qui précède, qu'en vertu de la loi d'inertie, la terre peut tourner sans cesse et d'une manière uniforme autour d'un pareil axe, et qu'elle n'a pas besoin de forces étrangères, pour continuer ce mouvement qui lui a été imprimé par une cause quelconque (§. 69.). Il n'est pas même besoin pour cela, de supposer une impulsion: car on peut concevoir la terre, au premier moment de son existence, douée d'un mouvement rectiligne, et tournant uniformément sur un axe libre, aussi bien qu'en repos. Tout corps qui existe, tant qu'il est considéré isolément, doit se trouver dans l'un de ces cas qui sont tous également possibles. Il nous suffit donc de savoir par expérience, dans quel cas la terre s'est trouvée au commencement de son existence, ou de sa formation planétaire: savoir, qu'elle a tourné uniformément autour d'un axe principal avec une vitesse angulaire de $15''$, et que son centre de gravité a avancé dans le plan de l'écliptique, avec une vitesse laquelle,

étant combinée avec la force attractrice du soleil, lui a imprimé le mouvement elliptique qu'elle a conservé jusqu'à présent. Si la densité primitive de la terre a été uniforme, ou variant uniformément depuis le centre, — ce qui est la supposition la plus naturelle — chacun de ses diamètres était un axe libre (§. 87.), et celui de ces diamètres, autour duquel elle tourna, était perpendiculaire à un plan que nous nommons l'équateur, et incliné de 66 à 67 degrés au plan, passant par le soleil et le premier mouvement du centre de gravité de la terre. Ces deux mouvemens, la translation du centre de gravité dans une ellipse, et la rotation uniforme autour d'un axe libre, sont tels, que la terre les continuera éternellement, suivant la loi d'inertie, si elle n'est pas troublée par des forces étrangères.

On se formera cependant une idée plus claire de ces mouvemens, en concevant qu'ils sont l'effet d'une *impulsion* ou d'une force instantanée; et comme il serait absurde, de supposer plusieurs forces, quand une seule suffit, il s'agit maintenant de déterminer l'impulsion qui peut avoir imprimé à la terre ces deux mouvemens à la fois.

§. 91. Soit (*Fig.* 18.) VR la direction de la force V ou de l'impulsion primitive, BAC le plan mené par le centre de gravité du corps A, perpendiculairement à VR, et AD parallèle à RV; prenons sur les trois axes, AB, AC, AD, perpendiculaires l'un à l'autre, les coordonnées d'un élément quelconque Z, $AX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$. Soit AF l'axe principal (§. 88. n. 1.), sur lequel le corps tourne librement en vertu de l'impulsion VR; qu'on mène par AF un plan perpendiculaire au plan BAC, qui le coupe en AE, et qu'on nomme les angles $BAE = \eta$, $EAF = \theta$. Si l'on rapporte maintenant la position de l'élément Z à trois axes, dont l'un est AF, le second perpendiculaire à AF dans le plan EAF, et le troisième perpendiculaire au plan EAF, par le moyen des coordonnées $Ax = x$, $xy = y$, $yZ = z$, on aura (§. 82.)

$$x = X\cos\eta\cos\theta + Y\sin\eta\cos\theta + Z\sin\theta,$$

$$y = Z\cos\theta - X\cos\eta\sin\theta - Y\sin\eta\sin\theta,\quad z = Y\cos\eta - X\sin\eta.$$

Ayant élevé les perpendiculaires RE, EF, sur AE, EF et RV seront parallèles entre elles, et l'on aura $VRE = REF = 90°$; en nommant donc la distance perpendiculaire de l'impulsion au centre de gravité, $AR = h$, il viendra

$RE = h \sin \eta$, $AE = h \cos \eta$, $EF = h \cos \eta \tang \theta$, $AF = k = h \cos \eta \sec \theta$.

Qu'on projette maintenant la figure entière sur le plan EAF (*Fig.* 22.), quon élève les perpendiculaires AH, $yz = yZ$, sur le plan EAF, et dans ce plan les perpendiculaires AG, xy, sur AF, et qu'on fasse $VR = EF$: cela posé, on aura $Ax = x$, $xy = y$, $yz = -z$, $FAE = \theta$, EFVR est un rectangle, et VR est parallèle au plan FAG ou FAE et à FE. En menant donc par V un plan parallèle à EFAG, VR sera dans ce plan, et la force $VR = V$ pourra être décomposée suivant les directions Vv et Vu qui sont dans le même plan parallèles à yx et FA: ayant donc élevé sur AF la perpendiculaire Fe, elle sera parallèle à yx et Vv; on aura donc $EFe = 90° - AFE = \theta$, partant $RVv = \theta$ et $RVu = 90° - \theta$. Ainsi la force V se décomposera en les forces $Vv = V \cos \theta$ et $Vu = V \sin \theta$: examinons donc la pression que l'axe AF éprouve par ces forces, et par la rotation qui en résulte.

Puisque RE et VF sont perpendiculaires au plan EAF, on a $AFV = 90° = AFe$; le plan $eFVv$ est donc perpendiculaire à AF, d'où il suit que la force Vv agira sur l'axe, comme si elle était appliquée en F suivant Fe (§. 77.); l'axe éprouvera dono

1. en F une pression $Fe = V \cos \theta$, parallèle à yx ou GA.

La force $Vu = V \sin \theta$, étant parallèle à l'axe, le sollicitera d'abord suivant sa longueur FA avec la force $V \sin \theta$: outre cela elle imprimera à l'axe en F la pression Ff, et en A la pression Aa, l'une et l'autre étant $= \frac{FV}{AF} V \sin \theta$ (§. 73.). Or on a trouvé ci-dessus $FV = RE = h \sin \eta$, $AF = k = h \cos \eta \sec \theta$; d'où il résulte que l'axe éprouve encore

2. en F la pression $Ff = V \tang \eta \sin \theta \cos \theta$,

3. en A la pression $Aa = V \tang \eta \sin \theta \cos \theta$,

4. la pression FA ou $Ac = V \sin \theta$.

Les trois dernières forces qui résultent de la force Vu, n'ont aucun moment par rapport à l'axe AF, mais elles feront tourner l'axe autour d'un de ses points, à moins que les forces Ff, Aa, ne soient détruites par d'autres. La force Vv seule est capable d'imprimer au corps une rotation autour de AF, son moment étant $= Vv . FV = V . h \sin \eta \cos \theta$ suivant Vv: en désignant ce moment, comme ci-dessus, par $V . f$, on aura

$f = h \sin\eta \cos\theta$. En nommant donc le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe $AF = \int (y^2 + z^2) \partial M = J$, les forces élémentaires exerceront en A et en F les pressions (§. 79. n. 2.),

$$Ab = \frac{V.f}{J.k} \int (k - x) z \partial M, \quad A\alpha = \frac{V.f}{J.k} \int (k - x) y \partial M,$$

$$Fe = \frac{V.f}{J.k} \int x z \partial M, \qquad Ff = \frac{V.f}{J.k} \int x y \partial M.$$

Or on a $\int x \partial M = o$, $\int y \partial M = o$, $\int z \partial M = o$, par la nature du centre de gravité A, et $\frac{f}{k} = \operatorname{tg}\eta . \cos^2\theta$: on aura donc encore les pressions suivantes,

$$5.\ Ab = -\frac{V.f}{J.k} \int x z \partial M, \text{ ou } A\beta = \frac{V}{J} \operatorname{tg}\eta . \cos^2\theta \int x z \partial M,$$

$$6.\ Aa = \frac{V}{J} \operatorname{tg}\eta . \cos^2\theta \int x y \partial M,$$

$$7.\ Fe = \frac{V}{J} \operatorname{tg}\eta . \cos^2\theta \int x z \partial M = A\beta,$$

$$8.\ Ff = \frac{V}{J} \operatorname{tg}\eta . \cos^2\theta \int x y \partial M = Aa.$$

§. 92. Les forces, appliquées au centre de gravité A (§. 91. n. 3. 4. 5. 6.), imprimeront au corps un mouvement de pure translation sans rotation (§. 88. n. 3.); au lieu que celles appliquées en F feront tourner l'axe autour de A, et par conséquent dérangeront la rotation autour de AF. Ainsi, pour que le corps tourne librement autour de AF, il faut que les forces en F se détruisent mutuellement, et puisque Fe, Ff, ne sont pas opposées l'une à l'autre, chacune d'elles doit être séparément nulle, c'est-à-dire les forces §. 91. n. 1. 7. et n. 2. 8; d'où l'on tirera ces équations,

$$\text{I.}\quad o = V \cos\theta + \frac{V}{J} \operatorname{tg}\eta . \cos^2\theta \int x z \partial M,$$

$$\text{II.}\quad o = V \operatorname{tg}\eta . \cos\theta \left(\sin\theta + \frac{\cos\theta}{J} \int x y \partial M \right).$$

Or AF étant un axe principal (§. 91.), on a $\int x y \partial M = o$ et $\int x z \partial M = o$ (§. 81.), d'où il vient

$$\text{I.}\quad o = \frac{J}{\operatorname{tg}\eta \cos\theta}, \qquad \text{II.}\quad o = J \operatorname{tang}\theta.$$

Puisque J ne peut pas être nul, on conclura de l'équation II, $\theta = o$ et $\cos\theta = 1$; ce qui étant substitué dans l'équation I, donnera $\operatorname{tang}\eta = \infty$ et $\eta = 90°$. On a donc (*Fig.* 18.) BAE $= 90° =$ BAC, et EAF $= o$, d'où il suit que l'axe de rotation AF coïncide avec AC, ou que le corps tournera

autour de l'axe AC, perpendiculaire au plan BAD ou VRA, et cette rotation sera invariable, si AC est un axe principal. Le plan de l'impulsion VR doit donc passer par le centre de gravité, perpendiculairement à AC, et la rotation sera invariable ou libre, si la perpendiculaire, élevée du centre de gravité sur le plan, passant par ce centre et la direction de l'impulsion, est un axe principal du corps: cette perpendiculaire deviendra l'axe de rotation. Si le corps est une sphère uniforme, chaque impulsion qui ne passera pas par le centre de gravité, lui imprimera une rotation uniforme autour d'un axe invariable.

Puisque $\sin \eta = 1 = \cos \vartheta$, f sera $= h =$ AR, et le moment de l'impulsion, pour faire tourner le corps, $V . f = V . h$, la force multipliée par sa distance au centre de gravité. Le moment $V . h$ imprimera au corps, dans le tems ∂t, la vitesse angulaire autour de AF ou AC, (§. 75.)

$$\partial \phi = \frac{2 g . V . h}{J} \partial t.$$

Le mouvement de translation que le corps reçoit en vertu de l'impulsion V, est le même, que si elle passait par le centre de gravité, et que la masse entière M y fût réunie (§. 89.). Le centre de gravité A, et le corps entier, recevront donc en vertu de la force accélératrice $\frac{V}{M}$, suivant une direction parallèle à VR ou FE, dans le tems ∂t (§. 17. n. 3.),

l'accroissement de la vitesse, $\partial v = \frac{2 g V}{M} \partial t$.

§. 93. Si la terre a toujours tourné sur le même axe qu'à présent, la direction de l'impulsion qui lui a imprimé son mouvement *diurne*, a du être dans le plan de l'équateur actuel. D'ailleurs, si la même impulsion est supposée lui avoir imprimé le mouvement *annuel* qu'elle a encore, la direction de cette impulsion, réduite au centre de gravité, a du être aussi dans le plan de l'écliptique, par conséquent dans la commune section de ces deux plans, c'est-à-dire, l'impulsion a été parallèle à la ligne des équinoxes, et perpendiculaire à la ligne des solstices. La terre n'a donc pu être dans un point équinoxial, lorsqu'elle a reçu son premier mouvement, parce qu'alors l'impulsion eût été dirigée vers le soleil, et non suivant la tangente de l'orbite, comme cela doit être. Ainsi, puisque l'orbite terrestre est à peu près

circulaire, ensorte que ses tangentes font partout avec les rayons vecteurs un angle très-peu différent de 90°, la ligne des équinoxes a du couper le rayon vecteur, au commencement du mouvement, sous un angle droit; en d'autres mots, la terre a commencé son mouvement dans un point solstitial, au commencement de l'été ou d'hiver. La supposition la plus naturelle est que l'impulsion ou la tangente a été perpendiculaire au rayon vecteur, ce qui est le cas dans les apsides: cela posé, le mouvement a commencé, lorsque les apsides coincidaient avec les points solstitiaux, dont ils étaient distans l'an 1818 de 9° 47′ 32″. Comme la ligne des apsides fait, par son mouvement actuel, en 10472 ans une demi-révolution par rapport aux points équinoxiaux, elle décrira 9° 47′ 32″ en 570 ans: d'où il suit, en faisant les suppositions précédentes, que le mouvement de la terre a commencé il y a $570 + 10472 = 11042$ ans, ou $11042 + 10472 = 21514$ ans.

Ce n'est pas pour les astronomes qu'il est besoin d'observer, que de pareils raisonnemens sur l'age de la terre, ou plutôt de son mouvement, ne sont que des hypothèses; il faut cependant convenir, que la plupart des systèmes physiques concernant l'age de notre globe, sont fondés sur des bases moins sures.

§. 94. Puisque la vitesse du mouvement des planètes autour du soleil dépend seulement de l'*intensité* de l'impulsion, tandis que celle de la rotation dépend du *moment* statique, ou de l'intensité de l'impulsion, multipliée par sa *distance* au centre de gravité, il est visible, que cette distance pourra être déterminée par le rapport qui existe entre les deux vitesses. On peut substituer le moyen mouvement de la planète au vrai mouvement, en égalant sa distance au soleil au grand demi-axe de son orbite $= A$. Or la rotation étant aussi uniforme, il s'agit de comparer entre eux deux mouvemens uniformes, produits par l'impulsion V: les mouvemens en des tems égaux seront donc comme les accélérations imprimées par l'impulsion (§. 92.). La vitesse angulaire de la rotation est $\frac{2gV}{J} h \partial t$ (§. 92.), celle du mouvement autour du soleil est $\frac{2gV}{M} \partial t$, donc la vitesse angulaire $\frac{2gV}{MA} \partial t$, M étant la masse de la planète: les vitesses angulaires des moyens mouvemens annuel et diurne seront donc entre elles, comme $\frac{1}{MA}$ est à $\frac{h}{J}$. En nommant T la longueur de

l'année sidérale de la planète, τ la durée d'un jour sidéral, les deux vitesses précédentes seront aussi comme τ à T; d'où il suit $\frac{T}{AM} = \frac{b\tau}{J}$. En supposant la figure de la planète sphérique, sa densité uniforme, et son demi-diamètre $= \alpha$, on a $J = \frac{2}{5} M\alpha^2$ (§. 87.), d'où il suit $\frac{T}{\tau} = \frac{5Ab}{2\alpha^2}$, ou

$$(1) \ldots\ldots \frac{b}{\alpha} = \frac{2}{5} \cdot \frac{T}{\tau} \cdot \frac{\alpha}{A},$$

ce qui est la distance de l'impulsion au centre de la planète, en parties de son demi-diamètre. La fraction $\frac{\alpha}{A}$ est le demi-diamètre apparent de la planète, vu du corps central, ou la parallaxe du soleil sur la planète: quand il s'agit de la lune, $\frac{\alpha}{A}$ est donc le demi-diamètre apparent de la lune $= \sin 15'33'',7$ (II. §. 215.). Les valeurs de T et τ pour toutes les planètes sont exposées dans les tables (II. §. 99. 166). Nous avons donné (II. §. 153. 179.) les diamètres apparens à la moyenne distance du soleil, δ, et les demi-axes des orbites, a, celui de l'orbe terrestre étant l'unité; d'où l'on tire $a : 1 :: \sin\frac{\delta}{2} : \frac{\alpha}{A}$, ou

$$(2) \ldots\ldots \frac{\alpha}{A} = \frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{a}.$$

L'espace σ que la force V fait parcourir à la masse M, supposée en repos, dans le tems ∂t, est $\frac{V}{M} g \partial t^2$ (§. 17.). Puisque les mouvemens sont supposés uniformes, on peut faire $\partial t = 1$: alors, en nommant c l'angle que la planète décrit autour du soleil en une seconde, on aura $\sigma = A \sin c = \frac{V}{M} g$ ou $\frac{V}{M} = \frac{A}{g} \sin c$. Si l'on nomme ϖ la parallaxe du soleil, et B, β, les demi-diamètres de l'orbe terrestre et de la terre, on a $\beta = B \sin\varpi$, et $A = a.B$, donc $A = \frac{a\beta}{\sin\varpi}$, et

$$(3) \ldots\ldots \frac{V}{M} = \frac{\beta}{g} \cdot \frac{c}{\varpi} \cdot a;$$

$\frac{\beta}{g}$ étant environ 1500000 (§. 59.), et c le mouvement sidéral diurne s (II. §. 99. 179.), divisé par 86400. Or $\frac{1500000}{86400} = 17,3611 \ldots = n$, d'où l'on conclura ces formules:

$$(4) \ldots\ldots \frac{T}{\tau} = \frac{\text{Revol. sider.}}{\text{pér. de rotat.}}, \quad (5) \ldots\ldots \frac{\alpha}{A} = \frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{a},$$

$$(6) \ldots\ldots \frac{b}{\alpha} = \frac{2}{5} \cdot \frac{T}{\tau} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{a}, \quad (7) \ldots\ldots \frac{V}{M} = \mu a \cdot \frac{s}{\sin 8'',6}.$$

Relativement à la lune, on a $\frac{T}{\tau} = 1$; $\frac{\alpha}{A} = \sin 15'33'',7$; $\frac{b}{\alpha} = \frac{2}{5} \sin 15'33''7$;

$\frac{V}{M} = \frac{C}{g} \sin c$, C étant le demi-diamètre de l'orbite lunaire, donc $C = 60\ g$ (II. §. 213.), $\frac{C}{g} = 60 \times 1500000 = 90000000$, et $c = 0'', 549$.

§. 95. Soit (*Fig.* 23.) S le centre du soleil ou du corps central, T celui d'une planète qui, en vertu de l'impulsion V, passant par B perpendiculairement à SB, a acquis le mouvement $Tt = A \sin c$, et uno rotation suivant Aa qui fait décrire à chaque élément A autour du centre T l'angle γ en une seconde: cela posé concevons que l'espace entre la planète et son corps central soit un plan inflexible et immatériel, fixement uni à la planète Alors chaque point C dans ce plan parcourra pareillement en une seconde l'espace $Cb = Tt = A \sin c$, pendant qu'en vertu de la rotation commune au plan entier, il tournera autour de T, suivant la direction opposée Cc, avec la vitesse angulaire γ: en faisant donc $TC = x$, le point C parcourra en une seconde l'espace $Cc = \gamma x$. Maintenant, Cc croissant avec x, tandis que Cb est constant, il est aisé de prévoir qu'il y aura quelque part dans ce plan un point C qui, à l'origine du mouvement, restera en repos, parce que les deux mouvemens opposés $Cb = Cc$ se détruisent: on a pour ce point $Ac = \gamma x$ ou $x = \frac{Ac}{\gamma}$. Le point C, autour duquel le plan entier commence à tourner, a été nommé le *centre de la rotation libre*. On a donc $\frac{x}{\alpha} = \frac{A}{\alpha} \cdot \frac{c}{\gamma} = \frac{T}{\tau} \cdot \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{c}{\gamma}$ (§. 94. (6)), et à cause de $\frac{c}{\gamma} = \frac{\tau}{T}$,

$$(8) \ldots\ldots \frac{x}{\alpha} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\alpha}{b},$$

ce qui est la distance du centre de l'oscillation libre, exprimée en demi diamètres de la planète. On a aussi (§. 87.) $\frac{2}{5}\alpha^2 = \frac{\int r^2 \partial M}{M}$, d'où il suit $x = \frac{\int r^2 \partial M}{M \cdot b}$, et $BC = x + h = \frac{M \cdot b^2 + \int r r \partial M}{M \cdot b}$, ce qui nous apprend, que B est par rapport à C, et C par rapport à B, ce qu'on appelle dans la mécanique le *centre d'oscillation*, ou le point, autour duquel le plan entier, à l'instar d'un pendule simple, ferait les mêmes oscillations, que si sa masse entière était réunie dans ce point.

§. 96. Le tableau suivant présente les valeurs numériques, calculées sur les formules (4) (5) (6) (7) (8), pour toutes les planètes et la lune.

	$\frac{T}{\tau}$	$\frac{a}{A}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{V}{M}$	$\frac{x}{a}$
♅	— — —	0,000009416	— — — —	1417,763	— — —
♄	25150,84	0,000043586	0,438487 = $\frac{11}{25}$	2010,856	0,912227
♃	10475,926	0,000087041	0,364706 = $\frac{9}{25}$	2723,626	1,096684
♂	668,699	0,000014230	0,003806 = $\frac{1}{263}$	5030,520	105,0938
♁	366,25625	0,000041694	0,006108 = $\frac{1}{164}$	6209,567	65,48498
♀	230,956	0,000055296	0,005108 = $\frac{1}{196}$	7301,170	78,30329
☿	87,6335	0,000041330	0,001449 = $\frac{1}{690}$	9980,432	276,0971
☾	1,0000	0,0045269	0,001811 = $\frac{1}{552}$	208,090	220,912

La table précédente donne lieu à plusieurs observations importantes. La distance de l'impulsion au centre, $\frac{b}{a}$, est, relativement à Saturne et Jupiter, à peu près la moitié du demi-diamètre; chès les autres planètes elle est cent fois moindre. — Le rapport entre les vitesses de rotation et de translation, $\frac{T}{\tau}$, décroît, et l'intensité de l'impulsion $\frac{V}{M}$ augmente, à mesure que les planètes sont plus proches du soleil, et $\frac{V}{M}$ est réciproque à la racine carrée de la distance du soleil: ce qui est une suite nécessaire de la troisième loi de Kepler, suivant laquelle T est proportionnel à $A^{\frac{3}{2}}$. En effet, l'accélération $\frac{V}{M} = \frac{A \cdot c}{g}$ est comme la vitesse moyenne $A \cdot c$, qui est égale à $\frac{2\pi A}{T}$, et par conséquent proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{A}}$. — La distance du centre d'oscillation $\frac{x}{a}$, ainsi que la distance de l'impulsion $\frac{b}{a}$, ont à peu près la même valeur, relativement à Saturne et à Jupiter, et sont telles que le centre d'oscillation est à peu près à la surface même de ces deux planètes, au lieu que chès les autres planètes, cette distance est cent fois plus grande. — Le phénomène le plus surprenant est celui que présentent les centres d'oscillation de la terre et de la lune. Relativement à la lune, la distance x est 220,9 demi-diamètres de la lune, ce qui fait 0,27293 . 220,9 ou à peu près 60 demi-diamètres de la terre: le centre d'oscillation de la lune coïncide dono exactement avec le centre de la terre; celui de la terre tombe un peu au delà de la lune, x étant 65 demi diamètres de la terre. Cette harmonie frappante paraît indiquer un nouveau lien qui réunit ces deux corps,

et il est possible qu'elle répandra un nouveau jour sur cette partie de l'astronomie physique. Jean Bernoulli fit le premier cette observation, relativement à la terre, et ce grand géomètre en reconnut toute l'importance [1].

§. 97. Cette rotation libre autour d'un axe invariable sera continuée sans cesse, si les planètes ont reçu une impulsion primitive, dont la direction était dans un plan, passant par le centre de gravité, et perpendiculaire à un axe libre ou principal de la planète, et si elle n'est point sollicitée par des forces étrangères. Le premier cas a évidemment lieu, relativement à la terre, puisqu'elle tourne uniformément autour d'un axe principal; et le même cas aura toujours lieu, si la planète est une sphère d'une densité uniforme, ou uniformément variable; il aura encore lieu, si la planète était primitivement un corps mou qui, par conséquent, devait prendre la figure due à l'impulsion, de sorte que le diamètre, perpendiculaire à la direction de l'impulsion, devenait par là un axe libre. Mais s'il y a des planètes autrement formées, l'impulsion primitive peut avoir eu une direction qui n'était perpendiculaire à aucun des trois axes principaux: dans un pareil cas la rotation ne serait pas uniforme, ni l'axe invariable, ensorte qu'il serait très-difficile de déterminer la rotation par des observations géocentriques: on a voulu même expliquer de cette manière les contradictions apparentes entre les observations, relatives à la rotation de Vénus. Cependant, comme les taches de toutes les planètes, sur lesquelles on a pu les observer, indiquent une rotation uniforme sur un axe invariable, il est très-probable, que l'impulsion primitive de toutes les planètes a eu une direction convenable, ou plutôt que tous les corps célestes ont primitivement été des sphères uniformes ou des corps moux: ce qui prouve en même tems, que tous les corps célestes tournent sur un axe. Car le nombre des directions que l'impulsion primitive peut avoir eues, étant infini, il est infiniment peu probable qu'elle ait passé précisément par le centre de gravité; et pour peu qu'elle s'écartât de cette direction, la planète a dû recevoir, outre son mouvement elliptique autour du soleil, un mouvement de rotation autour de son centre de gravité.

(1) *Jo. Bernoulli Opera, Tom. IV. pag. 283. Coroll.*

CHAPITRE IV.

Perturbation de la rotation par des forces étrangères.

§. 98. On a vu dans le Chapitre II. du III. Livre, que la réaction ou la gravité universelle ne peut pas altérer sensiblement le mouvement de translation, ou elliptique des planètes, si elles ne s'écartent pas excessivement de la figure sphérique; mais il n'en est pas de même du mouvement de rotation. Si la direction moyenne de toutes les attractions que chaque élément d'une planète éprouve par l'action des autres corps célestes, ne passe pas par son centre de gravité, il en résultera une nouvelle rotation autour du centre de gravité, ou une perturbation de la rotation primitive; et cette perturbation est le sujet des Chapitres suivans de ce Livre. L'application de la théorie sera bornée à la rotation de la terre et de la lune, parce qu'elles sont les seuls corps célestes, dont la rotation puisse être observée avec assés de précision, pour que l'application de ces recherches donne un résultat utile à l'astronomie.

§. 99. Comme les forces qui sollicitent la planète, peuvent avoir toutes les directions possibles, selon la position des corps perturbateurs, il est nécessaire de les décomposer, ainsi que les vitesses de chaque élément $Z = \partial M$, qui en résultent, suivant trois axes fixes, AB, AC, AD, (*Fig.* 18.), que nous prendrons ensorte qu'ils se coupent perpendiculairement au centre de gravité A. Soient donc $AX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$, les coordonnées de l'élément Z, parallèles à ces axes, x, y, z, celles du corps perturbateur; et R sa distance à l'élément Z. Cela posé on aura

$$(A) \ldots\ldots R^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2.$$

Si l'on prend le demi-diamètre de la terre pour unité des lignes, la force

accélératrice de la masse de la terre par rapport à la pesanteur sur la terre, sera à la distance $R = \frac{1}{R^2}$, et la force du corps perturbateur, dont la masse, divisée par celle de la terre, est V, sera à la même distance $= \frac{V}{R^2}$. En nommant a', b', c', les forces accélératrices suivant x, y, z, que le corps V exerce sur l'élément ∂M, on aura

$$(1) \ldots\ldots a' = \frac{V}{R^2} \cdot \frac{x - X}{R}, \quad b' = \frac{V}{R^2} \cdot \frac{y - Y}{R}, \quad c' = \frac{V}{R^2} \cdot \frac{z - Z}{R}.$$

Or on a aussi (§. 17. n. 4.)

$$(2) \ldots\ldots a' = \frac{\partial \partial X}{2g\,\partial t^2}, \qquad b' = \frac{\partial \partial Y}{2g\,\partial t^2}, \qquad c' = \frac{\partial \partial Z}{2g\,\partial t^2},$$

la caractéristique ∂ se rapportant au mouvement composé de translation et de rotation de l'élément. En désignant donc par δ les différentielles qui résultent de la rotation seule, on aura

$$\delta x = 0, \ \delta y = 0, \ \delta z = 0, \ \text{et} \ \partial x = 0, \ \partial y = 0, \ \partial z = 0,$$

parce qu'on ne considère pas ici le mouvement du corps V, mais de la planète M. Si l'on différentie donc l'équation (A) par rapport à la rotation, il viendra $R\delta R = -(x - X)\delta X - (y - Y)\delta Y - (z - Z)\delta Z$, partant

$$(B) \ldots\ldots \frac{1}{R} = -\frac{\delta R}{(x-X)\delta X + (y-Y)\delta Y + (z-Z)\delta Z}.$$

En faisant, pour abréger,

$$\partial\partial X \cdot \delta X + \partial\partial Y \cdot \delta Y + \partial\partial Z \cdot \delta Z = U, \quad \text{et} \quad 2g\partial t^2 = \gamma,$$

on tirera des équations (1) (2)

$$a'\delta X + b'\delta Y + c'\delta Z = \frac{U}{\gamma} = \frac{V}{R^3}\,\{(x-X)\delta X + (y-Y)\delta Y + (z-Z)\delta Z\} = -\frac{V}{R^2}\delta R,$$

ce qui donnera, pour chaque élément ∂M, l'équation $0 = \frac{U}{\gamma} + \frac{V}{R^2}\delta R$, donc pour la somme des mouvemens et des forces de tous les élémens,

$$(C) \ldots\ldots 0 = \Sigma \cdot U\partial M + V\gamma \cdot \Sigma\,\frac{R\,\delta R}{R^3}\,\partial M,$$

l'intégrale Σ se rapportant aux élémens ∂M, et s'étendant à la masse entière du corps M, au lieu que $\int$ se rapporte au mouvement ou à la différentielle du tems ∂t.

§. 100. La direction de l'axe AB étant arbitraire, supposons d'abord, que le plan des x, y, soit parallèle à l'écliptique, et que AB soit dirigé vers le point vernal o ♈: alors AC se dirigera vers le point solstitial o ♋,

et AD vers le pole boréal de l'écliptique. En nommant donc la distance de l'élément ∂M au centre de gravité $ZA = r$, sa latitude $ZAY = p$, sa longitude $BAY = q$, on aura $ZY = r \sin p$, $AY = r \cos p$, partant

$$(3) \ldots\ldots X = r \cos p \cos q, \quad Y = r \cos p \sin q, \quad Z = r \sin p.$$

Si l'on suppose le corps perturbateur V en F, et qu'on nomme sa longitude vue de A, $BAE = v$, la tangente de sa latitude $EAF = \lambda$, sa distance de A, $AF = \varrho'$, sa distance réduite à l'écliptique ou accourcie, $AE = \varrho$, on aura $\varrho' = \varrho . \sqrt{(1 + \lambda^2)}$, et les équations

$$(4) \ldots\ldots x = \varrho \cos v, \quad y = \varrho \sin v, \quad z = \varrho \lambda.$$

Concevons autour du centre A, une sphère qui est coupée par les axes AB, AD, et par AZ, en B, D, et Z (*Fig.* 24.), ensorte que D soit le pole boréal de l'écliptique BL, et B le point o ♈ d'où se comptent les longitudes. Soit QNMR l'équateur de la planète A, P son pole, N son noeud descendant ou son point vernal, dont la longitude est $BN = \varepsilon$; soit l'angle formé par les deux plans, ou l'obliquité de l'écliptique sur la planète A, LNR ou $DP = \varpi$, PM le premier méridien, $NM = \omega$, la déclinaison de l'élément $ZK = P$, sa longitude géographique $MK = Q$. Cela posé, l'ascension droite de l'élément, comptée du noeud descendant N sera $NK = Q + \omega = Q'$, sa longitude $BDL = q$, sa latitude $ZL = p$, et sa longitude comptée du noeud N, $NL = q - \varepsilon = q'$. On aura donc dans le triangle DPZ,

$$\cos DZ = \cos PD \cos PZ + \sin PD \sin PZ \cos DPZ, \quad \sin PDZ = \frac{\sin PZ . \sin DPZ}{\sin DZ},$$

$$\operatorname{tang} PDZ = \frac{\sin PZ \; \sin DPZ}{\cos PZ . \sin PD - \sin PZ \cos PD \cos DPZ} = \frac{\sin PDZ}{\cos PDZ},$$

$$\text{et en substituant } \sin PDZ = \frac{\sin PZ . \sin DPZ}{\sin DZ},$$

$$\sin DZ \cos PDZ = \cos PZ \sin PD - \sin PZ \cos PD \cos DPZ.$$

Si l'on substitue $DZ = 90^\circ - p$, $PD = \varpi$, $PZ = 90^\circ - P$, $DPZ = 90^\circ + Q'$, $PDZ = 90^\circ - q'$, on aura les équations suivantes,

$$(5) \ldots\ldots \begin{cases} \sin p = \cos \varpi \sin P - \sin \varpi \cos P \sin Q', \quad \cos p \cos q' = \cos P \cos Q', \\ \cos p \sin q' = \sin \varpi \sin P + \cos \varpi \cos P \sin Q'. \end{cases}$$

En introduisant ces valeurs et $q = \varepsilon + q'$, dans les équations (3), elles deviendront

$$(6)\ldots\ldots\begin{cases}\frac{X}{r}=\cos\varepsilon\cos P\cos Q'-\sin\varepsilon\sin P\sin\varpi-\sin\varepsilon\cos P\sin Q'\cos\varpi,\\ \frac{Y}{r}=\cos\varepsilon\sin P\sin\varpi+\cos\varepsilon\cos P\sin Q'\cos\varpi+\sin\varepsilon\cos P\cos Q',\\ \frac{Z}{r}=\sin P\cos\varpi-\cos P\sin Q'\sin\varpi.\end{cases}$$

Ces équations nous apprennent, que X se change en Y, si l'on met $-\cos\varepsilon$ à la place de $\sin\varepsilon$, et $\sin\varepsilon$ au lieu de $\cos\varepsilon$, et que par conséquent X^2 se changera en Y^2, et $\partial\partial X\delta X$ en $\partial\partial Y\delta Y$, si l'on met $-\sin\varepsilon\cos\varepsilon$ au lieu de $\sin\varepsilon\cos\varepsilon$, $\cos^2\varepsilon$ au lieu de $\sin^2\varepsilon$, et $\sin^2\varepsilon$ au lieu de $\cos^2\varepsilon$: partant $\partial\partial X\delta X$ deviendra $\partial\partial X\delta X+\partial\partial Y\delta Y$, si l'on fait $\sin\varepsilon\cos\varepsilon=\sin\varepsilon\cos\varepsilon-\cos\varepsilon\sin\varepsilon=0$, $\sin^2\varepsilon=\sin^2\varepsilon+\cos^2\varepsilon=1$, et $\cos^2\varepsilon=\cos^2\varepsilon+\sin^2\varepsilon=1$. On formera donc $\partial\partial X\delta X$, en rejetant tous les termes multipliés par $\sin\varepsilon\cos\varepsilon$, et faisant $\sin^2\varepsilon=\cos^2\varepsilon=1$, ce qui donnera $\partial\partial X\delta X+\partial\partial Y\delta Y$.

D'ailleurs comme on peut supposer, que les planètes tournent sur un axe principal, les deux autres axes principaux sont situés dans le plan de l'équateur. En prenant donc les coordonnées de l'élément, X', Y', dans ce plan, et les axes des X', Z', suivant les directions du méridien N et du pole boréal P, on aura

$$Z'=r\sin P,\quad Y'=r\cos P\sin Q',\quad X'=r\cos P\cos Q'.$$

Mais l'axe des Z' étant un axe principal, $\Sigma X'Z'\partial M$ et $\Sigma Y'Z'\partial M$ sont nuls; et par la nature du centre de gravité A, $\Sigma X'\partial M$, $\Sigma Y'\partial M$, $\Sigma Z'\partial M$ sont aussi nuls, d'où l'on conclura ces équations de condition:

$$(7)\ldots\ldots 0=\Sigma r^2\partial M.\sin P\cos P\cos Q',\quad 0=\Sigma r^2\partial M.\sin P\cos P\sin Q',$$

$$(8)\ldots\ldots 0=\Sigma r\partial M.\cos P\cos Q',\ 0=\Sigma r\partial M.\cos P\sin Q',\ 0=\Sigma r\partial M.\sin P.$$

Maintenant il faut différentier X et Z, en regardant comme constans P et Q, parceque la rotation ne peut pas altérer la latitude et la longitude géographique de l'élément: les différentielles seront donc prises par rapport à ω, ε, ϖ; et l'on aura $\partial Q'=\partial\omega$, parce que $Q'=Q+\omega$. Ainsi les équations (6) donneront

$$(9)\ldots\ldots\begin{cases}\frac{\partial X}{r}=-\partial\omega\cos P(\sin Q'\cos\varepsilon+\cos Q'\sin\varepsilon\cos\varpi)\\ -\partial\varepsilon(\cos P\cos Q'\sin\varepsilon+\sin P\cos\varepsilon\sin\varpi+\cos P\sin Q'\cos\varepsilon\cos\varpi)\\ +\partial\varpi\sin\varepsilon(\cos P\sin Q'\sin\varpi-\sin P\cos\varpi),\\ \frac{\partial Z}{r}=-\partial\omega\cos P\cos Q'\sin\varpi-\partial\varpi(\sin P\sin\varpi+\cos P\sin Q'\cos\varpi);\end{cases}$$

$$(10)\ \ldots\ \begin{cases} \frac{\partial\partial X}{r} = -\partial\partial\omega\cos P(\sin Q'\cos\varepsilon + \cos Q'\sin\varepsilon\cos\varpi) \\ -\partial\partial\varepsilon(\cos P\cos Q'\sin\varepsilon + \sin P\cos\varepsilon\sin\varpi + \cos P\sin Q'\cos\varepsilon\cos\varpi) \\ +\partial\partial\varpi\sin\varepsilon(\cos P\sin Q'\sin\varpi - \sin P\cos\varpi) \\ +\partial\omega^2\cos P(\sin Q'\sin\varepsilon\cos\varpi - \cos Q'\cos\varepsilon) \\ +\partial\varepsilon^2(\sin P\sin\varepsilon\sin\varpi + \cos P\sin Q'\sin\varepsilon\cos\varpi - \cos P\cos Q'\cos\varepsilon) \\ +\partial\varpi^2\sin\varepsilon(\cos P\sin Q'\cos\varpi + \sin P\sin\varpi) \\ +2\partial\omega\partial\varepsilon\cos P(\sin Q'\sin\varepsilon - \cos Q'\cos\varepsilon\cos\varpi) \\ +2\partial\omega\partial\varpi\cos P\cos Q'\sin\varepsilon\sin\varpi + 2\partial\varepsilon\partial\varpi\cos\varepsilon(\cos P\sin Q'\sin\varpi - \sin P\cos\varpi), \\ \frac{\partial\partial Z}{r} = -\partial\partial\omega\cos P\cos Q'\sin\varpi - \partial\partial\varpi(\sin P\sin\varpi + \cos P\sin Q'\cos\varpi) \\ +\partial\omega^2\cos P\sin Q'\sin\varpi + \partial\varpi^2(\cos P\sin Q'\sin\varpi - \sin P\cos\varpi) \\ -2\partial\omega\partial\varpi\cos P\cos Q'\cos\varpi. \end{cases}$$

Si l'on multiplie les fonctions (10) et (9), en mettant dans les dernières la caractéristique δ à la place de ∂, qu'on rejette tous les termes multipliés par $\sin P\cos P\,{}^{\sin}_{\cos}Q'$ (7) ou par $\sin\varepsilon\cos\varepsilon$, et qu'on fasse $\sin^2\varepsilon = \cos^2\varepsilon = 1$, on trouvera

$$\frac{\partial\partial X.\delta X + \partial\partial Y.\delta Y}{r^2} =$$

$$\delta\omega\cos^2 P\begin{Bmatrix} \partial\partial\omega(1-\cos^2 Q'\sin^2\varpi) + \partial\partial\varepsilon\cos\varpi - \partial\partial\varpi\sin Q'\cos Q'\sin\varpi\cos\varpi \\ +(\partial\omega^2+\partial\varepsilon^2)\sin Q'\cos Q'\sin^2\varpi - \partial\varpi^2\sin Q'\cos Q'\cos^2\varpi \\ -2\partial\omega\partial\varpi\cos^2 Q'\sin\varpi\cos\varpi - 2\partial\varepsilon\partial\varpi\sin^2 Q'\sin\varpi \end{Bmatrix}$$

$$+\delta\varepsilon\begin{Bmatrix} \partial\partial\omega\cos^2 P\cos\varpi + \partial\partial\varepsilon[\cos^2 P + (\sin^2 P - \cos^2 P\sin^2 Q')\sin^2\varpi] \\ -\partial\partial\varpi\cos^2 P\sin Q'\cos Q'\sin\varpi - \partial\varpi^2\cos^2 P\sin Q'\cos Q'\cos\varpi \\ -2\partial\omega\partial\varepsilon\cos^2 P\sin Q'\cos Q'\sin^2\varpi - 2\partial\omega\partial\varpi\cos^2 P\cos^2 Q'\sin\varpi \\ +2\partial\varepsilon\partial\varpi(\sin^2 P - \cos^2 P\sin^2 Q')\sin\varpi\cos\varpi \end{Bmatrix}$$

$$+\delta\varpi\begin{Bmatrix} -\partial\partial\omega\cos^2 P\sin Q'\cos Q'\sin\varpi\cos\varpi - \partial\partial\varepsilon\cos^2 P\sin Q'\cos Q'\sin\varpi \\ +\partial\partial\varpi(\cos^2 P\sin^2 Q'\sin^2\varpi + \sin^2 P\cos^2\varpi) + \partial\omega^2\cos^2 P\sin^2 Q'\sin\varpi\cos\varpi \\ +(\partial\varepsilon^2+\partial\varpi^2)(\cos^2 P\sin^2 Q' - \sin^2 P)\sin\varpi\cos\varpi \\ +2\partial\omega\partial\varepsilon\cos^2 P\sin^2 Q'\sin\varpi + 2\partial\omega\partial\varpi\cos^2 P\sin Q'\cos Q'\sin^2\varpi \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial\partial Z.\delta Z}{r^2} =$$

$$\delta\omega\cos^2 P\sin\varpi\begin{Bmatrix} \partial\partial\omega\cos^2 Q'\sin\varpi + \partial\partial\varpi\sin Q'\cos Q'\cos\varpi \\ -(\partial\omega^2+\partial\varpi^2)\sin Q'\cos Q'\sin\varpi + 2\partial\omega\partial\varpi\cos^2 Q'\cos\omega \end{Bmatrix}$$

$$+\delta\varpi\left\{\begin{array}{l}\partial\partial\omega\cos^2 P\sin Q'\cos Q'\sin\varpi\cos\varpi+\partial\partial\varpi(\sin^2 P\sin^2\varpi+\cos^2 P\sin^2 Q'\cos^2\varpi)\\ -\partial\omega^2\cos^2 P\sin^2 Q'\sin\varpi\cos\varpi+\partial\varpi^2(\sin^2 P-\cos^2 P\sin^2 Q')\sin\varpi\cos\varpi\\ +2\partial\omega\partial\varpi\cos^2 P\sin Q'\cos Q'\cos^2\varpi\end{array}\right\};$$

d'où l'on tirera, en ajoutant ensemble ces deux fonctions, (§. 99.)

$$\frac{U}{r^2}=\delta\omega\cos^2 P\,\{\partial\partial\omega+\partial\partial\varepsilon\cos\varpi+\tfrac{1}{2}\sin 2Q'(\partial\varepsilon^2\sin^2\varpi-\partial\varpi^2)-\partial\varepsilon\partial\varpi(1-\cos 2Q')\sin\varpi\}$$

$$+\delta\varepsilon\left\{\begin{array}{l}\partial\partial\omega\cos^2 P\cos\varpi+\partial\partial\varepsilon\,[\cos^2 P+(\sin^2 P-\tfrac{1}{2}\cos^2 P(1-\cos 2Q'))\sin^2\varpi]\\ -\frac{\partial\partial\varpi}{2}\cos^2 P\sin 2Q'\sin\varpi-\cos^2 P\sin 2Q'\left(\frac{\partial\varpi^2}{2}\cos\varpi+\partial\omega\partial\varepsilon\sin^2\varpi\right)\\ -\partial\omega\partial\varpi\cos^2 P\,(1+\cos 2Q')\sin\varpi\\ +2\partial\varepsilon\partial\varpi\,[\sin^2 P-\tfrac{1}{2}\cos^2 P\,(1-\cos 2Q')]\sin\varpi\cos\varpi\end{array}\right\}$$

$$+\delta\varpi\left\{\begin{array}{l}-\frac{\partial\partial\varepsilon}{2}\cos^2 P\sin 2Q'\sin\varpi+\partial\partial\varpi\,[\sin^2 P+\tfrac{1}{2}\cos^2 P\,(1-\cos 2Q')]\\ +\partial\varepsilon^2\,[\tfrac{1}{2}\cos^2 P\,(1-\cos 2Q')-\sin^2 P]\sin\varpi\cos\varpi\\ +\partial\omega\partial\varepsilon\cos^2 P\,(1-\cos 2Q')\sin\varpi+\partial\omega\partial\varpi\cos^2 P\sin 2Q'\end{array}\right\}.$$

Faisons maintenant pour abréger,

$$(11)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\partial\partial\omega+\partial\partial\varepsilon\cos\varpi-\partial\varepsilon\partial\varpi\sin\varpi=\partial(\partial\omega+\partial\varepsilon\cos\varpi)=\Omega,\\ \partial\,(\partial\omega\cos\varpi+\partial\varepsilon)=\mathrm{E},\quad \partial\partial\varpi+\partial\omega\partial\varepsilon\sin\varpi=\Pi,\end{array}\right.$$

$$(12)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\Sigma r^2\partial M\cos^2 P=H,\quad \Sigma r^2\partial M\sin^2 P=K,\\ \Sigma r^2\partial M\cos^2 P.\cos 2Q'=L',\quad \Sigma r^2\partial M\cos^2 P\sin 2Q'=N',\end{array}\right.$$

et substituons cela dans la valeur précédente de $\frac{U}{r^2}$; il viendra

$$\Sigma U\partial M=\delta\omega\left\{H\Omega+\frac{N'}{2}(\partial\varepsilon^2\sin^2\varpi-\partial\varpi^2)+L'\partial\varepsilon\partial\varpi\right\}$$

$$+\delta\varepsilon\left\{\begin{array}{l}HE+(K-\tfrac{1}{2}H+\tfrac{1}{2}L')\partial\partial\varepsilon\sin^2\varpi-\tfrac{1}{2}N'(\partial\partial\varpi\sin\varpi+\partial\varpi^2\cos\varpi+2\partial\omega\partial\varepsilon\sin^2\varpi)\\ -L'\partial\omega\partial\varpi\sin\varpi+(2K-H+L')\partial\varepsilon\partial\varpi\sin\varpi\cos\varpi\end{array}\right\}$$

$$+\delta\varpi\left\{\begin{array}{l}H\Pi-\tfrac{1}{2}N'\partial\partial\varepsilon\sin\varpi+(K-\tfrac{1}{2}H-\tfrac{1}{2}L')\partial\partial\varpi\\ +(\tfrac{1}{2}H-K-\tfrac{1}{2}L')\partial\varepsilon^2\sin\varpi\cos\varpi-L'\partial\omega\partial\varepsilon\sin\varpi+N'\partial\omega\partial\varpi\end{array}\right\}.$$

On peut simplifier cette formule par les considérations suivantes. Si l'on suppose la planète A sphérique, sa densité égale à l'unité, et qu'on regarde l'élément ∂M comme un parallèlepipède, dont la base est terminée par les arcs infiniment petits de deux méridiens et de deux parallèles, et dont la hauteur est la différentielle de la distance r, on aura $\partial M=r\partial P.r\partial Q\cos P.\partial r=r^2\partial r.\partial Q.\partial P\cos P$, d'où l'on tire $H=\Sigma r^4\partial r.\partial Q.\partial P\cos^3 P$, $K=\Sigma r^4\partial r.\partial Q.\partial P\cos P\sin^2 P$,

$\Sigma r^2 \partial M \cos^2 P \cos 2Q = L = \Sigma r^4 \partial r . \partial Q \cos 2Q . \partial P \cos^3 P$, $\Sigma r^2 \partial M \cos^2 P \sin 2Q = N = \Sigma r^4 \partial r . \partial Q \sin 2Q . \partial P \cos^3 P$. On aura ces intégrales pour la demi-sphère, en intégrant d'abord par rapport à r, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = r'$, r' étant le rayon de la sphère; ensuite par rapport à Q, depuis $Q = 0$ jusqu'à $Q = 360° = 2\pi$, enfin par rapport à P, depuis $P = 0$ jusqu'à $P = 90°$; d'où il résulte

$$H = \frac{2\pi}{5} r'^5 . \Sigma (1 - \sin^2 P) \partial . \sin P = \frac{4\pi}{15} r'^5,$$

$$K = \frac{2\pi}{5} r'^5 . \Sigma . \sin^2 P . \partial . \sin P = \frac{2\pi}{15} r'^5 = \frac{1}{2} H,$$

$$L = \frac{r'^5}{10} \sin 2Q . \Sigma . \partial P \cos^3 P = 0,$$

$$N = \frac{r'^5}{10} (1 - \cos 2Q) \Sigma . \partial P \cos^3 P = 0, \text{ à cause de } 2Q = 4\pi.$$

Or tous les corps célestes que nous connaissons, s'écartant très-peu des suppositions précédentes, on a à peu près $K = \frac{1}{2} H$, $L = N = 0$; du moins $\frac{1}{2} H - K$, L, et N, seront des quantités très-petites par rapport à H et K, qu'on peut négliger dans la fonction $\Sigma U \partial M$. Le second terme de l'équation (C) (§. 99.), étant multiplié par la force perturbatrice V, serait nul, si la planète était une sphère homogène: il sera donc multiplié par les quantités $\frac{1}{2} H - K$, ou L, ou N, qui déterminent les irrégularités de la formation de la planète, ainsi qu'on le verra dans la suite: il n'est donc pas permis, de négliger ces facteurs dans le second terme. Maintenant il faut se rappeler (12) que $L' = \Sigma r^2 \partial M \cos^2 P (\cos 2Q \cos 2\omega - \sin 2Q \sin 2\omega) = L \cos 2\omega - N \sin 2\omega$, et $N' = \Sigma r^2 \partial M \cos^2 P (\sin 2Q \cos 2\omega + \cos 2Q \sin 2\omega) = N \cos 2\omega + L \sin 2\omega$, d'où il suit que L' et N' peuvent aussi être négligés. En faisant donc $K = \frac{1}{2} H$, $L' = 0$, $N' = 0$, l'équation précédente donnera

$$(D) \ldots\ldots \Sigma . U \partial M = H (\Omega \delta \omega + E \delta \iota + \Pi \delta \varpi).$$

§. 101. Considérons maintenant le second terme de l'équation (C), $V \gamma . \Sigma \frac{R \delta R}{R^3} \partial M$, qui détermine l'action de la force perturbatrice V. Pour cela faisons

$$X \cos v + Y \sin v + Z \lambda = S, \quad \text{et} \quad \varrho \sqrt{(1 + \lambda^2)} = \varrho',$$

ce qui donne par les équations (A) et (4) (§. 99. 100.),

$$R^2 = \varrho'^2 - 2 \varrho S + r^2.$$

Puisque δx, δy, δz, sont nuls (§. 99.), x, y, z, et par conséquent (4),

ρ, v, λ, doivent être regardés comme des quantités constantes; de plus, les distances des corps célestes entre eux étant incomparablement plus grandes que leurs diamètres, les quantités r, X, Y, Z, sont très-petites par rapport à ρ: on aura donc

$$R\delta R = -\rho\delta S, \text{ et } \frac{1}{R^3} = \frac{1}{\rho'^3}\left(1 - \frac{2\rho S}{\rho'^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\rho'^3} + \frac{3\rho S}{\rho'^5},$$

d'où il vient

$$\frac{R\delta R}{R^3} = -\frac{\delta S}{\rho^2(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 S\delta S}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Les différentielles δX, δY, δZ (9) (§. 100.) ne renferment que des termes de la forme (8), qui, étant intégrés par rapport à Σ, deviennent nuls. On a donc

$$\Sigma\delta S = \Sigma\delta X\cos v + \Sigma\delta Y\sin v + \Sigma\lambda\delta Z = 0,$$

et il ne restera que le dernier terme

$$\frac{R\delta R}{R^3} = -\frac{3 S\delta S}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

En différentiant le carré de S, on trouvera

$$(13)\ldots\ldots S\delta S = X\delta X\cos^2 v + Y\delta Y\sin^2 v + (Y\delta X + X\delta Y)\sin v\cos v$$
$$+ \lambda.\delta(XZ\cos v + YZ\sin v) + \lambda^2 Z\delta Z;$$

où il faut omettre tous les termes de la forme (7) (§. 100.). Les équations (6) et (9) donneront

$$\frac{X\delta X\cos^2 v}{r^2} = -\delta\omega.\cos^2 v\cos^2 P\left\{\begin{matrix}\sin Q'\cos Q'(\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon\cos^2\varpi)\\ + (\cos^2 Q' - \sin^2 Q')\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\varpi\end{matrix}\right\}$$
$$-\delta\varepsilon\cos^2 v\left\{\begin{matrix}\sin\varepsilon\cos\varepsilon(\cos^2 P - \sin^2 P\sin^2\varpi - \cos^2 P\sin^2 Q'\cos^2\varpi)\\ + (\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon)\cos^2 P\sin Q'\cos Q'\cos\varpi\end{matrix}\right\}$$
$$+\delta\varpi\cos^2 v\sin\varepsilon\sin\varpi\{\cos^2 P\sin Q'\cos Q'\cos\varepsilon + (\sin^2 P - \cos^2 P\sin^2 Q')\sin\varepsilon\cos\varpi\},$$
$$\frac{\lambda^2 Z\delta Z}{r^2} = \lambda^2\delta\omega\cos^2 P\sin Q'\cos Q'\sin^2\varpi - \lambda^2\delta\varpi\sin\varpi\cos\varpi(\sin^2 P - \cos^2 P\sin^2 Q').$$

Tous les termes de la première formule sont multipliés par $\cos^2 v\sin^2\varepsilon$, ou par $\cos^2 v\cos^2\varepsilon$, ou par $\cos^2 v\sin\varepsilon\cos\varepsilon$; et l'on a vu (§. 100.) que X se change en Y, si l'on met $-\cos\varepsilon$ à la place de $\sin\varepsilon$, et $\sin\varepsilon$ au lieu de $\cos\varepsilon$: $X\delta X\cos^2 v$ se transformera donc en $Y\delta Y\sin^2 v$, si l'on met, outre les substitutions précédentes, $\sin^2 v$ au lieu de $\cos^2 v$; d'où il suit, que $X\delta X\cos v$ deviendra $X\delta X\cos^2 v + Y\delta Y\sin^2 v$, si l'on substitue $\cos^2 v\sin^2\varepsilon +$

$\sin^2 v \cos^2 \varepsilon = \sin^2 (v - \varepsilon) + \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon \sin 2v$ au lieu de $\cos^2 v \sin^2 \varepsilon$, $\cos^2 v \cos^2 \varepsilon + \sin^2 v \sin^2 \varepsilon = \cos^2 (v - \varepsilon) - \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon \sin 2v$ au lieu de $\cos^2 v \cos^2 \varepsilon$, et $\sin \varepsilon \cos \varepsilon (\cos^2 v - \sin^2 v) = \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon \cos 2v$ au lieu de $\sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos^2 v$. Cela posé, en substituant encore les valeurs (12), et faisant pour abréger, $\frac{1}{2} H - K = H'$, $v - \varepsilon = u$, on trouvera

$$(a) \ldots\ldots \Sigma \partial M (X \delta X \cos^2 v + Y \delta Y \sin^2 v + \lambda^2 Z \delta Z) =$$

$$- \tfrac{1}{2} \delta\omega \{ L' \cos 2v \sin 2\varepsilon \cos \varpi + N' [\cos 2v \cos 2\varepsilon + (\sin^2 u + \tfrac{1}{2} \sin 2v \sin 2\varepsilon - \lambda^2) \sin^2 \varpi] \}$$
$$- \tfrac{1}{2} \delta \varepsilon \cos 2v \{ [H' \sin^2 \varpi + \tfrac{1}{2} L' (1 + \cos^2 \varpi)] \sin 2\varepsilon + N' \cos 2\varepsilon \cos \varpi \}$$
$$- \tfrac{1}{2} \delta \varpi \{ (H' - \tfrac{1}{2} L') (\sin^2 u + \tfrac{1}{2} \sin 2v \sin 2\varepsilon - \lambda^2) \sin 2\varpi - \tfrac{1}{2} N' \cos 2v \sin 2\varepsilon \sin \varpi \}.$$

Le terme $(Y \delta X + X \delta Y) \sin v \cos v$ est $\frac{1}{2} \sin 2v . \delta (XY)$, et en rejetant dans les équations (6) (§. 100.) les termes de la forme (7), on trouvera

$$\frac{XY}{r^2} = \sin \varepsilon \cos \varepsilon (\cos^2 P \cos^2 Q' - \sin^2 P \sin^2 \varpi - \cos^2 P \sin^2 Q' \cos^2 \varpi)$$
$$+ (\cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon) \cos^2 P \sin Q' \cos Q' \cos \varpi;$$

$$\frac{\delta \cdot XY}{r^2} = - \delta \omega \cos^2 P \{ \tfrac{1}{2} \sin 2\varepsilon \sin 2Q' (1 + \cos^2 \varpi) - \cos 2\varepsilon \cos 2Q' \cos \varpi \}$$
$$+ \delta \varepsilon \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{2} \cos 2\varepsilon [(\cos^2 P - 2 \sin^2 P) \sin^2 \varpi + \cos^2 P \cos 2Q' (1 + \cos^2 \varpi)] \\ - \sin 2\varepsilon \cos^2 P \sin 2Q' \cos \varpi \end{array} \right\}$$
$$- \delta \varpi \sin \varpi \{ \sin 2\varepsilon \cos \varpi [\sin^2 P - \tfrac{1}{2} \cos^2 P (1 - \cos 2Q')] + \tfrac{1}{2} \cos 2\varepsilon \cos^2 P \sin 2Q' \},$$

donc
$$(b) \ldots\ldots \Sigma \partial M (Y \delta X + X \delta Y) \sin v \cos v =$$
$$\tfrac{1}{2} \delta \omega \sin 2v \{ L' \cos 2\varepsilon \cos \varpi - \tfrac{1}{2} N' \sin 2\varepsilon (1 + \cos^2 \varpi) \}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \delta \varepsilon \sin 2v \{ \cos 2\varepsilon [H' \sin^2 \varpi + \tfrac{1}{2} L' (1 + \cos^2 \varpi)] - N' \sin 2\varepsilon \cos \varpi \}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \delta \varpi \sin 2v \sin \varpi \{ (H' - \tfrac{1}{2} L') \sin 2\varepsilon \cos \varpi - \tfrac{1}{2} N' \cos 2\varepsilon \}.$$

On aura, par ce qui précède, $\delta (XZ \cos v + YZ \sin v)$, si l'on met dans $\delta . XZ \cos v$, $\sin (\varepsilon - v) = - \sin u$ au lieu de $\sin \varepsilon \cos v$, et $\cos u$ au lieu de $\cos \varepsilon \cos v$. Mais (6),

$$\frac{XZ}{r^2} = - \tfrac{1}{2} \sin^2 P \sin \varepsilon \sin 2\varpi - \tfrac{1}{2} \cos^2 P \sin 2Q' \cos \varepsilon \sin \varpi$$
$$+ \tfrac{1}{4} \cos^2 P (1 - \cos 2Q') \sin \varepsilon \sin 2\varpi,$$ d'où l'on tire

$$(c) \ldots\ldots \lambda . \Sigma \partial M . \delta (XZ \cos v + YZ \sin v) =$$
$$- \lambda \delta \omega \sin \varpi \{ L' \cos u + N' \sin u \cos \varpi \} + \lambda \delta \varepsilon \sin \varpi \{ (H' - \tfrac{1}{2} L') \cos u \cos \varpi - \tfrac{1}{2} N' \sin u \}$$
$$- \lambda \delta \varpi \{ (H' - \tfrac{1}{2} L') \sin u \cos 2\varpi + \tfrac{1}{2} N' \cos u \cos \varpi \}.$$

Si l'on ajoute ensemble les trois fonctions (*a*) (*b*) (*c*), l'équation (13) donnera

$$\Sigma . S\delta S . \partial M =$$

$$\frac{\delta\omega}{2}\left\{\begin{array}{l} L'(\sin 2u \cos \varpi - 2\lambda \cos u \sin \varpi) - \\ \frac{1}{2}N[(1-2\lambda^2)\sin^2\varpi + (1+\cos^2\varpi)\cos 2u + 2\lambda \sin u \sin 2\varpi] \end{array}\right\}$$

$$+\frac{\delta\varepsilon}{2}\left\{\begin{array}{l} H'(\sin 2u \sin^2\varpi + \lambda \cos u \sin 2\varpi) + \frac{L'}{2}[\sin 2u(1+\cos^2\varpi) \\ - \lambda \cos u \sin 2\varpi] - N'(\cos 2u \cos\varpi + \lambda \sin u \sin \varpi) \end{array}\right\}$$

$$-\frac{\delta\varpi}{2}\left\{\begin{array}{l} \left[H' - \frac{L'}{2}\right][\frac{1}{2}\sin 2\varpi(1-\cos 2u - 2\lambda^2) + 2\lambda \sin u \cos 2\varpi \\ + \frac{N'}{2}[\sin 2u \sin \varpi + 2\lambda \cos u \cos \varpi] \end{array}\right\}.$$

Faisons pour abréger,

$$(14)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\sin 2u \cos\varpi - \lambda \cos u \sin \varpi = \mathfrak{A}, \quad \frac{1-2\lambda^2}{4}\sin^2\varpi \\ + \frac{1+\cos^2\varpi}{4}\cos 2u + \frac{\lambda}{2}\sin u \sin 2\varpi = \mathfrak{B}, \ \frac{1}{2}\sin 2u \sin^2\varpi + \frac{\lambda}{2}\cos u \sin 2\varpi = \mathfrak{C}, \\ \frac{1+\cos^2\varpi}{4}\sin 2u - \frac{\lambda}{4}\cos u \sin 2\varpi = \mathfrak{D}, \ \frac{1}{2}\cos 2u \cos\varpi + \frac{\lambda}{2}\sin u \sin\varpi = \mathfrak{E}, \\ \frac{\sin 2\varpi}{4}(1-\cos 2u - 2\lambda^2) + \lambda \sin u \cos 2\varpi = \mathfrak{F}, \\ \frac{\sin\varpi}{4}\sin 2u + \frac{\lambda}{2}\cos u \cos\varpi = \mathfrak{G}, \end{array}\right.$$

et substituons $L' = L\cos 2\omega - N\sin 2\omega$, $N' = N\cos 2\omega + L\sin 2\omega$ (§. 100.): cela posé, l'équation précédente prendra la forme

$$\begin{array}{l} (E)\ldots\ldots \Sigma S\delta S\partial M = \delta\omega\{(\mathfrak{A}L - \mathfrak{B}N)\cos 2\omega - (\mathfrak{A}N + \mathfrak{B}L)\sin 2\omega\} \\ + \delta\varepsilon\{\mathfrak{C}H + (\mathfrak{D}L - \mathfrak{E}N)\cos 2\omega - (\mathfrak{D}N + \mathfrak{E}L)\sin 2\omega\} \\ - \delta\varpi\{\mathfrak{F}H' - (\frac{1}{2}\mathfrak{F}L - \mathfrak{G}N)\cos 2\omega + (\frac{1}{2}\mathfrak{F}N + \mathfrak{G}L)\sin 2\omega\}, \end{array}$$

ce qui étant multiplié par $-\frac{3V\gamma}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{6Vg\partial t^2}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}$, donnera le dernier terme de l'équation (C) (§. 99.).

§. 102. Pour donner plus de symmétrie à l'équation (C), faisons

$$(15)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{lll} \mathfrak{A}\cos 2\omega - \mathfrak{B}\sin 2\omega = \Omega'', & \mathfrak{A}\sin 2\omega + \mathfrak{B}\cos 2\omega = \Omega''', & \mathfrak{C} = E', \\ \mathfrak{D}\cos 2\omega - \mathfrak{E}\sin 2\omega = E', & \mathfrak{D}\sin 2\omega + \mathfrak{E}\cos 2\omega = E''', & \mathfrak{F} = \Pi', \\ \frac{1}{2}\mathfrak{F}\cos 2\omega - \mathfrak{G}\sin 2\omega = \Pi'', & \frac{1}{2}\mathfrak{F}\sin 2\omega + \mathfrak{G}\cos 2\omega = \Pi''': & \end{array}\right.$$

elle prendra alors cette forme,

$$(F)\ldots\ldots H(\Omega\delta\omega + E\delta\varepsilon + \Pi\delta\varpi)' =$$

$$\frac{6Vg\partial t^2}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\{\delta\omega(\Omega''L - \Omega'''N) + \delta\varepsilon(E'H + E''L - E'''N) - \delta\varpi(\Pi'H' - \Pi''L + \Pi'''N)\}.$$

Puisque les variations $\delta\omega$, $\delta\varepsilon$, $\delta\varpi$, sont indépendantes l'une de l'autre, il faut égaler séparément les coefficiens qui multiplient chacune d'elles dans les deux membres de l'équation (F); ce qui donnera ces trois équations fondamentales pour la rotation des corps célestes et ses perturbations:

$$\text{I.} \quad \Omega = \frac{6\, g\, V\, \partial t^2}{\rho^3 (1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\Omega'' L - \Omega''' N}{H},$$

$$\text{II.} \quad E = \frac{6\, g\, V\, \partial t^2}{\rho^3 (1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{E'(\frac{1}{2} H - K) + E'' L - E''' N}{H},$$

$$\text{III.} \quad \Pi = \frac{6\, g\, V\, \partial t^2}{\rho^3 (1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\Pi'(K - \frac{1}{2} H) + \Pi'' K - \Pi''' N}{H}.$$

L'intégration de ces équations donnera, pour un tems quelconque t, les trois angles ω, ε, ϖ, ou les vitesses de leurs variations, $\frac{\partial \omega}{\partial t}$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, $\frac{\partial \varpi}{\partial t}$. Or on a vu (§. 100.), que ϖ est l'angle qu'on appelle, relativement à la terre, l'obliquité de l'écliptique, que ε est la longitude du point équinoxial de la planète troublée, comptée des points équinoxiaux de la terre, ou d'une ligne fixe quelconque, et que ω est la position d'un méridien donné, par rapport aux points équinoxiaux. La variation de ϖ est donc ce que les astronomes désignent par le nom de *nutation*, celle de ε est la *précession*, et la variation de ω est le mouvement des méridiens, et par conséquent la *rotation* même. Ainsi $\frac{\partial \omega}{\partial t}$, ou si la précession n'est pas insensible par rapport à la rotation, $\frac{\partial \omega \pm \partial \varepsilon}{\partial t}$ sera la vitesse de la rotation de la planète; et si l'on nomme μ, ν, les valeurs moyennes de $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, $\frac{\partial \varpi}{\partial t}$, μt et νt seront la précession et la nutation moyennes pour le tems t.

Comme nous ne considérons ici que les perturbations que la lune éprouve par l'action de la terre, et celles que la lune et le soleil exercent sur la terre, l'un des deux corps, M et V, est le corps central de l'autre. En désignant donc par V la masse du corps central, divisée par celle de la terre, par n le sinus du moyen mouvement de l'autre corps en une seconde, par A le demi-diamètre de son orbite supposée circulaire, et prenant le demi-diamètre de la terre pour l'unité des distances, on aura (§. 59.),

$$\frac{2\, g\, V}{A^3} = n^2, \quad A = \rho' = \rho \sqrt{(1+\lambda^2)} \text{ (§. 100.), partant}$$

$$(16) \ldots\ldots \frac{6gV}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3n^2}{1+\lambda^2};$$

ce qui donnera aux équations précédentes cette forme:

$$\text{I.} \quad \frac{\Omega}{\partial t^2} = \frac{3n^2}{1+\lambda^2} \cdot \frac{\Omega'' L - \Omega''' N}{H}, \quad \text{II.} \quad \frac{E}{\partial t^2} = \frac{3n^2}{1+\lambda^2} \cdot \frac{E'(\frac{1}{2}H - K) + E'' L - E''' N}{H},$$

$$\text{III.} \quad \frac{\Pi}{\partial t^2} = \frac{3n^2}{1+\lambda^2} \cdot \frac{\Pi'(K - \frac{1}{2}H) + \Pi'' L - \Pi''' N}{H}.$$

Lorsqu'il s'agit des perturbations que la lune éprouve par la terre, et la terre par le soleil, le corps perturbateur V est le corps central, ainsi que nous l'avons supposé. Mais quand il s'agit des perturbations que la terre éprouve par l'action de la lune, la masse du corps central est celle du corps troublé: il faut donc multiplier le second membre des équations précédentes par la masse de la lune, divisée par celle de la terre, ou il faut les diviser par 78.

Si l'on désigne par X', Y', Z', les coordonnées d'un élément ∂M, parallèles et perpendiculaires à l'équateur du corps troublé (§. 100.), on a $\Sigma X'X'\partial M = A = \Sigma r^2 \partial M \cos^2 P \frac{1+\cos 2Q}{2}$, $\Sigma Y'Y'\partial M = B = \Sigma r^2 \partial M \cos^2 P \frac{1-\cos 2Q}{2}$, $\Sigma Z'Z'\partial M = C = \Sigma r^2 \partial M \sin^2 P$; d'où il suit (§. 100. (12))

$$A = \tfrac{1}{2}(H + L), \quad B = \tfrac{1}{2}(H - L), \quad C = K.$$

Puisque les deux autres axes principaux sont situés dans l'équateur, on peut les prendre pour les axes des X' et Y': cela posé, les momens d'inertie du corps troublé, par rapport aux trois axes principaux, dont les deux premiers sont des diamètres de l'équateur, le troisième étant perpendiculaire à l'équateur, seront (§. 84.)

$$Ma^2 = B + C = K + \tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}L, \quad Mb^2 = K + \tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}L, \quad Mc^2 = H.$$

On a de plus $D = \Sigma X'Y'\partial M = \frac{1}{2}\Sigma r^2 \partial M \cos^2 P \sin 2Q = \frac{1}{2}N$. Or les axes des X', Y', étant des axes principaux, D est nul (§. 81.) et $N = 0$. On a donc:

$$H = Mc^2, \quad K = \frac{M}{2}(a^2 + b^2 - c^2), \quad L = M(b^2 - a^2); \quad N = 0.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations précédentes, elles deviendront

$$\text{IV.} \quad \frac{\Omega}{\partial t^2} = \frac{3n^2}{1+\lambda^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c^2}\Omega''; \quad \text{V.} \quad \frac{E}{\partial t^2} = \frac{3n^2}{1+\lambda^2} \left\{ \frac{2c^2 - a^2 - b^2}{2c^2} E' + \frac{b^2 - a^2}{c^2} E'' \right\};$$

$$\text{VI.} \quad \frac{\Pi}{\partial t^2} = \frac{3n^2}{1+\lambda^2} \left\{ \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{2c^2} \Pi' + \frac{b^2 - a^2}{c^2} \Pi'' \right\}.$$

Ces dernières équations sont exactes, si l'on suppose, que la planète a pri–

mitivement tourné autour d'un axe principal, ce qui est probablement le cas de tous les corps célestes.

§. 103. Supposons que l'axe des Z, AD (*Fig.* 18.) s'écarte très-peu de l'axe de rotation AF, et que par conséquent le plan des X', Y', coïncide à peu près avec l'équateur, X', Y', Z', étant les coordonnées de l'élément Z, relatives à l'équateur et à l'axe de rotation, ensorte que $Ax = Z'$, $xy = -X'$, $yZ = Y'$. Cela posé, X', Y', Z', seront les lignes qui ont été désignées (§. 82.) par $-y$, x, z: on aura donc (§. 82.)

$$(17)\ldots\ldots \begin{cases} X' = X \cos\eta \sin\theta + Y \sin\eta \sin\theta - Z\cos\theta, \quad Y' = Y\cos\eta - X\sin\eta, \\ Z' = X\cos\eta\cos\theta + Y\sin\eta\cos\theta + Z\sin\theta, \end{cases}$$

la position de l'axe de rotation, qui est supposé invariable pendant le tems ∂t, étant déterminée par son inclinaison sur le plan des X, Y, $EAF = \theta$, et par l'angle $BAE = \eta$ que fait la commune section AE avec l'axe des X, de sorte qu'il faut regarder les angles η, θ, comme constans pendant la rotation instantanée. Soit maintenant l'axe de rotation représenté par AD, les coordonnées de l'élément y étant $AU = X'$, $UX' = Y'$, $X'y = Z'$: cela posé, les distances de l'élément à l'axe et à l'équateur, AX' et Z', ne seront point altérées par la rotation. En supposant donc, que la rotation se fait suivant BC avec la vitesse angulaire u, l'élément y tournera parallèlement à la direction X'Y ou PX' qui est perpendiculaire à AX', en parcourant en une seconde la ligne $u \,.\, AX' = e$: on aura donc

$$\partial X' = -\frac{UP}{X'P} e\,\partial t = -e\,\partial t \sin UX'P = -e\,\partial t \sin UAX' = -\frac{e.Y'}{AX'}\partial t, \quad \partial Y' = \frac{e.X'}{AX'}\partial t,$$

d'où l'on conclura ces trois équations,

$$\partial X' = -u\,.\,Y'\partial t, \quad \partial Y' = u\,.\,X'\,\partial t, \quad \partial Z' = 0,$$

et en substituant les valeurs (17),

$$\partial X\cos\eta\sin\theta + \partial Y\sin\eta\sin\theta - \partial Z\cos\theta = -u\,.\,Y'\partial t,$$

$$\partial Y\cos\eta - \partial X\sin\eta = u\,.\,X'\partial t, \quad \partial X\cos\eta\cos\theta + \partial Y\sin\eta\cos\theta + \partial Z\sin\theta = 0.$$

Si l'on ôte la première de ces équations, multipliée par $\cos\theta$, de la troisième multipliée par $\sin\theta$, il viendra

$$(18)\ldots\ldots \frac{\partial Z}{\partial t} = u\,.\,Y'\cos\theta.$$

Si l'on multiplie la troisième par $\cos\eta$, et la seconde par $-\sin\eta\cos\theta$, et

qu'on les ajoute ensemble, on aura $\partial X \cos\theta + \partial Z \cos\eta \sin\theta = -u . X'\partial t \sin\eta \cos\theta$, et si l'on substitue au lieu de ∂Z sa valeur (18), il viendra

$$(19) \ldots\ldots \frac{\partial X}{\partial t} = -u\,(X' \sin\eta + Y' \cos\eta \sin\theta).$$

La somme de la première et de la troisième, multipliées respectivement par $\sin\theta$ et par $\cos\theta$, donnera $\partial X \cos\eta + \partial Y \sin\eta = -u . Y'\partial t \sin\theta$, et en substituant (19), on aura

$$(20) \ldots\ldots \frac{\partial Y}{\partial t} = u\,(X' \cos\eta - Y' \sin\eta \sin\theta).$$

La position de l'axe de rotation, que nous avons déterminée par les angles η, θ, peut aussi être donnée par les angles que cet axe fait avec les trois axes principaux, savoir $BAF = \alpha$, $CAF = \beta$, $DAF = \gamma$. En effet on a $\cos\alpha = \cos\eta\cos\theta$, $\cos\beta = \sin\eta\cos\theta$, $\cos\gamma = \sin\theta$, d'où il suit $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, et $\sin^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$. Si l'on substitue dans les équations (18) (19) (20) les valeurs (17), et qu'on fasse pour abréger,

$$(21) \ldots\ldots u\cos\alpha = p, \quad u\cos\beta = q, \quad u\cos\gamma = r,$$

on trouvera

$$(G) \ldots\ldots \frac{\partial X}{\partial t} = Zq - Yr, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = Xr - Zp, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = Yp - Xq.$$

Nommons a', b', c', les forces accélératrices qui sollicitent l'élément ∂M suivant les directions des X, Y, Z, et désignons par P', Q', R', les momens de ces forces, pour faire tourner l'élément autour des axes AB, AC, AD, suivant CD, DB, BC: cela posé, il est aisé de voir que la force a' aura suivant les mêmes directions les momens, o, $a'Z\partial M$, $-a'Y\partial M$, que b' aura les momens, $-b'Z\partial M$, o, $b'X\partial M$, et c' les momens $c'Y\partial M$, $-c'X\partial M$, o. On a donc

$$(22) \ldots\ldots P' = (c'Y - b'Z)\partial M, \; Q' = (a'Z - c'X)\partial M, \; R' = (b'X - a'Y)\partial M.$$

En substituant les valeurs de a', b', c', (§. 99. (2)), la somme des momens dans le corps entier sera

$$\Sigma P' = \frac{\Sigma(Y\partial\partial Z - Z\partial\partial Y)}{2g\partial t^2}\partial M, \qquad \Sigma Q' = \frac{\Sigma(Z\partial\partial X - X\partial\partial Z)\partial M}{2g\partial t^2},$$

$$\Sigma R' = \frac{\Sigma(X\partial\partial Y - Y\partial\partial X)\partial M}{2g\partial t^2}.$$

La différentiation des équations (G) donnera

$$(23)\ldots\ldots\begin{cases}\dfrac{\partial\partial X}{\partial t}=Z\partial q-Y\partial r+(Ypq-Xq^2-Xr^2+Zpr)\partial t,\\ \dfrac{\partial\partial Y}{\partial t}=X\partial r-Z\partial p+(Zqr-Yr^2-Yp^2+Xpq)\partial t,\\ \dfrac{\partial\partial Z}{\partial t}=Y\partial p-X\partial q+(Xpr-Zp^2-Zq^2+Yqr)\partial t.\end{cases}$$

Maintenant, les axes des X, Y, Z, étant des axes principaux, il faut se rappeler que, dans les intégrales $\Sigma P'$, $\Sigma Q'$, $\Sigma R'$, tous les termes disparaissent, qui ne sont pas multipliés par X^2 ou Y^2 ou Z^2, et qu'on a nommé $\Sigma X^2\partial M=A$, $\Sigma Y^2\partial M=B$, $\Sigma Z^2\partial M=C$; d'où l'on conclura ces équations, $2g\Sigma P'=(B+C)\frac{\partial p}{\partial t}+(B-C)qr$, $2g\Sigma Q'=(A+C)\frac{\partial q}{\partial t}+(C-A)pr$, $2g\Sigma R'=(A+B)\frac{\partial r}{\partial t}+(A-B)pq$; et en substituant $A+B=Mc^2$, $A+C=Mb^2$, $B+C=Ma^2$,

$$(\text{H})\ldots\ldots o=\frac{2g\partial t}{Ma^2}\Sigma P'-\partial p+\frac{b^2-c^2}{a^2}qr\partial t,$$

$$o=\frac{2g\partial t}{Mb^2}\Sigma Q'-\partial q+\frac{c^2-a^2}{b^2}pr\partial t,\quad o=\frac{2g\partial t}{Mc^2}\Sigma R'-\partial r+\frac{a^2-b^2}{c^2}pq\partial t.$$

Si l'on met dans les équations (22), au lieu de a', b', c', leurs valeurs (§. 99. (1)), on aura

$$P'=\frac{V\partial M}{R^3}(Yz-Zy),\quad Q'=\frac{V\partial M}{R^3}(Zx-Xz),\quad R'=\frac{V\partial M}{R^3}(Xy-Yx),$$

x, y, z, étant les coordonnées du corps V. Mais $\frac{1}{R^3}=\frac{1}{\varrho'^3}+\frac{3\varrho}{\varrho'^4}(X\cos v+Y\sin v+Z\lambda)$ (§. 101.); et le termme $\frac{1}{\varrho'^3}$ disparaît dans les intégrales $\Sigma P'$, $\Sigma Q'$, $\Sigma R'$, parce qu'il ne renferme que les premières puissances de X, Y, Z. On aura donc

$$\Sigma P'=\frac{3V\varrho}{\varrho'^4}(Bz\sin v-Cy\lambda),\quad \Sigma Q'=\frac{3V\varrho}{\varrho'^4}(Cx\lambda-Az\cos v),$$

$$\Sigma R'=\frac{3V\varrho}{\varrho'^4}(Ay\cos v-Bx\sin v).$$

Or $A=\frac{c^2+b^2-a^2}{2}$, $B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$, $C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$, $x=\varrho\cos v$, $y=\varrho\sin v$, $z=\varrho\lambda$ (§. 100. (4)), $\frac{\varrho^3}{\varrho'^4}=\frac{1}{\varrho^3(1+\lambda^2)^{\frac{4}{2}}}$ (§. 100.), et $\frac{6gV}{\varrho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3n^2}{1+\lambda^2}$ (16), d'où il viendra

$$\frac{2g\Sigma P'}{M}=\frac{3\lambda n^2}{1+\lambda^2}(c^2-b^2)\sin v,\quad \frac{2g\Sigma Q'}{M}=\frac{3\lambda n^2}{1+\lambda^2}(a^2-c^2)\cos v,$$

$$\frac{2g\Sigma R'}{M} = \frac{3n^2}{1+\lambda^2}(b^2 - a^2)\sin v \cos v.$$

Au moyen de ces valeurs les équations (H) deviendront

$$\text{VII.} \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c^2 - b^2}{a^2}\left(qr - \frac{3n^2\lambda\sin v}{1+\lambda^2}\right),$$

$$\text{VIII.} \quad 0 = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{a^2 - c^2}{b^2}\left(pr - \frac{3n^2\lambda\cos v}{1+\lambda^2}\right),$$

$$\text{IX.} \quad 0 = \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{b^2 - a^2}{c^2}\left(pq - \frac{3n^2\sin v\cos v}{1+\lambda^2}\right).$$

§. 104. Si la planète M n'est sollicitée par aucune action étrangère, les forces a', b', c', sont nulles, et leurs momens P′, Q′, R′, le sont aussi: les équations (H) prendront donc, si le solide est libre, la forme suivante:

$$(J)\ldots\ldots \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}qr, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{c^2 - a^2}{b^2}pr, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}pq.$$

Pour que la rotation soit uniforme autour d'un axe invariable, les quantités p, q, r, (§. 103. (21)) doivent être constantes, ou ∂p, ∂q, ∂r, nuls, d'où l'on conclura ces trois équations de condition,

$$(d)\ldots\ldots (c^2 - b^2)qr = 0, \quad (a^2 - c^2)pr = 0, \quad (b^2 - a^2)pq = 0.$$

Ces conditions sont satisfaites d'abord, si $a = b = c$, c'est-à-dire si tous les momens d'inertie sont égaux, et que par conséquent tous les diamètres de la planète sont des axes principaux (§. 85.): le cas le plus simple est celui d'une sphère homogène. Elles sont encore satisfaites, si deux des quantités p, q, r, sont nulles, ce qui arrive dans le cas où le corps tourne sur un axe principal. En effet, si c'est l'axe AD, on a (§. 103.) $\alpha = \beta = 90°$, et $\gamma = 0$; d'où il suit (21) $p = 0$, $q = 0$, et $r = u$. La rotation est donc uniforme et invariable, si le solide tourne autour d'un axe principal; et l'inverse de cette proposition est également vraie: la rotation uniforme ne peut avoir lieu qu'autour d'un axe principal. En effet il ne peut exister qu'un des trois cas suivans: 1) tous les trois momens d'inertie, a, b, c, sont inégaux; 2) deux momens, a, b, sont égaux, mais différens du troisième c; 3) tous les trois momens égaux, $a = b = c$. Dans le premièr cas, pq, pr, qr, et par conséquent deux des quantités p, q, r, doivent être nulles, ou ce qui revient au même, deux des angles α, β, γ, doivent être des angles droits, et le troisième nul, afin que la rotation soit uniforme; d'où il suit que l'axe de ro-

tation est un axe principal. Dans le second cas on a $pr = qr = 0$, donc $p = q = 0$, ou bien $r = 0$: la première supposition donne $\alpha = \beta = 90°$ et $\gamma = 0$, à cause de $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, d'où il suit que l'axe de rotation est un axe principal; la seconde supposition $r = 0$ donne $\gamma = 90°$, l'axe de rotation coïncide donc avec le plan des X, Y, dans lequel tous les diamètres sont des axes principaux, parce que les deux momens, a, b, sont égaux (§. 85.). Dans le troisième cas, $a = b = c$, les quantités p, q, r, sont indéterminées; mais tous les diamètres qui passent par le centre de gravité A, étant dans ce cas des axes principaux, l'axe de rotation le sera aussi.

§. 105. Dans tous les cas, où l'axe de rotation n'est pas un axe principal, soit que le solide soit libre ou qu'il soit sollicité par des forces étrangères, la vitesse de la rotation, aussi bien que la position de l'axe, sera assujettie à des changemens qui dépendront et de la conformation du solide, ou ce qui revient au même, des quantités a, b, c, et de la position de l'axe de rotation relativement aux trois axes principaux, ou des quantités p, q, r. Le cas où l'axe de rotation s'écarte très-peu d'un axe principal, sans coïncider entièrement avec lui, mérite une attention particulière. Si cet axe est celui des Z, les quantités p, q, sont à peu près nulles, ensorte qu'on peut négliger leur produit. Il résulte donc des équations (J), que ∂r est nul, et r une constante $= h$; ce qui donnera aux deux autres équations la forme, $0 = \partial p + \frac{c^2 - b^2}{a^2} hq\partial t$, $0 = \partial q + \frac{a^2 - c^2}{b^2} hp\partial t$. Il est visible, que l'intégrale doit avoir la forme,

$$p = m \sin (nt + \varepsilon), \qquad q = m' \cos (nt + \varepsilon),$$

m, m', n, ε, étant des constantes. On en tirera $0 = mn + \frac{c^2 - b^2}{a^2} hm'$, $0 = -m'n + \frac{a^2 - c^2}{b^2} hm$, d'où il suit

$$n = \frac{h}{ab} \sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \quad \text{et} \quad m' = \frac{a}{b} m \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}}.$$

L'expression de n donne lieu à des réflexions importantes.

Si $(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$ est une quantité positive, c'est-à-dire, si le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, Mc^2, est plus ou moins grand que Ma^2 et Mb^2, et par conséquent le plus grand ou le plus petit de tous les momens (§. 84.), n, m, m', sont des quantités réelles, et p, q, sont des

sinus; les variations de la rotation seront donc périodiques, et renfermées entre des limites étroites; l'axe de rotation fera de petites oscillations autour de son état primitif qui est donné par les équations $p = m \sin \varepsilon$, $q = m' \cos \varepsilon$. Comme p, q, ont primitivement été à peu près nuls, par hypothèse, m, m', sont des quantités très-petites, et p, q, seront constamment peu différens de zéro. L'état du mouvement de rotation est donc *stable*, si le solide a primitivement tourné autour d'un axe, très-peu éloigné d'un des deux axes principaux dont les momens d'inertie sont le plus grand et le plus petit: alors la vitesse n'éprouvera que des changemens insensibles et périodiques, l'axe de rotation fera des oscillations très-petites autour de l'axe principal, et la rotation reviendra toujours à son état primitif. Mais si le solide tourne à peu près autour de l'axe principal, dont le moment d'inertie Mc^2 est entre les momens des deux autres, Ma^2, Mb^2, la rotation sera assujettie à des changemens qui, au lieu d'être périodiques, pourront augmenter indéfiniment. Car alors n étant imaginaire, les sinus et cosinus de $nt + \varepsilon$ se changeront en exponentielles qui peuvent croître ou décroître sans cesse. Dans ce cas il n'y aura point de stabilité dans le mouvement de rotation, et la cause la plus légère peut lui faire éprouver des changemens illimités. Comme la rotation du soleil, des planètes et des satellites que nous pouvons observer, est évidemment dans un état stable, il paraît certain, que tous les corps célestes tournent à peu près autour d'un axe principal, par rapport auquel le moment d'inertie est le plus grand ou le plus petit; et il est vraisemblable que le premier cas a lieu, parce qu'à cause de l'aplatissement dû à la rotation, l'axe est plus petit que les diamètres de l'équateur, et par conséquent son moment d'inertie plus grand.

CHAPITRE V.

Libration de la Lune.

§. 106. La terre est le seul corps céleste, qui soit assés près de la lune, pour exercer une action sensible sur sa rotation; et l'on a vu, que la lune tourne dans un mois une fois autour d'un axe qui est à peu près perpendiculaire à son orbite: le corps perturbateur, la terre, se trouve donc constamment à très-peu près dans le plan de l'équateur lunaire. La manière dont on envisage ordinairement ce mouvement, c'est de supposer que la vitesse de rotation de la lune est exactement égale à son moyen mouvement autour de la terre, ou que les moyennes révolutions de la lune autour de son axe et autour de la terre son précisément de la même durée, et que par conséquent les *librations,* qui font que la lune dirige de tems en tems d'autres parties vers la terre, sont purement l'effet de l'inégalité de son vrai mouvement, qui est tantôt en avant tantôt en arrière de la rotation constamment uniforme. Il est vrai que cette hypothèse satisfait aux observations, en expliquant assés bien les diverses phases de la lune relativement à ses taches; mais elle est par sa nature très-peu vraisemblable, et la parfaite égalité des deux mouvemens de la lune serait une énigme d'autant plus inconcevable, qu'elle a également lieu chès les antres satellites. S'il y avait la moindre différence entre les mouvemens de translation et de rotation de la lune, son disque visible changerait sans cesse, et l'accumulation de ce mouvement des taches de la lune aurait été aperçue depuis longtems; d'un autre côté il est infiniment peu probable, que le seul de tous les cas possibles soit arrivé, où la lune aurait reçu une rotation parfaitement égale à sa revolution autour de la terre. Mais en supposant même que ce cas improbable ait eu lieu, la

conformité des deux mouvemens ne durerait pas longtems, si la lune n'était pas une sphère parfaitement homogène, parce que l'attraction de la terre dérangerait sa rotation, et que le moyen mouvement de la lune, auquel sa rotation est supposée avoir été égale, n'est pas tout-à-fait invariable (II. §. 190.). Les perturbations du mouvement de translation dépendent uniquement de l'action que le soleil, ou d'autres corps exercent sur le centre de gravité de la lune, au lieu que les perturbations de la rotation résultent de l'action des corps étrangers, principalement de la terre, sur la figure non-sphérique de la lune; et il est impossible, que ces deux actions, dues à différens corps, et ayant différens argumens, soient constamment égales entre elles.

Si l'on suppose au contraire, que l'attraction de la terre influe sur la rotation de la lune, on expliquera d'une manière fort simple le phénomène, que la lune tourne constamment le même côté vers la terre, malgré la petite différence qui peut exister entre ses mouvemens de translation et de rotation. Alors il suit de ce qui précède, que la lune fera des oscillations des deux côtés, qui auraient lieu, quand même son vrai mouvement serait uniforme; mais ces oscillations seront renfermées entre des limites très-etroites, de sorte que le même hémisphère de la lune se présentera toujours à la terre. Les librations de la lune, indiquées par les observations, seront alors dues non-seulement aux inégalités de son mouvement, mais aussi à l'attraction de la terre: la première cause donnera la libration apparente ou *optique,* la seconde produira la libration réelle ou *mécanique.*

§. 107. Les phénomènes singuliers qui ont lieu dans la rotation de la lune, sont les suivans. 1) En faisant abstraction des petites oscillations qui, suivant les observations exposées plus haut, diffèrent insensiblement des inégalités de la lune connues, ce satellite présente constamment le même côté à la terre, ensorte que sa rotation est à peu près égale à son moyen mouvement autour de la terre. 2) Le noeud descendant de son équateur coïncide à tres-peu près avec le noeud ascendant de son orbite, d'où il suit, que ces deux noeuds ont le même mouvement. 3) L'inclinaison de l'équateur lunaire relativement à l'écliptique est constamment au dessous de $1^\circ\,43'$ (II. §. 219.). On doit donc, dans l'application des formules précédentes (§. 102.) à la lune, observer ce qui suit.

1. $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ est à peu près égal au moyen mouvement de la lune n, et la libration mécanique est insensible.

2. l'angle ε ne diffère pas sensiblement de la longitude du noeud ascendant de l'orbe lunaire, que nous désignerons par ζ, et $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ à très-peu près.

3. ϖ est un très-petit angle dont les puissances au delà de la première pourront être négligées par rapport à celles des autres angles.

4. $\frac{\partial \varpi}{\partial t}$ est insensible par rapport à la vitesse de rotation $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ et du mouvement des noeuds $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$.

5. $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ est 250 fois plus petit que $\frac{\partial \omega}{\partial t}$.

Voilà les conditions sur lesquelles sera fondée l'analyse, contenue dans le chapitre présent.

Le premier méridien de la lune est arbitraire dans les formules précédentes: nous suivrons donc l'usage des astronomes (II. §. 220.), en prenant pour premier méridien celui qui est dirigé vers la terre, ou qui passe par le centre du disque lunaire, lorsque le vrai lieu de la lune est égal au lieu moyen. En nommant donc θ et ψ la longitude et la latitude géographiques et sélénocentriques du point qui, vu de la terre à une époque quelconque t, paraît au centre du disque lunaire, θ et ψ, étant les librations en longitude et en latitude, seront toujours au dessous de 8 degrés; et P, Q (§. 100.), se changeront en ψ, θ, si l'on met à la place de r le demi-diamètre de la lune, lequel, étant dirigé vers le centre de la terre, passe par le point du disque lunaire, dont la distance R au corps perturbateur V est un *minimum*. On a donc $\partial R = 0$, et ce rayon sera trouvé, si l'on différentie R par rapport à P et Q, et qu'on égale cette différentielle à zéro, ou ce qui revient au même, si l'on différentie l'équation (A) (§. 99), en faisant $R \partial R = 0$, et substituant ψ et θ au lieu de P et Q, ou $\theta' = \theta + \omega$ au lieu de Q', les différentielles étant prises par rapport à P et Q ou à ψ et θ, ce qui donne $\partial X = \left(\frac{\partial X}{\partial \psi}\right)\partial\psi + \left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)\partial\theta$, $\partial Z = \left(\frac{\partial Z}{\partial \psi}\right)\partial\psi + \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta}\right)\partial\theta$. En différentiant donc les équations (6) (§. 100.), on trouvera

$$(24)\ldots\ldots\begin{cases}\dfrac{\partial X}{r}=\partial\psi(\sin\varepsilon\cos\varpi\sin\psi\sin\theta'-\cos\varepsilon\sin\psi\cos\theta'-\sin\varepsilon\sin\varpi\cos\psi)\\ \quad-\partial\theta\cos\psi(\cos\varepsilon\sin\theta'+\sin\varepsilon\cos\varpi\cos\theta'),\\ \dfrac{\partial Z}{r}=\partial\psi(\cos\varpi\cos\psi+\sin\varpi\sin\psi\sin\theta')-\partial\theta\sin\varpi\cos\psi\cos\theta';\end{cases}$$

∂X se change en $\partial X+\partial Y$, si l'on met $\sin\varepsilon-\cos\varepsilon$ à la place de $\sin\varepsilon$, et $\sin\varepsilon+\cos\varepsilon$ au lieu de $\cos\varepsilon$, et $\frac{X\partial X}{r}$ deviendra $\frac{X\partial X+Y\partial Y}{r}$, si l'on fait $\sin\varepsilon\cos\varepsilon=0$, et $\sin^2\varepsilon=\cos^2\varepsilon=1$ (§. 100.), ce qui donne $X\partial X+Y\partial Y+Z\partial Z=0$, tous les termes se détruisant mutuellement. Cela posé, si l'on se rappelle que $\partial x=\partial y=\partial z=0$ (§. 99.) et $\partial R=0$, la différentiation de l'équation (A) donnera $-R\partial R=0=x\partial X+y\partial Y+z\partial Z$. En substituant les valeurs (4) (§. 100.), il viendra

$$0=\partial X\cos v+\partial Y\sin v+\lambda\partial Z.$$

On changera $\partial X\cos v$ en $\partial X\cos v+\partial Y\sin v$, si l'on fait $\cos\varepsilon\cos v=\cos(v-\varepsilon)=\cos u$, et $\sin\varepsilon\cos v=-\sin u$. Ayant substitué cela et les valeurs (24), la dernière équation, étant divisée per $-r\cos\psi$, deviendra

$$0=\partial\psi\{\cos u\,\mathrm{tg}\psi\cos\theta'+\sin u\cos\varpi\,\mathrm{tg}\psi\sin\theta'-\sin u\sin\varpi-\lambda\cos\varpi-\lambda\sin\varpi\,\mathrm{tg}\psi\sin\theta'\}$$
$$+\partial\theta\{\cos u\sin\theta'-\sin u\cos\varpi\cos\theta'+\lambda\sin\varpi\cos\theta'\},$$

d'où l'on tirera, en égalant chaque terme à zéro, les deux équations suivantes,

$$(25)\ldots\ldots\begin{cases}\mathrm{tang}\,\psi=\dfrac{\sin u\sin\varpi+\lambda\cos\varpi}{\cos u\cos\theta'+\sin u\cos\varpi\sin\theta'-\lambda\sin\varpi\sin\theta'},\\[2ex] \mathrm{tang}\,\theta'=\dfrac{\sin u\cos\varpi-\lambda\sin\varpi}{\cos u}.\end{cases}$$

Puisque $\mathrm{tang}\,\theta=\frac{\mathrm{tg}\,\theta'-\mathrm{tg}\,\omega}{1+\mathrm{tg}\,\omega\,\mathrm{tg}\,\theta'}$, on conclura de la dernière équation,

$$\mathrm{tang}\,\theta=\frac{\sin u\cos\omega\cos\varpi-\cos u\sin\omega-\lambda\cos\omega\sin\varpi}{\cos u\cos\omega+\sin u\sin\omega\cos\varpi-\lambda\sin\omega\sin\varpi}.$$

En faisant donc pour abréger, $1-\sin^2u\sin^2\varpi-\lambda\sin u\sin 2\varpi+\lambda^2\sin^2\varpi=\nu^2$, on aura

$$(26)\ldots\ldots\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{\sin u\cos\omega\cos\varpi-\cos u\sin\omega-\lambda\cos\omega\sin\varpi}{\nu},\\[2ex] \cos\theta=\dfrac{\cos u\cos\omega+\sin u\sin\omega\cos\varpi-\lambda\sin\omega\sin\varpi}{\nu}.\end{cases}$$

Si l'on substitue ces valeurs, et $\theta'=\theta+\omega$, dans l'équation (25), elle deviendra $\mathrm{tang}\,\psi=\frac{\sin u\sin\varpi+\lambda\cos\varpi}{\nu}$, d'où l'on tirera

$$(27)\ldots\ldots \sin\psi = \frac{\sin u \sin \varpi + \lambda \cos \varpi}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}, \quad \cos\psi = \frac{v}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}.$$

Au moyen de ces valeurs on trouvera

$$(1+\lambda^2)\cos^2\psi\cos 2\theta = v^2\cos^2\theta - v^2\sin^2\theta =$$

$$\cos 2\omega\left(\frac{1-2\lambda^2}{2}\sin^2\varpi + \frac{1+\cos^2\varpi}{2}\cos 2u + \lambda\sin 2\varpi\sin u\right)$$

$$+\sin 2\omega(\cos\varpi\sin 2u - 2\lambda\sin\varpi\cos u)$$

$$= 2\mathfrak{B}\cos 2\omega + 2\mathfrak{A}\sin 2\omega = 2\Omega''' \text{ (§. 101. 102.)};$$

$$\frac{1+\lambda^2}{2}\cos^2\psi\sin 2\theta = v^2\sin\theta\cos\theta =$$

$$\cos 2\omega\left(\tfrac{1}{2}\cos\varpi\sin 2u - \lambda\sin\varpi\cos u\right)$$

$$-\sin 2\omega\left(\frac{1-2\lambda^2}{4}\sin^2\varpi + \frac{1+\cos^2\varpi}{4}\cos 2u + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varpi\sin u\right)$$

$$= \mathfrak{A}\cos 2\omega - \mathfrak{B}\sin 2\omega = \Omega'';$$

$$\cos u\sin\varpi\sin\psi\sqrt{(1+\lambda^2)} = \tfrac{1}{2}\sin 2u\sin^2\varpi + \frac{\lambda}{2}\cos u\sin 2\varpi = \mathfrak{C} = E';$$

$$\frac{1+\lambda^2}{2}\{\cos\varpi\cos^2\psi\sin 2\theta + \sin\varpi\sin\psi\cos\psi\cos(\omega-\theta)\} = \mathfrak{D}\cos 2\omega - \mathfrak{C}\sin 2\omega = E'';$$

$$\frac{1+\lambda^2}{2}\{\cos\varpi\cos^2\psi\cos 2\theta + \sin\varpi\sin\psi\cos\psi\sin(\omega-\theta)\} = \mathfrak{D}\sin 2\omega + \mathfrak{C}\cos 2\omega = E''';$$

$$\frac{1+\lambda^2}{2}\sin 2\psi\sin(\omega+\theta) = \Pi'; \quad \frac{1+\lambda^2}{4}\sin 2\psi\sin(\omega-\theta) = -\Pi'';$$

$$\frac{1+\lambda^2}{4}\sin 2\psi\cos(\omega-\theta) = \Pi'''.$$

La substitution de ces valeurs transformera les équations I. II. III. (§. 102.) dans les suivantes:

$$\text{I.}\quad \frac{\Omega}{\partial t^2} = \frac{3n^2}{2H}\cos^2\psi(L\sin 2\theta - N\cos 2\theta),$$

$$\text{II.}\quad \frac{E}{\partial t^2} = \frac{3n^2(\frac{1}{2}H-K)}{H.\sqrt{(1+\lambda^2)}}\sin\varpi\cos u\sin\psi$$

$$+\frac{3n^2}{2H}\cos^2\psi\cos\varpi(L\sin 2\theta - N\cos 2\theta)$$

$$+\frac{3n^2}{2H}\sin\varpi\sin\psi\cos\psi\{L\cos(\omega-\theta) - N\sin(\omega-\theta)\},$$

$$\text{III.}\quad \frac{\Pi}{\partial t^2} = \frac{3n^2}{2H}\sin\psi\cos\varpi\{(2K-H)\sin(\omega+\theta) - L\sin(\omega-\theta) - N\cos(\omega-\theta)\}.$$

Si la lune est supposée tourner sur un axe principal, les dernières équations du §. 102. donneront, en faisant, pour abréger, $\frac{b^2-a^2}{c^2} = m^2$,

$$\text{IV.}\quad \frac{\Omega}{\partial t^2} = \tfrac{3}{2}m^2n^2\cos^2\psi\sin 2\theta,$$

$$\text{V.}\quad \frac{\mathrm{E}}{\partial t^2} = \frac{3n^2(2c^2-a^2-b^2)}{2c^2\sqrt{(1+\lambda^2)}}\sin\varpi\cos u\sin\psi$$

$$+\tfrac{3}{2}m^2n^2\cos\psi\{\cos\varpi\cos\psi\sin 2\theta+\sin\varpi\sin\psi\cos(\omega-\theta)\},$$

$$\text{VI.}\quad \frac{\Pi}{\partial t^2} = -\tfrac{3}{2}n^2\sin\psi\cos\psi\left\{\frac{2c^2-a^2-b^2}{c^2}\sin(\omega+\theta)+m^2\sin(\omega-\theta)\right\}.$$

§. 108. Les équations (26) (27) donneront

$\cos\psi\sin(\omega+\theta)=\dfrac{\cos\varpi\sin u-\lambda\sin\varpi}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$, $\cos\psi\cos(\omega+\theta)=\dfrac{\cos u}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$, d'où l'on tire

$$\mathrm{tang}\,(\omega+\theta)=\cos\varpi\,\mathrm{tang}\,u-\frac{\lambda\sin\varpi}{\cos u}.$$

Si l'on fait $\sin\varpi=0$, $\cos\varpi=1$, on aura

$$\omega+\theta=u,\ \text{ou}\ \omega=v-\varepsilon-\theta.$$

Cela posé il viendra $\partial\omega+\partial\varepsilon\cos\varpi=\partial\omega+\partial\varepsilon=\partial v-\partial\theta$, donc (§. 100. (11))

$$\Omega=\partial\partial v-\partial\partial\theta.$$

On a de plus $\partial\omega\cos\varpi+\partial\varepsilon=(\partial v-\partial\theta)\cos\varpi+\partial\varepsilon(1-\cos\varpi)$, partant (§. 100. (11)) $\mathrm{E}=\Omega\cos\varpi-(\partial v-\partial\theta)\partial\varpi\sin\varpi+\partial\varepsilon\partial\varpi\sin\varpi+2\partial\partial\varepsilon(\sin\tfrac{1}{2}\varpi)^2$, où le dernier terme est insensible par rapport aux autres. On a donc

$$\mathrm{E}=\Omega\cos\varpi-\partial\omega\partial\varpi\sin\varpi.$$

La petitesse des angles ϖ, θ, ψ, donne encore lieu aux approximations suivantes: $\nu=1$, $\omega-\theta=u$, $\cos^2\psi\sin 2\theta=2\theta$, d'où il vient

$$\cos\psi\sin\psi\cos(\omega\pm\theta)=\frac{\sin\varpi\sin 2u+2\lambda\cos\varpi\cos u}{2(1+\lambda^2)},$$

$$\cos\psi\sin\psi\sin(\omega\pm\theta)=\frac{\sin u(\sin\varpi\sin u+\lambda\cos\varpi)}{1+\lambda^2}.$$

Au moyen de ces valeurs les équations précédentes prendront la forme

$$\text{IV.}\quad \frac{\partial\partial v-\partial\partial\theta}{\partial t^2}=3m^2n^2\theta,$$

$$\text{V.}\quad 0=\Omega\cos\varpi-\partial\omega\partial\varpi\sin\varpi-\frac{3n^2(2c^2-a^2-b^2)}{4c^2(1+\lambda^2)}\sin\varpi(\sin\varpi\sin 2u+2\lambda\cos\varpi\cos u)\partial t^2$$

$$-\tfrac{3}{2}m^2n^2(2\theta\cos\varpi+\tfrac{1}{2}\sin^2\varpi\sin 2u+\lambda\sin\varpi\cos\varpi\cos u)\partial t^2,$$

$$\text{VI.}\ 0=\partial\partial\varpi+\partial\omega\partial\varepsilon\sin\varpi+\tfrac{3}{2}m^2n^2\{\sin\varpi(1-\cos 2u)+2\lambda\cos\varpi\sin u\}\partial t^2.$$

§. 109. Si l'on désigne par e l'époque de la longitude, par α une équation quelconque de la lune, sa vraie longitude sera $☾=e+nt+\alpha$, donc la longitude sélénocentrique de la terre, $v=180°+☾=180°+e+nt+\alpha$, d'où il suit $\partial\partial v=\partial n\partial t+\partial\partial\alpha$; nous négligerons ici le terme $\partial n\partial t$ qui dépend de l'équation séculaire de la lune, ensorte que $\partial\partial v=\partial\partial\alpha$, ce qui

étant substitué dans l'équation IV. donne $\frac{\partial\partial\theta}{\partial t^2}+3m^2n^2\theta=\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}$, dont l'intégrale doit avoir la forme, $\theta=\text{G}\sin\text{A}nt+\text{B}x$, G étant l'une des constantes arbitraires, et l'autre ou l'époque étant déterminée ensorte que x et θ sont nuls à l'origine du tems t, comme cela doit être (§. 107.). Or toute équation de longitude ayant la forme, $x=a\sin\alpha t$, on aura $\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}=-\alpha^2 x$, et et différentiant la valeur supposée de θ, $\frac{\partial\partial\theta}{\partial t^2}=-\text{G}\,\text{A}^2n^2\sin\text{A}nt+\frac{\text{B}\,\partial\partial x}{\partial t^2}=-\text{A}^2n^2\theta+\text{B}\left(1-\frac{\text{A}^2n^2}{\alpha^2}\right)\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}$. En comparant cela avec l'équation IV, on trouvera $\text{A}=m\sqrt{3}$, $\text{B}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2-3m^2n^2}$, d'où il vient

$$(\text{K})\ldots\ldots\theta=\text{G}\sin mnt\sqrt{3}+x+\frac{3m^2n^2x}{\alpha^2-3m^2n^2},$$

α étant la vitesse avec laquelle l'argument de l'inégalité x augmente, et $\frac{\alpha}{n}$ le rapport des variations moyennes de cet argument et de la longitude de la lune. L'angle θ est proprement la libration le long de l'équateur lunaire (§. 107.); mais comme l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique n'est que de 1° 43′, on peut regarder θ comme la *libration en longitude*, laquelle sera donc donnée par l'équation (K), dans laquelle x est la libration optique (§. 106.). Le dernier terme est de nature mixte, tant optique que mécanique, vu qu'il dépend de l'équation x et de la figure de la lune, m. Le premier terme, étant indépendant des inégalités de la lune x, renferme la libration purement *mécanique;* et l'on voit qu'étant exprimé par un sinus, cette libration sera périodique, si G et m sont des quantités réelles. En nommant donc

$$\frac{3m^2n^2x}{\alpha^2-3m^2n^2}=\Phi,\quad \text{G}\sin mnt\sqrt{3}=\xi,$$

$\theta-x=\Phi+\xi$ sera la libration réelle, et Φ aura la même période que l'inégalité x, de sorte que la libration entière est périodique; mais en même tems elle participe de l'équation séculaire, en vertu du terme $\partial n\partial t$ que nous avons négligé; et c'est précisément ce terme qui entretient constamment l'égalité entre les mouvemens de translation et de rotation de la lune, malgré la variation séculaire du premier.

La libration purement mécanique ξ a pour période le tems T, pendant lequel l'angle $mnt\sqrt{3}$ augmente de 360° ou 2π, donc $\text{T}=\frac{2\pi}{mn\sqrt{3}}$. Or n étant le moyen mouvement en une seconde, $\frac{2\pi}{n}$ est la durée d'un mois

sidéral $= S$, d'où il vient $T = \frac{S}{m\sqrt{3}}$, m étant une quantité inconnue, dépendant de la figure de la lune. Si les observations suffisaient pour déterminer la libration Φ qui dépend de chaque inégalité de la lune α, on aurait $m^2 = \frac{\alpha^2 \Phi}{3 n^2 (\alpha + \Phi)}$. Cette formule servira du moins à renfermer m entre des limites, en donnant à α et Φ leurs plus grandes valeurs. Celle de Φ dépend de la précision, avec laquelle on peut observer la libration des taches de la lune. Quoiqu'il en soit, il est certain, que les observations auraient fait reconnaître la libration, si elle montait à 3 degrés, ce qui fait à peu près la moitié des inégalités de la lune. En effet, un angle sélénocentrique de 3° répond à un angle géocentrique de 49″ au centre du disque lunaire, et à 1″, 3 au bord. En faisant donc $\Phi = 3°$, et prenant pour α la plus grande inégalité de la lune, qui est l'équation du centre, on aura (II. §. 204.) $\alpha = 22692''$, sa période étant le mois anomalistique, et son argument l'anomalie de la lune, d'où il suit que α est à n comme le mois sidéral est au mois anomalistique, donc (II. §. 188. 194.) $\frac{\alpha}{n} = \frac{27,3216614}{27,5545525} = 0,9915481$; $\frac{\alpha^2}{n^2} = 0,9831672$, et $m^2 = 0,3277224 \cdot \frac{10800''}{33492''} = 0,10568$. Mais ce résultat est peu sûr, parce que le rapport des deux mois est presqu'égal à l'unité. L'équation annuelle de la lune donne une limite beaucoup plus exacte. Sa période est l'année, sa plus grande valeur $\alpha = 672''$, et α est le mouvement anomalistique du soleil (II. §. 204.); partant $\frac{\alpha}{n} = \frac{27,32166}{365,25} = 0,0748026$, $\frac{\alpha^2}{n^2} = 0,00559544$, et $m^2 = 0,00186515 \cdot \frac{10800''}{11472''} = 0,001756$; d'où il résulte, que la libration devrait surpasser 3 degrés, si m^2 était plus grand que 0,001756.

Cette limite peut encore être resserrée par des observations plus exactes. M. Bouvard a entrepris pour cet effet une longue suite d'observations de la tache lunaire *Manilius* qui, à cause de sa petitesse et de sa situation près du centre de la lune, est singulièrement propre à faire reconnaître la moindre libration, par des mesures micrométriques de ses distances aux bords de la lune. C'est la même tache dont s'est servi Mayer, pour déterminer la position de l'équateur lunaire; et les observations de M. Bouvard donnent l'inclinaison de l'équateur de 5″, 84 seulement plus petite que celles de Mayer; ce qui prouve la grande précision de ces observations. M. de Laplace

qui a engagé M. Bouvard à entreprendre cette suite d'observations, en conclut, que la libration mécanique est au dessous de 6000 secondes décimales, ou de $32' 24''$ (1). Cet angle sélénocentrique répond à un angle géocentrique de $9''$ au centre de la lune. En faisant donc dans la dernière équation $\Phi = 32' 24''$, on aura $m^2 = 0,0018615 . \frac{32' 24''}{43' 36''} = 0,001386$, ce qui ne diffère guère du résultat précédent: car il est aisé de voir que l'angle Φ ne peut influer considérablement sur la valeur de m^2, s'il est beaucoup plus grand que ϖ ou $11'$, parce que $m^2 = \frac{\alpha^2}{3n^2}\left(1 - \frac{\varpi}{\Phi} + \frac{\varpi^2}{\Phi^2} - \ldots\right)$. Il y a donc peu d'apparence, qu'on parviendra à déterminer m par observation; il paraît cependant par ce qui précède, que m^2 ou $\frac{b^2 - a^2}{c^2}$ est plus petit que 0,002.

§. 110. Si la lune ne tourne pas autour d'un axe principal, il faut s'en tenir aux équations I, II, III (§. 107.), dont la première donne à très-peu près,

$$\text{I.} \quad \frac{\partial\partial v - \partial\partial\theta}{\partial t^2} = \frac{3n^2}{H}\left(L\theta - \frac{N}{2}\right).$$

L'intégrale doit avoir la forme, $\theta = G \sin Ant + C(1 - \cos Ant) + B\varpi$, l'époque étant déterminée comme précédemment (§. 109.). On en tirera $\frac{\partial\partial\theta}{\partial t^2} = -A^2n^2\theta + A^2n^2C + (A^2n^2 - \alpha^2)B\varpi$. Si l'on compare cela avec l'équation I, et qu'on se rappelle que $\partial\partial v = \partial\partial\varpi = -\alpha^2\varpi\partial t^2$ (§. 109.), on trouvera $A = \sqrt{\frac{3L}{H}}$, $B = \frac{\alpha^2 H}{\alpha^2 H - 3n^2 L}$, $C = \frac{N}{2L}$, d'où il vient

$$(\text{L}) \ldots\ldots \theta = G \sin nt\sqrt{\frac{3L}{H}} + \frac{N}{2L}\left(1 - \cos nt\sqrt{\frac{3L}{H}}\right) + \frac{\alpha^2 H \varpi}{\alpha^2 H - 3n^2 L}.$$

Pour trouver le *maximum* de la partie mécanique de la libration, on fera $\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$, ce qui donne $\tang nt\sqrt{\frac{3L}{H}} = -\frac{2L}{N}G$, et la plus grande libration $\theta = \frac{N \pm \sqrt{(N^2 + 4L^2G^2)}}{2L}$: les deux oscillations à l'orient et à l'occident sont donc inégales, si N n'est pas nul, leurs limites étant $\frac{\sqrt{(N^2+4L^2G^2)} + N}{2L}$ et $\frac{\sqrt{(N^2+4L^2G^2)} - N}{2L}$. Si l'on nomme T le tems écoulé d'une limite à l'autre, ou la demi-durée d'une oscillation, on aura $\tang n(t+T)\sqrt{\frac{3L}{H}} = \tang nt\sqrt{\frac{3L}{H}}$, d'où l'on tire $nT\sqrt{\frac{3L}{H}} = 180° = \pi$, et la durée d'une oscillation entière

$$2T = \frac{2\pi\sqrt{H}}{n\sqrt{3L}} = S\sqrt{\frac{H}{3L}} \quad (\S.\ 109).$$

(1) L'auteur de cet ouvrage ne connaît les observations de M. Bouvard que par les nouvelles que M. de Laplace a bien voulu lui en donner par une lettre.

24

La période d'une oscillation devient donc impossible, si $\sqrt{\frac{L}{H}}$ est imaginaire, c'est-à-dire, la libration, au lieu d'être périodique, augmente indéfiniment, si $\frac{L}{H}$ est une quantité négative. Comme cette augmentation indéfinie est contraire aux observations, il est certain que $\frac{L}{H}$ est une quantité positive; d'où il suit que b est plus grand que a (§. 102.), c'est-à-dire que le moment d'inertie par rapport au diamètre de l'équateur, qui passe par les bords du disque de la lune, Mb^2, est plus grand que le moment relatif au diamètre tourné vers la terre, Ma^2, et que par conséquent ce dernier diamètre est plus grand que tous les autres: effet naturel de l'attraction que la terre exerce sur la portion de la lune la plus proche.

La rotation de la lune est donnée par l'angle $\omega = v - \varepsilon - \theta$ (§. 108.), ou plutôt, parce que l'angle ω est compté du noeud qui est aussi en mouvement, par l'angle $\omega + \varepsilon = v - \theta = 180° + ☾ + \alpha - \theta = 180° + ☾ - \Phi - \xi$ (§. 109.). Comme θ et α deviennent nuls en même tems (§. 107.), si l'on fait abstraction de la libration mécanique; la *rotation moyenne* est exactement égale au moyen mouvement de la lune autour de la terre, $\omega + \varepsilon = 180° + ☾$; mais il n'en suit pas, que cette rotation ait été primitivement imprimée à la lune, ce qui serait très-peu probable. La lune a reçu sa *vraie* rotation, et non la *moyenne*, et l'action de la terre peut avoir altéré la rotation primitive. La véritable vitesse de rotation de la lune est $\frac{\partial\omega + \partial\varepsilon}{\partial t} = n - \frac{\partial\Phi + \partial\xi}{\partial t} = n\left(1 - Gm\sqrt{3}.\cos mnt\sqrt{3} - \frac{3m^2 n a\alpha}{a^2 - 3m^2 n^2}\cos at\right)$ (§. 109.): ainsi, en ne considérant que la libration mécanique, la plus grande vitesse est $= n(1 + Gm\sqrt{3})$, la plus petite $= n(1 - Gm\sqrt{3})$, et l'on trouvera, en faisant $t = 0$, la vitesse primitive $= n\left(1 - Gm\sqrt{3} - \frac{3m^2 n a\alpha}{a^2 - 3m^2 n^2}\right)$; d'où il résulte, 1) que la vitesse primitive n'a pas été nulle, c'est-à-dire que la rotation de la lune n'est pas due uniquement à l'attraction de la terre, comme si une aiguille de fer était promenée autour d'un aimant, mais qu'une rotation réelle a été imprimée à la lune; 2) que cette rotation primitive ne différait pas beaucoup de son moyen mouvement n, sans cependant lui être exactement égale. La différence primitive entre ces deux mouvemens, qui dépend du terme $Gmn\sqrt{3}$, ne peut pas être déterminée, parce que G est une quantité inconnue; cependant le *maximum* de ξ étant G (§. 109.), et la libration ξ ne devant pas

être supposée plus grande que 3° (§. 109.), G est moindre que 0,05236, et $m^2 < 0{,}002$ (§. 109.); d'où il suit que $G m\sqrt{3}$ est plus petit que 0,004; ce qui donne pour la rotation primitive les limites n et $n.0{,}996$.

§. 111. Si l'on nomme i la tangente de l'inclinaison de l'orbe lunaire (5°9′), et ζ la longitude de son noeud ascendant, la tangente de la latitude de la lune sera $i \sin(☾' - \zeta)$, donc la tangente de la latitude sélénocentrique de la terre, $\lambda = -i \sin(☾' - \zeta) = -i \sin(v - 180° - \zeta) = +i \sin(v - \zeta)$. Désignons par $\mu n t$ et $\nu n t$ la rétrogradation des noeuds de l'équateur de la lune, et de ceux de son orbite, pendant le tems t, de sorte que $\partial \varepsilon = -\mu n \partial t$, $\partial \zeta = -\nu n \partial t$: cela posé on aura $\partial \omega = \partial(v - \theta) - \partial \varepsilon$ (§. 108.), et à peu près $\partial(v - \theta) = n \partial t$ (§. 109.), donc $\partial \omega = n(1 + \mu)\partial t$, et $\partial(\zeta - \varepsilon) = (\mu - \nu) n \partial t$. On a de plus (§. 108. (27)), en faisant $1 + \lambda^2 = 1$, $\cos\psi = 1$, et $\omega \pm \theta = u$,

$$\sin\psi \cos\psi \sin(\omega \pm \theta) = \sin u (\sin \varpi \sin u + \lambda \cos \varpi),$$

d'où il vient

$$\sin\psi \cos\psi \sin(\omega \pm \theta) = \tfrac{1}{2} \sin\varpi (1 - \cos 2u) + \tfrac{i}{2} \cos\varpi \{\cos(\zeta - \varepsilon) - \cos(2v - \zeta - \varepsilon)\},$$

$$\sin\psi \cos\psi \cos(\omega \pm \theta) = \tfrac{1}{2} \sin\varpi \sin 2u + \tfrac{i}{2} \cos\varpi \{\sin(2v - \zeta - \varepsilon) - \sin(\zeta - \varepsilon)\}.$$

Ainsi, en faisant pour abréger, $\frac{H - 2K + L}{H} = \alpha$, l'équation III (§. 107.) deviendra

$$\partial \varepsilon = -\frac{\partial \partial \varpi}{(1+\mu) n \partial t \sin \varpi}$$
$$- \frac{3 \alpha n \partial t}{4(1+\mu)} \left\{ 1 - \cos 2u + \frac{i \cos \varpi}{\sin \varpi} [\cos(\zeta - \varepsilon) - \cos(2v - \zeta - \varepsilon)] \right\}$$
$$- \frac{3 N n \partial t}{4 H (1+\mu)} \left\{ \sin 2u + \frac{i \cos \varpi}{\sin \varpi} [\sin(2v - \zeta - \varepsilon) - \sin(\zeta - \varepsilon)] \right\}.$$

Dans l'intégration de cette équation, ϖ peut être regardé comme constant, parce que $\partial \varpi$ est insensible par rapport à $\partial \omega$ et $\partial \varepsilon$ (§. 107. n. 4.). Si l'on fait abstraction des inégalités du mouvement lunaire, on a, par ce qui précède,

$$\partial u = (1+\mu) n \partial t, \quad \partial(2v - \zeta - \varepsilon) = \partial(2u - (\zeta - \varepsilon)) = (2 + \mu + \nu) n \partial t, \quad \partial(\zeta - \varepsilon) = (\mu - \nu) n \partial t.$$

Ainsi dans l'intégrale, les angles $2u$, $2v - \zeta - \varepsilon$, $\zeta - \varepsilon$, auront les diviseurs $2(1 + \mu)n$, $(2 + \mu + \nu)n$, $(\mu - \nu)n$; d'où l'on voit, que les seuls termes qui renferment l'angle $\zeta - \varepsilon$, deviennent considérables à cause du petit diviseur $(\mu - \nu)n$ (§. 107. n. 2.). En faisant donc $\partial \varpi = 0$, $N = 0$, $1 + \mu = 1$, $\cos \varpi = 1$, l'équation précédente deviendra

$$\partial\varepsilon = -\tfrac{3}{4}\alpha n\partial t\left(1+\frac{i\cos(\zeta-\varepsilon)}{\sin\varpi}\right),$$ dont l'intégrale est

$$(\mathrm{M})\ldots\ldots\varepsilon = e-\tfrac{3}{4}\alpha\left\{nt+\frac{i\sin(\zeta-\varepsilon)}{(\mu-\nu)\sin\varpi}\right\},$$

e étant une constante arbitraire. Suivant les observations μ est égal à ν (§. 107. n. 2.); la différence $\mu-\nu$ est donc inconnue, et le dernier terme est indéterminé. Mais si l'on nomme ε', ζ', ϖ', les valeurs primitives que les angles ε, ζ, ϖ, avaient à l'origine du tems t, l'équation (M) donnera

$$\varepsilon' = e-\frac{3i\alpha\sin(\zeta'-\varepsilon')}{4(\mu-\nu)\sin\varpi'},\quad \text{partant}\quad e=\varepsilon'+\frac{3i\alpha\sin(\zeta'-\varepsilon')}{4(\mu-\nu)\sin\varpi}.$$

En substituant cette valeur de e dans l'équation (M), elle deviendra

$$\varepsilon=\varepsilon'-\tfrac{3}{4}\alpha\left\{nt+\frac{i[\sin(\zeta-\varepsilon)-\sin(\zeta'-\varepsilon')]}{(\mu-\nu)\sin\varpi}\right\}.$$

Or $\zeta=\zeta'-\nu nt$, $\varepsilon=\varepsilon'-\mu nt$, d'où l'on tire

$$(28)\ldots\ldots\begin{cases}\sin(\zeta-\varepsilon)=\sin(\zeta'-\varepsilon')+(\mu-\nu)nt\cos(\zeta'-\varepsilon'),\\ \cos(\zeta-\varepsilon)=\cos(\zeta'-\varepsilon')-(\mu-\nu)nt\sin(\zeta'-\varepsilon'),\end{cases}$$

ce qui donne

$$\varepsilon=\varepsilon'-\tfrac{3}{4}\alpha nt\left\{1+\frac{i\cos(\zeta'-\varepsilon')}{\sin\varpi}\right\}.$$

La rétrogradation des noeuds de l'équateur lunaire, ou la *précession* des équinoxes est donc $\frac{3}{4}\alpha nt\left(1+\frac{i\cos(\zeta'-\varepsilon')}{\sin\varpi}\right)$. Or $i=\operatorname{tg}5^\circ 9'=0,0901273$, $\sin\varpi=\sin 1^\circ 43'=0,029957$: donc $\frac{i}{\sin\varpi}=3,008555$ et la précession

$$\delta\varepsilon=\tfrac{3}{4}\alpha nt\,\{1+3,008555\cos(\zeta'-\varepsilon')\}.$$

Suivant les observations les plus exactes la précession est égale à la rétrogradation des noeuds de l'orbe lunaire νnt (§. 107. n. 2.), ce qui donne l'équation $\alpha\{1+3,008555\cos(\zeta'-\varepsilon')\}=\frac{4}{3}\nu$. Or les moyens mouvemens des noeuds et de la longitude de la lune, νn et n, sont entre eux comme le mois et la durée d'une révolution des noeuds, donc (II. §. 188. 205.) $\nu=\frac{27,32166}{6793,391}=0,00402186$; d'où il résulte

$$(29)\ldots\ldots\alpha=\frac{0,005362476}{1+3,008555\cos(\zeta'-\varepsilon')}.$$

Si l'on substitue la valeur actuelle de $\zeta-\varepsilon=0$, on aura $\alpha=\frac{0,005362476}{4,008555}=0,001337758$. C'est la valeur que α doit avoir, pour que les équations $\nu=\mu$ et $\zeta=\varepsilon$ soient exactes; mais il faut faire ici la même réflexion que

nous avons faite relativement à la rotation de la lune: en effet il est très-peu probable, que primitivement les noeuds de l'orbite et de l'équateur de la lune aient exactement coïncidé, et que leurs mouvemens aient été parfaitement égaux. Supposons donc que μ et ν aient d'abord été inégaux, et que l'angle $\zeta - \epsilon$ ait varié, jusqu'à ce que μ soit devenu égal à ν. Cela posé, $\cos(\zeta - \epsilon)$ peut avoir varié depuis $+1$ jusqu'à -1. Au moment où μ devient égal à ν, l'équation (28) a lieu, d'où il vient

$$\cos(\zeta - \epsilon) = \frac{0,00536248 - \alpha}{3,008555\,\alpha}.$$

On a donc $\cos(\zeta-\epsilon) = 0$ si $\alpha = 0,00536248$, et $\cos(\zeta-\epsilon) = 1$ si $\alpha = 0,00133776$; d'où il suit que, si α est renfermé entre les limites 0,00134 et 0,00536, la distance entre les noeuds de l'orbite et de l'équateur parviendra à une valeur $\zeta - \epsilon$ entre 0 et 90°, où les mouvemens des deux noeuds deviendront spontanément égaux: cet angle sera d'autant plus petit, que la valeur de α est plus près de 0,00134; il sera plus grand, à mesure que α approche de 0,00536. Or les observations indiquant la coïncidence des noeuds, ζ est égal à ϵ, ou $\zeta - \epsilon = 0$: la valeur de α doit donc être fort peu différente de 0,0013. Ainsi l'on voit, que la théorie explique parfaitement le second phénomène que présente la rotation de la lune, savoir la coïncidence des noeuds de l'orbite et de l'équateur de la lune, et l'égalité de leurs mouvemens, qui est exacte dans le tems présent. On a vu que, pour l'expliquer, il n'est pas nécessaire que cette égalité ait primitivement eu lieu, mais seulement que α ne soit pas beaucoup plus grand que 0,0013.

§. 112. Opérons de la même manière sur l'équation II (§. 107.). Si l'on y substitue $E = \Omega \cos \varpi - \partial\omega\partial\varpi \sin \varpi$ (§. 108.), $\Omega = \frac{3n^2}{2H} \cos^2\psi (L \sin 2\theta - N \cos 2\theta)\partial t^2$ (§. 107. I.), $\partial\omega = n\partial t$; l'équation II, divisée par $n\partial t \sin \varpi$, deviendra

$$\text{II.}\quad 0 = \partial\varpi + \frac{3n}{H}\sin\psi \left\{ (\tfrac{3}{2}H - K) \cos u + \tfrac{1}{2} L \cos\psi \cos(\omega-\theta) - \tfrac{1}{2} N \cos\psi \sin(\omega-\theta) \right\} \partial t.$$

Substituons dans les deux derniers termes les valeurs de $\sin\psi \cos\psi \,{}^{\sin}_{\cos}(\omega-\theta)$ (§. 111.), et négligeons tous les termes qui ne renferment pas l'angle $(\zeta - \epsilon)$: cela posé la dernière équation deviendra

$$\text{II.}\quad \partial\varpi = \tfrac{3}{4} n\partial t \left\{ i\alpha \cos\varpi \sin(\zeta-\epsilon) + \frac{iN}{H} \cos\varpi \cos(\zeta-\epsilon) + \frac{N}{H} \sin\varpi \right\},$$

dont l'intégrale est (§. 111.)

$$(N)\ldots\ldots \varpi = p - \frac{3 i \cos\varpi}{4(\mu-\nu)}\left\{\alpha\cos(\zeta-\varepsilon) - \frac{N}{H}\sin(\zeta-\varepsilon)\right\} + \frac{3 N \sin\varpi}{4 H}\, nt,$$

p étant une constante arbitraire. En employant les désignations précédentes (§. 111.), et faisant $\cos\varpi = 1$, on aura

$$p = \varpi' + \frac{3 i}{4(\mu-\nu)}\left\{\alpha\cos(\zeta'-\varepsilon') - \frac{N}{H}\sin(\zeta'-\varepsilon')\right\},$$

donc $\varpi = \varpi' + \frac{3 i}{4(\mu-\nu)}\left\{\alpha[\cos(\zeta'-\varepsilon') - \cos(\zeta-\varepsilon)] + \frac{N}{H}[\sin(\zeta-\varepsilon) - \sin(\zeta'-\varepsilon')]\right\}$
$+ \frac{3 N \sin\varpi}{4 H}\, nt$, et par les équations (28) (§. 111.),

$$\varpi = \varpi' + \tfrac{3}{4} int\left\{\alpha\sin(\zeta'-\varepsilon') + \frac{N}{H}\cos(\zeta'-\varepsilon')\right\} + \frac{3 N \sin\omega}{4 H}\, nt.$$

Cette équation nous apprend, que l'inclinaison ϖ n'éprouve point de changemens *périodiques*, parce que ζ', ε', sont des angles constans, et que le dernier terme $\frac{N \sin\varpi}{H}$ est tout-à-fait insensible, d'autant plus que N est apparemment nul. L'axe de la lune n'est donc pas assujetti à une véritable *nutation*, et l'accroissement progressif ou séculier de l'obliquité de l'écliptique dans la lune est $\frac{3}{4} i\alpha nt \sin(\zeta-\varepsilon')$, ce qui est à peu près nul, à cause de $\zeta = \varepsilon$. Ainsi l'analyse explique aussi le troisième phénomène, savoir l'invariabilité de l'angle que l'équateur lunaire fait avec l'écliptique. Il en suit en même tems, que la libration en latitude est purement optique ou apparente, et que sa plus grande valeur au nord et au sud est $i + \varpi = 6°52'$. Comme cet angle sélénocentrique répond à un angle géocentrique de 1'39'', la plus grande libration du nord au sud est de 3'18'', ce qui fait un dixième du diamètre de la lune.

Une explication des librations de la lune, fondée sur les principes dont nous sommes partis ici, fut déjà donnée par Newton qui trouva, que l'attraction de la terre devait allonger de 186 pieds le diamètre de la lune, dirigé vers la terre, et par là forcer la lune de tourner constamment le même côté vers la terre, en faisant en même tems des oscillations très-petites et lentes [1]. La théorie de la libration de la lune a été traitée de différentes manières par les plus grands géomètres, principalement par Euler, Lagrange, et Laplace [2].

(1) *Phil. Nat. Princ. Math. Lib. III. Prop.* 38.

(2) Voy. *Theor. motus corporum rigid.* Cap. XVI. *Recherches sur la libr de la lune*, dans le *recueil des pièces qui ont remporté les prix, T. IX. Mécan. céleste, Liv. V. Ch. II.*

§. 113. Nous avons supposé (§. 87.), que la lune est un sphéroïde elliptique et homogène, et que son équateur est aussi une ellipse dont le grand axe, $2f$, passe par le premier méridien qui est dirigé vers la terre, ensorte que tous les parallèles sont des ellipses semblables à l'équateur. C'est du moins l'hypothèse la plus naturelle, et la seule qui se fonde sur la théorie et les observations. En désignant donc le petit axe de l'équateur par $2h$, l'axe de rotation par $2k$, on a par ce qui précède (§. 87.),

$$a^2 = \frac{f\{f^2(4h-3f)+k^2(2h-f)\}}{5h^2},\quad b^2 = \frac{f(f^2+k^2)(2h-f)}{5h^2},\quad c^2 = \frac{2f^2(3h-2f)}{5h^2},$$

d'où l'on conclura (§. 102.)

$$H = Mc^2 = \frac{2f^2(3h-2f)}{5h^2}M,\quad K = \frac{M}{2}(a^2+b^2-c^2) = \frac{fk^2(2h-f)}{5h^2}M,$$

$$L = M(b^2-a^2) = \frac{2f^2(f-h)}{5h^2}M,\quad N = 0.$$

On verra plus bas (§. 146.), que $f-h$ est à peu près $\frac{15k^4}{4\varrho^3}\cdot\frac{T}{M}$, T, M, étant les masses de la terre et de la lune, et ϱ la moyenne distance entre ces deux corps. Or $\frac{M}{T} = \frac{1}{78}$, $\varrho = 60f'$, et k ou $f = f'.0{,}27293$, f' étant le demi-diamètre de la terre; l'aplatissement de l'équateur lunaire sera donc $\frac{f-h}{k} = \frac{(0{,}27293)^3}{16.3600}78 = 0{,}00002753 = \beta$, de sorte que les deux diamètres de l'équateur sont entre eux comme 1 et 0,99997247. Si l'on fait $f' = 20000000$ pieds, on aura $f = f'.0{,}27293 = 5458600$ pieds, ce qui étant multiplié par 2β, donnera la différence entre les deux diamètres de l'équateur $= 300$ pieds. Faisons $k = f(1-\gamma)$, $\gamma = \frac{f-k}{f}$ étant l'aplatissement de la lune, dû à sa rotation: cela posé on aura

$$h = f - \beta k = f(1-\beta+\beta\gamma) = f(1-\beta),$$

parce que β et γ sont de très-petites fractions. Il en résulte

$$\frac{L}{H} = \frac{f-h}{3h-2f} = \frac{\beta}{1-3\beta} = \frac{0{,}00002753}{0{,}99991741},$$

et la période d'une oscillation mécanique (§. 110.)

$$2T = S.\sqrt{\frac{0{,}99991741}{0{,}00008259}} = 110 \text{ mois sidér.} = 3005 \text{ jours.}$$

On a d'ailleurs (§. 111.)

$$\alpha = \frac{H-2K+L}{H} = \frac{(2h-f)(f^2-k^2)}{f^2(3h-2f)} = \frac{2\gamma(1-2\beta)}{1-3\beta} = 2\gamma \text{ à peu près.}$$

On verra (§. 146.), que γ est à peu près 0,00003671; d'où il vient $\alpha = 0,00007342$. La coincidence des noeuds, qui est prouvée par les observations, nous a donné le résultat (§. 111.), que α est plus grand que 0, 0013, ce qui est presque cent fois plus grand que la valeur que nous venons de trouver. Il faut en conclure, que l'hypothèse, sur laquelle est fondé le dernier calcul et la valeur $\alpha = 0,000073$, n'est pas admissible pour la lune. Cette hypothèse suppose, 1) que la lune est un sphéroïde elliptique, 2) que sa densité est constante ou uniformément croissante vers le centre, 3) que la lune a été un corps fluide ou mou, pour pouvoir prendre la figure que sa rotation et l'attraction de la terre tendaient à lui imprimer. Il en suit, que la lune a été, dès son origine, un corps dur et irrégulier, ce qui paraît être conforme aux observations de ses taches (II. §. 221.).

CHAPITRE VI.

Perturbations de la rotation de la terre.

§. 114. Les distances des planètes à la terre sont si grandes par rapport à la distance de la lune, et leurs masses sont si petites par rapport à celle du soleil, qu'il est aisé de prévoir, que leurs actions sur la terre, qui dépendent de sa figure, seront tout-à-fait insensibles. Nous ne considérerons donc que l'attraction du soleil et de la lune, la proximité de la dernière compensant la petitesse de sa masse, attendu que la différence entre les divers diamètres de la terre doit être fort sensible à la distance de la lune.

Comme il ne s'agit pas ici du mouvement do translation, on peut regarder l'écliptique comme un plan invariable qui servira à déterminer le déplacement de l'équateur. Soit donc (*Fig.* 25.) E le pole de l'écliptique INL, C le pole de l'équateur AB à une époque quelconque, soient A, B, deux points distans entre eux de 90°, et O le point de la sphère, vers lequel l'axe de rotation est dirigé à la même époque. En nommant donc Ma^2, Mb^2, Mc^2, les momens d'inertie par rapport aux trois axes principaux A, B, C, on aura $b = a$, et $c > a$, parce que tous les diamètres de l'équateur sont des axes principaux qui ont les mêmes momens d'inertie (§. 87.). Si l'on fait

$$\frac{c^2 - a^2}{b^2} = \frac{c^2 - b^2}{a^2} = f,$$

les équations fondamentales (§. 103.) deviendront:

VII. $\frac{\partial p}{\partial t} = -fqr + 3fn^2 \frac{\lambda \sin v}{1 + \lambda^2}$, VIII. $\frac{\partial q}{\partial t} = fpr - 3fn^2 \frac{\lambda \cos v}{1 + \lambda^2}$, IX. $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$.

Or les coordonnées x, y, z, et λ, v, se rapportent ici aux trois axes principaux, ou à l'équateur (§. 103.): par conséquent v est l'ascension droite, comptée de l'axe des x, et λ la tangente de la déclinaison (§. 100.). En nommant

donc δ la déclinaison du corps perturbateur, les équations précédentes deviendront

$$\text{VII.}\quad \frac{\partial p}{\partial t} = -fqr + 3fn^2 \sin\delta \cos\delta \sin v,$$

$$\text{VIII.}\quad \frac{\partial q}{\partial t} = fpr - 3fn^2 \sin\delta \cos\delta \cos v, \qquad \text{IX.}\quad r = e,$$

e étant une constante arbitraire. Déterminons maintenant les positions des trois axes principaux relativement au plan de l'écliptique INL et à un point fixe I dans ce plan, et la position de l'axe de rotation O par rapport aux axes principaux, et faisons pour cela

$$\text{IEA} = v,\quad \text{EA} = n',\quad \text{IEB} = \mu,\quad \text{EB} = m',\quad \text{IEC} = \lambda,$$
$$\text{EC} = l,\quad \text{AO} = \alpha,\quad \text{BO} = \beta,\quad \text{CO} = \gamma,$$

l étant l'obliquité de l'écliptique. Pour éliminer les quatre premiers angles, faisons encore

$$\text{ECA} = \phi,\quad \text{EOC} = \psi.$$

Cela posé, la position de l'axe principal C, qui est très-peu éloigné de l'axe de rotation O, sera donnée par les angles λ, l, et servira à déterminer la position de l'axe principal A par ϕ et $\text{CA} = 90°$, et celle de B par $\text{CAB} = 90°$ et $\text{AB} = 90°$. Pendant la rotation instantanée autour de O, qui est supposée se faire suivant ABC avec la vitesse u, les angles α, β, γ, EO, IEO, ne changent point, et l'on a $\partial\psi = u\partial t$. Le triangle CEO fournit les équations suivantes,

$$(1)\ldots\ldots \cos\psi = \frac{\cos l - \cos\gamma \cos \text{EO}}{\sin\gamma \sin \text{EO}},\quad (2)\ldots\ldots \cos \text{CEO} = \frac{\cos\gamma - \cos l \cos \text{EO}}{\sin l \sin \text{EO}},$$

$$(3)\ldots\ldots \cos \text{ECO} = \frac{\cos \text{EO} - \cos\gamma \cos l}{\sin\gamma \sin l}.$$

Mais $\text{ECO} = \text{ECB} + \text{BCO}$, $\text{ECB} = 270° - \phi$, donc $\cos \text{ECB} = -\sin\phi$, $\sin \text{ECB} = -\cos\phi$; et les triangles BCO, ACO, donnent $\cos \text{BCO} = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$, $\sin \text{BCO} = \cos \text{ACO} = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$, d'où il vient $\cos \text{ECO} = \frac{\cos\alpha \cos\phi - \cos\beta \sin\phi}{\sin\gamma}$, ce qui étant substitué en (3) donne

$$(4)\ldots\ldots \cos \text{EO} - \cos\gamma \cos l = \sin l\,(\cos\alpha \cos\phi - \cos\beta \sin\phi).$$

Si l'on différentie l'équation (1), on trouvera

$$(5)\ldots\ldots u\,\partial t \sin\psi \sin\gamma \sin \text{EO} = \partial l \sin l;$$

et la même équation donne $(\sin\gamma \sin \text{EO} \sin\psi)^2 = \sin^2\gamma - \cos^2 \text{EO} - \cos^2 l +$

$2\cos\gamma\cos l\cos EO = \sin^2\gamma\sin^2 l - (\cos EO - \cos\gamma\cos l)^2$. En substituant donc (4), et $\sin^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$ (§. 103.), on aura

$$(6)\ldots\ldots \sin\gamma\sin\psi\sin EO = \pm\sin l(\cos\alpha\sin\phi + \cos\beta\cos\phi),$$

ce qui étant substitué en (5), donnera

$$(7)\ldots\ldots u\partial t(\cos\alpha\sin\phi + \cos\beta\cos\phi) = \pm\partial l.$$

Les valeurs précédentes $\cos ACO = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$ et $\cos BCO = \sin ACO = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$, donnent $\cos\alpha\sin\phi + \cos\beta\cos\phi = \sin\gamma\sin(\phi + ACO)$: il faut donc prendre l'équation (7) avec le signe $-$, parce que u est positif, et $\phi + ACO > 180°$. En introduisant donc les valeurs $u\cos\alpha = p$; $u\cos\beta = q$ (§. 103. (21)), la dernière équation donnera

$$\text{X.}\quad \frac{\partial l}{\partial t} = -p\sin\phi - q\cos\phi.$$

On a dans le triangle CEO, $\sin l\sin CEO = \sin\gamma\sin\psi$, d'où l'on tirera en vertu de l'équation (6), $\sin l\sin CEO\sin EO = \pm\sin l(\cos\alpha\sin\phi + \cos\beta\cos\phi)$. Or $CEO = IEO - \lambda$, donc $\partial.CEO = -\partial\lambda$. Ainsi la différentielle de (2) donne $\partial\lambda\sin l\sin EO\sin CEO + \partial l\cos l\sin EO\cos CEO = \partial l\sin l\cos EO$, d'où l'on tire $\pm\partial\lambda\sin l(\cos\alpha\sin\phi + \cos\beta\cos\phi) = \partial l(\sin l\cos EO - \cos l\sin EO\cos CEO) = \frac{\partial l}{\sin l}\{\cos EO - \cos l[\cos l\cos EO + \sin l\sin EO\cos CEO]\} = \frac{\partial l}{\sin l}(\cos EO - \cos l\cos\gamma)$ (2) $= \partial l(\cos\alpha\cos\phi - \cos\beta\sin\phi)$ (4). Si l'on substitue (7) $\partial l = -u\partial t(\cos\alpha\sin\phi + \cos\beta\cos\phi)$, la dernière équation deviendra $\pm\partial\lambda\sin l = u\partial t(\cos\beta\sin\phi - \cos\alpha\cos\phi)$. Mais $\cos\phi$ est négatif, et λ décroît par la rotation, parce que C décrit l'arc C*c*: il faut donc prendre le signe $-$; ce qui donnera

$$\text{XI.}\quad \frac{\partial\lambda}{\partial t}\sin l = p\cos\phi - q\sin\phi.$$

Enfin on a $\phi + OCA + OCE = 360°$, et la rotation n'altère point l'angle OCA; d'où il vient $\partial\phi = -\partial.OCE$. Ainsi la différentiation de l'équation (3) donnera $\partial\phi\sin l\sin\gamma\sin ECO = \partial l(\sin l\cos\gamma - \cos l\sin\gamma\cos ECO) = \partial l\sin l\cos\gamma - \partial l\cos l(\cos\alpha\cos\phi - \cos\beta\sin\phi)$ (3) (4). L'équation (3) donne aussi $\sin^2\gamma\sin^2 ECO = \frac{\sin^2\gamma\sin^2 l - (\cos EO - \cos\gamma\cos l)^2}{\sin^2 l} = \sin^2\gamma - (\cos\alpha\cos\phi - \cos\beta\sin\phi)^2$ (4) $= \cos^2\alpha\sin^2\phi + \cos^2\beta\cos^2\phi + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\phi\cos\phi$, à cause de $\sin^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$; d'où il vient

$$\sin\gamma\sin ECO = \pm(\cos\alpha\sin\phi + \cos\beta\cos\phi) = \mp\frac{\partial l}{u\partial t}\ (7);$$

ce qui étant substitué dans la dernière équation, donnera

$$\partial\phi \sin l = \mp u\partial t \{\sin l \cos\gamma + \cos l (\cos\beta \sin\phi - \cos\alpha \cos\phi)\}.$$

Or $\cos\phi$ est négatif, et ϕ croît par la rotation: il faut donc prendre le signe $+$, ce qui donne

$$\text{XII.}\quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = r + \cot l\,(q \sin\phi - p\cos\phi) = e - \frac{\partial\lambda}{\partial t}\cos l.$$

§. 115. Nommons α' la longitude du corps perturbateur V, comptée du point I, et β sa latitude sur l'écliptique, de sorte que $IEV = \alpha'$, $EV = 90° - \beta$, la longitude du pole de l'équateur étant $IEC = \lambda$, et la longitude du point vernal $= \lambda - 90°$; d'où l'on conclura la longitude du corps V, comptée du point vernal, $\alpha = \alpha' - \lambda + 90°$. En faisant donc, pour abréger, $\alpha' - \lambda = \eta$, on aura $\sin\alpha = \cos\eta$, $\cos\alpha = -\sin\eta$. Ainsi les équations (II. §. 25. I. VII. II.) donneront, en nommant ϱ l'ascension droite de V, comptée du point vernal,

$$\sin\delta = \cos l \sin\beta + \sin l \cos\beta \cos\eta,\quad \cos\delta\cos\varrho = -\cos\beta\sin\eta,$$
$$\operatorname{tang}\varrho\cos\delta\cos\varrho = \cos\delta\sin\varrho = \cos l\cos\beta\cos\eta - \sin l\sin\beta.$$

Si l'on nomme γ' l'ascension droite de l'axe des x, ou de A, comptée du point vernal, v étant l'ascension droite de V, comptée du même axe (§. 114.), on a $v = \varrho - \gamma'$, $\phi = ECA = 90° + \gamma'$, donc $v = \varrho - \phi + 90°$, d'où il vient

$$\cos\delta\sin v = \cos\delta(\cos\phi\cos\varrho + \sin\phi\sin\varrho) =$$
$$\sin\phi(\cos l\cos\beta\cos\eta - \sin l\sin\beta) - \cos\phi\cos\beta\sin\eta,$$
$$\cos\delta\cos v = \cos\delta(\sin\phi\cos\varrho - \cos\phi\sin\varrho) =$$
$$\cos\phi(\sin l\sin\beta - \cos l\cos\beta\cos\eta) - \sin\phi\cos\beta\sin\eta.$$

Puisque la latitude du soleil est nulle, et celle de la lune ne surpasse jamais six degrés, on peut faire $\sin^2\beta = 0$ et $\cos^2\beta = 1$: cela posé les valeurs précédentes donneront

$$\sin\delta\cos\delta\sin v = \tfrac{1}{2}\sin\phi\sin\alpha\,(\sin 2\beta\cos^2 l + \sin 2l\sin\alpha - \sin 2\beta\sin^2 l)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cos\phi\cos\alpha\,(\sin 2\beta\cos l + 2\sin l\sin\alpha),$$
$$\sin\delta\cos\delta\cos v = \tfrac{1}{2}\sin\phi\cos\alpha\,(\sin 2\beta\cos l + 2\sin l\sin\alpha)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cos\phi\sin\alpha\,(\sin 2\beta\sin^2 l - \sin 2\beta\cos^2 l - \sin 2l\sin\alpha).$$

Si l'on fait $\sin 2\beta = 2\operatorname{tang}\beta = 2i\sin(\alpha - \Omega)$, i étant la tangente de l'inclinaison, et Ω la longitude du noeud ascendant de l'orbite lunaire, et qu'on

développe les produits des angles variables α, β, Φ, par leurs sommes ou différences, on trouvera

$$\sin\delta\cos\delta\sin v = \frac{i}{4}(\cos l + \cos 2l)\{\sin(2\alpha - \Phi - \Omega) + \sin(\Phi - \Omega)\}$$

$$+ \frac{i}{4}(\cos l - \cos 2l)\{\sin(2\alpha + \Phi - \Omega) - \sin(\Phi + \Omega)\}$$

$$+ \tfrac{1}{4}\sin l\{2\cos l\sin\Phi + (1 - \cos l)\sin(2\alpha + \Phi) + (1 + \cos l)\sin(2\alpha - \Phi)\},$$

$$\sin\delta\cos\delta\cos v = \frac{i}{4}(\cos l + \cos 2l)\{\cos(2\alpha - \Phi - \Omega) - \cos(\Phi - \Omega)\}$$

$$- \frac{i}{4}(\cos l - \cos 2l)\{\cos(2\alpha + \Phi - \Omega) - \cos(\Phi + \Omega)\}$$

$$- \tfrac{1}{4}\sin l\{2\cos l\cos\Phi + (1 - \cos l)\cos(2\alpha + \Phi) - (1 + \cos l)\cos(2\alpha - \Phi)\}.$$

En faisant pour abréger,

$2\alpha + \Phi = k$, $2\alpha - \Phi = k'$, $2\alpha + \Phi - \Omega = \zeta$, $2\alpha - \Phi - \Omega = \zeta'$, $\Phi + \Omega = \theta$, $\Phi - \Omega = \theta'$,

les équations VII, VIII (§. 114.), deviendront

$$\text{VII.}\ \frac{\partial p}{\partial t} = -efq + \tfrac{3}{4}ifn^2\{(\cos l + \cos 2l)(\sin\zeta' + \sin\theta') + (\cos l - \cos 2l)(\sin\zeta - \sin\theta)\}$$

$$+ \tfrac{3}{4}fn^2\sin l\{2\cos l\sin\Phi + (1 - \cos l)\sin k + (1 + \cos l)\sin k'\},$$

$$\text{VIII.}\ \frac{\partial q}{\partial t} = efp - \tfrac{3}{4}ifn^2\{(\cos l + \cos 2l)(\cos\zeta' - \cos\theta') - (\cos l - \cos 2l)(\cos\zeta - \cos\theta)\}$$

$$+ \tfrac{3}{4}fn^2\sin l\{2\cos l\cos\Phi + (1 - \cos l)\cos k - (1 + \cos l)\cos k'\}.$$

§. 116. Il est aisé de voir, que les intégrales des équations précédentes auront cette forme:

$$(8)\ldots\ldots p = h\sin eft$$

$$-\tfrac{3}{4}ifn^2\left\{(\cos l + \cos 2l)\left(\frac{\cos\zeta'}{A} + \frac{\cos\theta'}{C}\right) + (\cos l - \cos 2l)\left(\frac{\cos\zeta}{B} + \frac{\cos\theta}{D}\right)\right\}$$

$$-\tfrac{3}{4}fn^2\sin l\left\{\frac{1+\cos l}{E}\cos k' + \frac{1-\cos l}{F}\cos k + \frac{2\cos l}{G}\cos\Phi\right\},$$

$$(9)\ldots\ldots q = -h\cos eft$$

$$-\tfrac{3}{4}ifn^2\left\{(\cos l + \cos 2l)\left(\frac{\sin\zeta'}{A} - \frac{\sin\theta'}{C}\right) - (\cos l - \cos 2l)\left(\frac{\sin\zeta}{B} + \frac{\sin\theta}{D}\right)\right\}$$

$$-\tfrac{3}{4}fn^2\sin l\left\{\frac{1+\cos l}{E}\sin k' - \frac{1-\cos l}{F}\sin k - \frac{2\cos l}{G}\sin\Phi\right\}.$$

Puisqu'on peut prendre ici, sans erreur sensible, les valeurs moyennes des différentielles, on aura

$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = n$, $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = e$ (XII), $\frac{\partial\Omega}{\partial t} = -vn$ (§. 111.), ce qui donne (§. 115.)

$$\frac{\partial k}{\partial t} = 2n + e,\quad \frac{\partial k'}{\partial t} = 2n - e,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = (2 + v)n + e,$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = (2+\nu)n - e, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = e - \nu n, \quad \frac{\partial \theta'}{\partial t} = e + \nu n.$$

Si l'on substitue maintenant les valeurs (8) (9) et leurs différentielles dans les équations VII, VIII, et qu'on égale séparément les coefficiens de chaque angle, l'argument ζ' donnera $\frac{3}{4}\, ifn^2\,(\cos l + \cos 2l)\,\frac{(2+\nu)n - e}{A}\,\sin\zeta' = \frac{3}{4}\, ifn^2\,(\cos l + \cos 2l)\left(\frac{ef}{A} + 1\right)\sin\zeta'$. En opérant de la même manière sur les autres angles, on trouvera

$A = (2+\nu)n - (1+f)e$, $B = (2+\nu)n + (1+f)e$, $C = \nu n + (1+f)e$, $D = \nu n - (1+f)e$, $E = 2n - (1+f)e$, $F = 2n + (1+f)e$, $G = (1+f)e$.

Tous les termes de p et q, qui sont multipliés par n^2, résultent de l'action du corps V, parce que n^2 est entré dans les formules précédentes par la substitution de $n^2 = \frac{2gV}{A^3}$ (§. 102.): on aura donc (8) (9), $p = h \sin eft$ et $q = -h \cos eft$, si la rotation n'est troublée par aucune force étrangère. Or p et q sont nuls, si la terre tourne autour d'un axe principal, parce qu'alors O et C coïncident, d'où il suit $\gamma = 0$, $\alpha = \beta = 90°$, donc $p = q = 0$ et $h = 0$. Ainsi, la terre tournant du moins à très-peu près sur un axe principal, h est une très-petite quantité, qu'on pourra négliger, quand il s'agit de déterminer les perturbations de la rotation, dues à des forces étrangeres. Cela posé, si l'on substitue les valeurs (8) (9) dans les équations X, XI, XII (§. 114.), on aura

$$\text{X.}\ \partial l = \tfrac{3}{4}\, ifn^2\,\partial t\left\{\cos l\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) + \cos 2l\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\right\}\sin(2\alpha - \Omega)$$
$$+ \tfrac{3}{4}\, ifn^2\,\partial t\left\{\cos l\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{D}\right) + \cos 2l\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right)\right\}\sin\Omega$$
$$+ \tfrac{3}{4}\, fn^2 \sin l\,\partial t\left\{\frac{1+\cos l}{E} - \frac{1-\cos l}{F}\right\}\sin 2\alpha,$$

$$\text{XI.}\ \partial\lambda = -\tfrac{3}{4}\, ifn^2\,\partial t\left\{\cot l\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) + \frac{\cos 2l}{\sin l}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\right\}\cos(2\alpha - \Omega)$$
$$- \tfrac{3}{4}\, ifn^2\,\partial t\left\{\cot l\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right) + \frac{\cos 2l}{\sin l}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{D}\right)\right\}\cos\Omega$$
$$- \tfrac{3}{4}\, fn^2\,\partial t\left\{\left[\frac{1+\cos l}{E} + \frac{1-\cos l}{F}\right]\cos 2\alpha + \frac{2\cos l}{G}\right\},$$

$$\text{XII.}\ \partial\phi = e\,\partial t - \partial\lambda\cos l.$$

L'intégration de ces équations donnera

$$\text{XIII.}\quad l = L - \frac{3}{4}\cdot\frac{ifn}{2+\nu}\left\{\cos l\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)+\cos 2l\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\right\}\cos(2\alpha-\Omega)$$
$$+\frac{3}{4}\cdot\frac{ifn}{\nu}\left\{\cos l\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{D}\right)+\cos 2l\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)\right\}\cos\Omega$$
$$-\frac{3}{8}fn\sin l\left\{\frac{1}{E}-\frac{1}{F}+\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{F}\right)\cos l\right\}\cos 2\alpha;$$

$$\text{XIV.}\quad \lambda = \Lambda - \frac{3}{4}\cdot\frac{ifn}{2+\nu}\left\{\cot l\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)+\frac{\cos 2l}{\sin l}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\right\}\sin(2\alpha-\Omega)$$
$$+\frac{3}{4}\cdot\frac{ifn}{\nu}\left\{\cot l\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)+\frac{\cos 2l}{\sin l}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{D}\right)\right\}\sin\Omega$$
$$-\frac{3}{8}fn\left\{\frac{1}{E}+\frac{1}{F}+\left(\frac{1}{E}-\frac{1}{F}\right)\cos l\right\}\sin 2\alpha-\frac{3}{2}\frac{fn^2\cos l}{G}t;$$

$$\text{XV.}\quad \phi = \Phi + et - \lambda\cos l.$$

§. 117. Les équations précédentes donnent l'obliquité de l'écliptique l, la longitude du pole boréal ou du point solstitial du *cancer* λ, comptée du point I (§. 115.), et la position ϕ du premier méridien A, à une époque quelconque t; les constantes, introduites par l'intégration, L, Λ, Φ, donnant les mêmes quantités à l'époque d'où l'on part. Or la longitude du point solstitial, comptée du point équinoxial, étant constamment de 90°, on aura, en nommant $\varkappa$ la longitude du point I, comptée du point vernal, $\varkappa+\lambda=90°$ ou $\varkappa=90°-\lambda$. On a de plus

$$\nu = 0,00402186\ (\text{§. } 111.),\ \text{et}\ f=\frac{c^2-a^2}{a^2}\ (\text{§. } 114);$$

mais $Mc^2=\frac{8\pi}{15}\alpha^4\beta$, $Ma^2=\frac{4\pi}{15}\alpha^2\beta(\alpha^2+\beta^2)$ (§. 87.), 2α et 2β étant les diamètres de l'équateur et l'axe; d'où il suit $f=\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}-1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$, et en faisant

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{229}{230}=0,99565,\quad f=\frac{1-0,99132}{1,99132}=0,004=\nu.$$

On peut donc faire, sans erreur sensible, $1+\nu=1+f=1$, ce qui donne

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{2e}{4n^2-e^2},\quad \frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{4n}{4n^2-e^2},\quad \frac{1}{C}-\frac{1}{D}=\frac{2e}{e^2-\nu^2n^2},$$
$$\frac{1}{C}+\frac{1}{D}=-\frac{2\nu n}{e^2-\nu^2n^2},\quad \frac{1}{E}-\frac{1}{F}=\frac{2e}{4n^2-e^2},\quad \frac{1}{E}+\frac{1}{F}=\frac{4n}{4n^2-e^2},\quad \frac{1}{G}=\frac{1}{e}.$$

En faisant de plus $l=23°\,27'\,50''$, $i=\text{tang}\,5°\,9'$, exprimant le tems t en jours, et désignant par n, n', les moyens mouvemens diurnes de la lune et du soleil, on aura

$i = 0,0901273$; $n = 47435'', 03$; $n' = 3548'', 33$; $e = 360° 59' 8'' = 1299548'', 5$;

$\cos l = 0,9173112$; $\sin l = 0,398171$; $\cot l = 2,303812$;

$\cos 2l = 0,6829196$; $\frac{\cos 2l}{\sin l} = 1,715142$;

et i est nul relativement au soleil. Maintenant il faut se rappeler, que tous les termes, relatifs à l'action de la lune, doivent être multipliés par $\frac{1}{78}$, ou que tous les termes qui ont le facteur n, doivent être divisés par 78 (§. 102.). En mettant donc $\varkappa$ à la place de $90° - \lambda$, K au lieu de $90° - \Lambda$, et $\Phi = 0$, les équations précédentes deviendront

$$\text{XIII. } l = L + 6'', 331 . f \cos(2☾ - ☊) + 30'', 92 . f \cos 2☾ + 169'', 033 . f \cos 2☉ + 2975'', 96 . f \cos ☊;$$

$$\text{XIV. } \varkappa = K - 12'', 330 . f \sin(2☾ - ☊) - 72'', 076 . f \sin 2☾ - 389'', 785 . f \sin 2☉ - 5563'', 81 . f \sin ☊ + (30'', 5435 + 13'', 331) f . t;$$

$$\text{XV. } \Phi = et + \varkappa . 0, 9173112;$$

le terme $30'', 5435 . f . t$ dépendant de l'action de la lune, et $13'', 331 . f . t$ de celle du soleil.

§. 118. Dans les équations précédentes L est la moyenne valeur de l'obliquité, K est la longitude moyenne d'une étoile ou d'un autre point fixe, comptée du point équinoxial mobile; $l - L$ et $\varkappa - K$ sont les variations de l'obliquité et de la longitude des étoiles dans le tems t, ou la *nutation* et la *rétrogradation des points équinoxiaux*. Leurs termes les plus considérables $2976'' f \cos ☊$ et $-5564'' . f \sin ☊$, sont la *nutation* proprement dite et l'*équation du point équinoxial* (II. §. 42. I. II.); le terme $43'', 875 . ft$ est la précession moyenne. Or on a trouvé par observation (II. §. 42.) la nutation $= 9'', 63 \cos ☊$: en égalant cela à $2975'', 96 . f \cos ☊$; on trouvera $f = 0,003223$; d'où il vient l'èquation du point équinoxial, $-\partial\varkappa = 5563'', 81 . f \sin ☊ = 17'', 971 . \sin ☊$, la précession diurne $43'', 875 f = 0'', 1417$, et la précession annuelle $= 51'', 72$. La première est exactement égale à celle qui suit de l'hypothèse adoptée par les astronomes, $18'', 023 \sin ☊$ (II. §. 42. II.), et la dernière est peu différente de la précession qui résulte des observations (II. §. 30.). Si l'on multiplie les termes $169'' \cos 2☉$ et $-389'', 8 \sin 2☉$ par $f = 0,003223$; il viendra $0'', 5 \cos 2☉$ et $-1'', 26 \sin 2☉$, à peu près comme ci-dessus (II. §. 42.). La plus grande obliquité arrive dans les nouvelles lunes du prin-

tems et dans les pleines lunes de l'automne, la lune étant en même tems dans le noeud ascendant, ou dans les pleines lunes du printems et les nouvelles lunes de l'automne, la lune étant dans le noeud descendant: alors on a $\cos(2\text{☾} - \Omega) = \cos 2\text{☾} = \cos 2\odot = \cos\Omega = 1$ et $l = L + 3182'',244.f$. La plus petite obliquité a lieu dans le premier ou le dernier quartier au commencement de l'été ou de l'hiver, la lune étant en même tems à 90° des noeuds: alors on a $\cos\Omega = \cos 2\odot = \cos 2\text{☾} = -1$, et $\cos(2\text{☾} - \Omega) = +1$, donc $l = L - 3169'',582.f$. La plus grande différence est donc $6351'',826.f$, et suivant les observations $19'',26$; d'où il résulte $f = 0,0030 3$. On trouvera une valeur plus exacte de f, par le moyen du terme $43'',875.f$ qui, suivant les observations, est $\frac{50'',2}{365,25} = 0'',13744$; d'où il vient $f = 0,0031325$, ce qui diffère peu de la valeur précédente. Si l'on veut déterminer la masse de la lune $= m$, par la comparaison des équations précédentes avec les observations, il faut se rappeler que tous les termes qui dépendent de l'action de la lune, ont été divisés par 78. En les multipliant donc par $78\,m$, on aura par le terme de l qui a le facteur $\cos\Omega$, et par celui de $\varkappa$ qui est multiplié par t, ces équations: $232124'',9.m.f = 9'',63$, et $f(870170''.m + 4869'',16) = 50'',2$. La première donne $mf = 0,00041486$, ce qui étant substitué dans la seconde, donnera $f = \frac{50'',2 - 36'',1}{4869'',16} = 0,0028958$, donc $m = \frac{0,00041486}{0,0028958} = \frac{1}{69,8}$; ce qui est à peu pres la masse lunaire que M. de Laplace a conclue du flux et reflux de la mer (§. 63.).

Si la terre a été une sphère homogène et molle, la rotation doit lui avoir donné la figure d'un sphéroïde elliptique, dont les deux diamètres sont entre eux comme 230 et 229, d'où il suit $f = 0,004$ (§. 117.). Comme c'est d'un tiers plus grand que la valeur que nous venons de trouver, et qui est conforme aux observations, il paraît que la terre est moins aplatie qu'elle ne devrait l'être suivant cette hypothèse, ce qui est confirmé par la mesure des degrés (I. §. 192.).

Si l'on fait $m = \frac{1}{78}$ et $f = 0,003236$, les équations précédentes deviendront

XIII. $l = L + 9'',63.\cos\Omega + 0'',547.\cos 2\odot + 0'',1.\cos 2\text{☾} + 0'',021.\cos(2\text{☾} - \Omega)$,

XIV. $\varkappa = K + 0'',142.t - 18''.\sin\Omega - 1'',261.\sin 2\odot - 0'',233 \sin 2\text{☾} - 0'',04.\sin(2\text{☾} - \Omega)$,

XV. $\phi = 1299548'',45.t + \varkappa.0,91731$.

Le terme $9'',63 \cos \Omega$ est la nutation, les termes suivans donnent sa correction; le plus considérable $0'',547 \cos 2\odot$ est appelé la nutation solaire: on la trouve dans la XXX. des *Tables du soleil par M. Delambre,* où elle a été supposée de $0',4345 \cos 2\odot$. Le terme $0'',142$ est la moyenne précession pour un jour, les autres termes donnent sa correction ou l'équation du point équinoxial, qui est le double de la nutation. Le terme $1'',26 \sin 2\odot$ a été supposé de $1''.\sin 2\odot$ dans les *Tables du Soleil par M. Delambre* (*Suite de la Tab. XIII.*).

§. 119. L'équation XV donne l'angle $\Phi = ECA$ (*Fig.* 25.), qui est l'ascension droite du premier méridien A, comptée du point mobile du solstice d'hiver. Le premier terme de Φ est la rotation moyenne, le second $x \cos l$ renferme sa correction, ensorte qu'il paraît que la rotation n'est pas uniforme; mais ce n'est qu'une illusion. Il est visible, que l'ascension droite Φ, comptée du solstice mobile, ne peut pas être uniforme, parce que le mouvement des points solstitiaux ne l'est pas, en vertu de l'équation XIV, qui donne l'augmentation de la longitude des étoiles x, ou la rétrogradation des points équinoxiaux et solstitiaux. Cette rétrogradation, réduite à l'équateur, est $x \cos l$ (II. §. 31. II.): ainsi la correction de Φ, $x \cos l$, n'exprime que l'accroissement de l'ascension droite, qui résulte de la rétrogradation des points équinoxiaux, et elle n'a rien de commun avec la rotation, parce qu'elle aurait également lieu, si la rotation était nulle. Celle-ci est donc donnée par un seul terme, proportionnel à t; d'où il suit que, malgré l'attraction du soleil et de la lune, la rotation de la terre est parfaitement uniforme, si elle tourne autour d'un axe principal. Dans le cas contraire les termes $h \sin eft$, $h \cos eft$, que nous avons négligés (§. 116.), influeront sur la rotation. Pour déterminer cette action, reprenons les équations (8) (9) (§. 116.),

$$p = \nu \cos \alpha = h \sin eft, \qquad q = \nu \cos \beta = -h \cos eft,$$

d'où l'on tire $p^2 + q^2 = \nu^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = \nu^2 \sin^2 \gamma = h^2$, donc $h = \nu \sin \gamma$. En substituant cela dans les équations X, XI, XII (§. 114.), on aura

$$\partial l = \nu \partial t . \sin \gamma \cos(\Phi + eft), \quad \partial \lambda = \frac{\nu \partial t}{\sin l} \sin \gamma \sin(\Phi + eft), \quad \partial \Phi = -\partial \lambda \cos l;$$

d'où l'on tirera, en mettant e à la place de ν, et et au lieu de Φ,

$$\partial l = e\partial t . \sin\gamma \cos(1+f)et, \quad \partial\lambda = \frac{e\partial t}{\sin l} \sin\gamma \sin(1+f)et, \quad \partial\Phi = -\partial\lambda \cos l,$$

dont les intégrales sont à très-peu près

$$l = \sin\gamma \sin(\Phi + eft), \quad \varkappa = \frac{\sin\gamma}{\sin l} \cos(\Phi + eft), \quad \Phi = \varkappa \cos l.$$

Ainsi dans le cas même, où l'axe de rotation de la terre ne serait pas un axe principal, les actions du soleil et de la lune n'altèreraient point son uniformité, parce que le terme $\varkappa \cos l$ n'est qu'une inégalité apparente, ainsi qu'on l'a vu. Mais dans ce cas la rotation ne pourrait pas être uniforme, à cause des forces centrifuges (§. 88.). Or les observations d'une longue suite de siècles n'ayant indiqué aucune irrégularité dans la rotation de la terre, il faut en conclure, que la terre tourne sur un axe principal; ce qui sera encore plus évident par les variations de l'obliquité et de la précession, qui en résulteraient. Le *maximum* de ces variations est $\sin\gamma$ et $\frac{\sin\gamma}{\sin l}$, ou en degrés, $57°17'45''.\sin\gamma$ et $143°53'51''.\sin\gamma$, ensorte que ces variations iraient de $-57°.\sin\gamma$ à $57°.\sin\gamma$, et de $-144°.\sin\gamma$ à $144°.\sin\gamma$, dans le tems que l'angle $\Phi + eft$ emploie à prendre l'accroissement de 360°, c'est-à-dire dans 308 jours. Il en résulte que, si l'axe de rotation s'écartait seulement d'une seconde de l'axe principal, l'obliquité et la précession, c'est-à-dire les latitudes et les longitudes des étoiles éprouveraient, dans l'espace de dix mois, des variations de 2″ et de 5″, que les observations auraient fait reconnaître. C'est donc une preuve incontestable, que la terre tourne autour d'un axe principal.

On peut prouver l'uniformité de la rotation de la terre encore d'une autre manière. Si elle était dérangée par les actions du soleil et de la lune, les forces centrifuges qui dépendent de la rotation, éprouveraient, dans l'espace d'un an ou d'un mois, des variations dues aux diverses situations du soleil ou de la lune: la pesanteur, qui est diminuée par la force centrifuge, et par conséquent la longueur du pendule à secondes, serait assujettie à des variations analogues. Mais il est prouvé par les observations les plus exactes, que la longueur du pendule à secondes, sous chaque latitude, est invariable.

CHAPITRE VII.

Figure de la Terre.

§. 120. La terre présente au premier coup d'oeil une régularité frappante, et les observations des astronomes, des géographes, et des navigateurs prouvent, que sa figure ne s'écarte pas sensiblement de la sphère (I. §. 186. 192.). Il était donc naturel de chercher la cause qui peut avoir donné à notre globe une figure aussi régulière, et ces recherches donnèrent lieu à une des plus belles découvertes de Newton, celle de la figure elliptique de la terre, et aux expéditions astronomiques vers le pole et l'équateur, qui ont singulièrement contribué aux progrès des sciences. Quand nous voyons, que la figure de la terre et de tous les corps célestes est la seule, parmi une infinité d'autres figures également possibles, qui soit parfaitement régulière, nous ne pouvons pas croire que c'est l'effet d'un pur hasard; nous ne pouvons douter qu'il n'y a eu des causes physiques ou mécaniques, qui ont produit cette figure, en la changeant et modifiant jusqu'au moment où toutes les forces agissantes étaient en équilibre. C'est au moins le seul principe, duquel doit partir toute recherche *théorique* sur la figure de la terre. Quand même la terre aurait reçu, dès son origine, la figure qu'elle a conservée depuis tant de siècles, il serait infiniment probable, que c'était celle que l'équilibre suppose. Deux tiers de la surface de la terre sont encore aujourd'hui fluides, et ces mers immenses qui recouvrent la terre, sont en repos ou en équilibre, ce qui serait impossible, si la figure de la terre n'était pas celle qui convient à l'équilibre. D'un autre côté, le continent s'élevant très-peu au dessus de la mer, et la profondeur des eaux étant inconsidérable, on doit en conclure, que la figure du globe terrestre entier est à très-peu près

celle qui établirait l'équilibre, si la terre était un corps fluide. On est donc non-seulement autorisé, mais nécessité, de suppuser la terre *fluide*. Cela posé il résulte des premiers élémens de *l'hydrostatique*, que l'équilibre ne peut avoir lieu, et que la figure de la terre ne peut être stable, et sa surface en repos, que dans le cas où les deux conditions suivantes seront satisfaites. 1) Tous les canaux, remplis de ce fluide, et ayant la même base, doivent exercer, dans leur commune section, les mêmes efforts ou pressions: en concevant donc dans chaque point de la surface de la terre, un cylindre creux infiniment mince qui s'étend jusqu'au centre de la terre, *tous ces canaux doivent avoir le même poids*; autrement celui qui pèse moins, cèderait à la plus forte pression, en s'élevant sur la surface de la terre, et sa figure serait altérée jusqu'au rétablissement de l'équilibre. 2) La figure doit être telle, que la *direction de la pesanteur soit partout perpendiculaire à la surface*: proposition aussi évidente par l'expérience que par la théorie. C'est le seul cas, où la pesanteur contribue à la stabilité et solidité de la terre. Dans tout autre cas, elle peut être décomposée suivant deux directions, l'une perpendiculaire à la surface, l'autre en étant la tangente: la première soutient la figure de la terre, la seconde tend à l'altérer, en imprimant à la surface fluide un mouvement suivant la tangente, auquel rien ne s'oppose: ainsi l'océan ne serait pas en repos, et la figure de la terre éprouverait des changemens continuels.

Ces deux principes serviront à déterminer la figure de la terre par la théorie. Le premier suppose que, la position et la longueur d'un canal depuis le centre jusqu'à la surface étant données, on peut trouver son poids, pour voir si tous les poids sont égaux; ce qui, rigoureusement parlant, n'est possible à moins qu'on ne connaisse la densité de la terre, ou plutôt la loi suivant laquelle la densité dépend de la distance au centre. Mais c'est ici que la théorie est dépourvue de données, parce que les observations devraient être faites dans l'intérieur de la terre. Il est donc naturel d'adopter l'hypothèse la plus simple, c'est-à-dire une densité homogène. Il est vrai que la connaissance superficielle même, que nous avons de la terre, suffit pour prouver que cette hypothèse n'est pas exacte; aussi le rapport

des axes qui en résulte, n'est pas entièrement conforme aux observations. Mais notre bût n'est pas de déterminer par la théorie les dimensions exactes de la terre, ce qui ne peut se faire que par des observations; nous nous proposons, d'examiner en général les changemens que la figure sphérique éprouvera par la rotation, et d'expliquer par des principes physiques l'aplatissement de la terre. L'hypothèse précédente suffit pour ce but, et la comparaison de ses résultats avec les observations nous apprendra, si elle est conforme à la nature ou non.

La *densité homogène* de la terre sera donc la base des recherches suivantes. Il en suit, que la terre, si elle ne tournait pas autour d'un axe, prendrait spontanément la figure *sphérique;* mais que les forces centrifuges, dues à la rotation, changeront sa figure de manière, que la distance de tous les points, ayant la même force centrifuge, à l'axe de rotation, éprouvera des changemens égaux; d'où il résulte, que l'équateur et tous les parallèles sont des cercles, et que la terre est un *solide de révolution* autour de l'axe de rotation, ensorte que tous les *méridiens sont des courbes semblables.* Il en suit encore, qu'un plan de méridien passant par l'axe et un point quelconque M de la terre, la partagera en deux portions égales et semblables qui, par conséquent, attireront également le point M, de sorte que la direction moyenne de la pesanteur coïncide constamment avec le méridien, étant, en vertu de la condition 2), perpendiculaire à la tangente du méridien. Ce sont les principes qui serviront à démontrer les théorèmes suivans. Une théorie générale qui ne suppose aucune hypothèse, et qui a donné lieu aux recherches savantes de D'Alembert [1], Clairaut [2], Laplace [3], et d'autres géomètres, appartient plutôt à la physique qu'à l'astronomie.

§. 121. Parmi ceux qui ont examiné avant Newton la nature des forces centrifuges, et l'altération de la figure de la terre qui en résulte, Huyghens mérite une attention particulière. Newton funda une nouvelle théorie

---

(1) *Recherches sur différens points importans du Syst. du Monde, Liv. III. VI. et Opusc. Mathém. Tom. VI.*

(2) *Théorie de la figure de la Terre.*

(3) *Mécanique céleste.*

sur sa découverte de l'attraction universelle de toutes les molécules; au lieu que Huyghens eut supposé, que la force attractive était une propriété particulière du centre de la terre, que par conséquent la direction de la pesanteur, en faisant abstraction des forces centrifuges, passait par le centre de la terre, quelle que fût sa figure, et que la pesanteur, dans toute l'étendue de la terre, était proportionnelle à une puissance constante λ de la distance r au centre. Cette hypothèse simplifie singulièrement les recherches. Soit (*Fig.* 26.) C le centre de la terre, P le pole, A un point de l'équateur, $CA = m$, $CP = n$, $CM = r$, $ACM = \beta$, et nommons A et F la pesanteur et la force centrifuge sous l'équateur: cela posé la pesanteur en M suivant MC sera $= \frac{r^\lambda}{m^\lambda} A$. Ayant abaissé sur CP la perpendiculaire NMQ, la force centrifuge f en M suivant MN est proportionnelle à la distance de l'axe (§. 69.), partant $f = \frac{MQ}{CA} F = \frac{r \cos\beta}{m} F$; elle sera donc suivant $Mm = f \cos\beta = \frac{r \cos^2\beta}{m} F$, d'où il résulte la pesanteur, diminuée par la force centrifuge, suivant $MC = \frac{A r^\lambda}{m^\lambda} - \frac{F r \cos^2\beta}{m}$, et la pesanteur de l'élément $M\mu = \frac{A r^\lambda \partial r}{m^\lambda} - \frac{F r \partial r \cos^2\beta}{m}$, en faisant l'épaisseur de tous les canaux MC égale à l'unité: l'intégration donnera la pesanteur du canal entier $CM = \frac{A r^{\lambda+1}}{(\lambda+1) m^\lambda} - \frac{F r^2 \cos^2\beta}{2m}$. En faisant $\beta = 0$, $r = m$, et ensuite $\beta = 90°$, $r = n$, on aura la pesanteur du canal $CA = \frac{Am}{\lambda+1} - \frac{Fm}{2}$, et celle de $CP = \frac{A n^{\lambda+1}}{(\lambda+1) m^\lambda}$. Comme elles doivent être égales, par hypothèse, on aura l'équation

$$2 A m^{\lambda+1} - (\lambda+1) F m^{\lambda+1} = 2 A n^{\lambda+1},$$

d'où il suit le rapport des axes,

$$\frac{n}{m} = \left(\frac{2A - (\lambda+1) F}{2A}\right)^{\frac{1}{\lambda+1}}.$$

On verra plus bas, que la rotation de la terre donne $\frac{F}{A} = \frac{1}{289}$, d'où il suit

$$m : n :: 578^{\frac{1}{\lambda+1}} : (578 - (\lambda+1))^{\frac{1}{\lambda+1}}.$$

La supposition que la pesanteur soit proportionnelle à r^λ, est à la vérité contraire à l'attraction universelle, en vertu de laquelle ce rapport n'a lieu que dans le cas où le solide est une sphère homogène. Cependant la figure de la terre ne s'écartant pas beaucoup de la sphère, l'erreur qui en résulte, ne peut pas être sensible: en effet, si l'on fait $\lambda = 0$, ensorte que la pesan-

teur est constante sur toute la terre, on aura $m:n::578:577$, ce qui est le rapport adopté par Huyghens; si l'on fait $\lambda = -2$, on aura $m:n::579:578$, ce qui ne diffère pas sensiblement du rapport précédent. Mais l'autre supposition, que la direction de la pesanteur passe constamment par le centre, ce qui ne peut arriver que dans la sphère, est la source de la différence considérable qui existe entre ce rapport et celui qui résulte de la théorie de Newton ou des observations.

Quand la théorie de la *gravitation universelle* eut été confirmée par une foule d'observations et de découvertes astronomiques, l'hypothèse de Huyghens n'était plus admissible, et l'on fut forcé de prendre pour principe, que les corps sur la terre ne pèsent pas simplement vers le centre, mais qu'ils sont attirés par chaque élément de la masse terrestre, en raison directe de la masse de l'élément, et en raison inverse du carré de sa distance. Ainsi la pesanteur d'un corps est la force résultante des attractions innombrables de tous les élémens. Cette gravitation universelle imprimera à la terre la figure sphérique, si elle n'a point de rotation. Mais dès que le mouvement diurne de la terre commence, tous ses points hors de l'axe recevront des forces centrifuges, qui seront d'autant plus fortes, et plus directement opposées à la pesanteur, que ces points sont plus près de l'équateur. Ainsi la pesanteur diminue depuis le pole jusqu'à l'équateur; la masse fluide de la terre s'élèvera vers l'équateur, la figure de la terre sera aplatie vers les poles, et les méridiens ne seront plus circulaires. Or comme ils ne s'écartent que très-peu du cercle, il est naturel d'essayer d'abord l'*ellipse* qui, de toutes les courbes, approche le plus du cercle: il s'agit donc d'examiner, si des méridiens elliptiques sont susceptibles de l'équilibre, et quel doit être le rapport entre les axes de ces ellipses. La solution de ce problème, suivant la théorie de Newton, est l'objet du Chapitre présent.

§. 122. *Lemme. La section du sphèroïde elliptique par un plan quelconque est une ellipse.* Soit LRNO cette section (*Fig.* 27.), PQ l'axe du sphéroïde; abaissons sur le plan LRO la perpendiculaire Pp, et menons par Pp et l'axe le plan du méridien PAQ, qui coupe perpendiculairement le plan LRO en MN et l'équateur en A. La position du plan générateur étant

donnée, on connaît PK et $PKM = \alpha$, ce qui donne dans le méridien elliptique le point M, et par la nature de l'ellipse, les coordonnées $Pm = e$, $Mm = c$. Que d'un point quelconque R de la courbe, on abaisse les perpendiculaires RS sur MN, et RT, ST, sur PQ, RS étant perpendiculaire au plan PAQ. En nommant $MS = t$, $SR = u$, on aura $mT = Ss = t\cos\alpha$, $Ms = t\sin\alpha$, donc $PT = c + t\cos\alpha$, $ST = e - t\sin\alpha$. Or le point R étant aussi dans le méridien elliptique PRQ, la figure du sphéroïde donnera, en faisant le diamètre de l'équateur $= 2m$, et l'axe $= 2n$, l'équation suivante entre PT et TR:

$$TR^2 = \frac{m^2}{n^2}(2n.PT - PT^2), \text{ d'où l'on tirera } u^2 = TR^2 - ST^2, \text{ ou}$$

$$n^2u^2 = 2m^2nc - m^2c^2 - n^2e^2 + 2t\{m^2(n-c)\cos\alpha + n^2e\sin\alpha\} - t^2(m^2\cos^2\alpha + n^2\sin^2\alpha).$$

Mais on a, pour le point M dans l'ellipse PAQ, $n^2e^2 = m^2(2nc - c^2)$, d'où il vient, en faisant, pour abréger,

$$m^2\cos^2\alpha + n^2\sin^2\alpha = M^2, \quad m^2(n-c)\cos\alpha + n^2e\sin\alpha = N,$$

$$n^2u^2 = 2Nt - M^2t^2.$$

Si l'on fait $u = 0$, on a $t = 0$ et $t = MN$, partant $Mc = \frac{1}{2}MN = f = \frac{N}{M^2}$. En nommant donc $cS = x$, il viendra $t = f - x$, donc $u^2 = \frac{M^2}{n^2}(f^2 - x^2)$.

Cette équation nous apprend, que MRN est une *ellipse*, dont le centre est c, et les deux axes $MN = 2f$, $2ca = \frac{2f}{n}M$, qui sont entre eux comme n à M. L'ellipse se changera en cercle, si $\alpha = 90°$, le plan générateur étant perpendiculaire à l'axe. Dans tout autre cas, le diamètre MN qui est dans le plan de l'axe PQ, sera le petit ou le grand axe, selon que le sphéroïde est aplati ou alongé, parce que $n^2 - M^2 = (n^2 - m^2)\cos^2\alpha$. Nous allons en tirer deux conclusions importantes.

1. Si le plan générateur ou MN est parallèle à l'axe PQ, on a

$$\alpha = 0, \; M = m, \; f = n - c = Cm, \text{ et } u^2 = \frac{m^2}{n^2}\{(n-c)^2 - x^2\}.$$

L'ellipse MRN est dans ce cas semblable aux méridiens, le petit axe $MN = 2(n-c)$ est parallèle à l'axe ou perpendiculaire à l'équateur, et le grand axe $= \frac{2m}{n}(n-c)$ est situé dans le plan de l'équateur.

2. Concevons que le plan générateur ou MN avance parallèlement, ensorte que α soit invariable, pendant que c et e changent: cela posé, M et le

rapport des deux axes est constant, mais f ou la grandeur absolue des axes change. Il s'en suit, que tous les plans parallèles qui couperont le sphéroïde, donneront des ellipses *semblables*: si donc deux sphéroïdes semblables et concentriques, dont les axes ont même situation, sont coupés par un plan, les deux sections seront des ellipses *semblables*.

§. 123. *Théorème. Deux points matériaux qui, à la surface de deux corps semblables, ont des situations analogues, seront attirés par les corps avec des forces qui sont entre elles comme les distances au centre, ou comme les diamètres de ces corps.* Soient (*Fig.* 28.) M, m, les deux points, et MNO, mno, les deux corps, auxquels on a donné une situation semblable autour d'un commun centre C: cela posé M, m, se trouveront sur le même rayon CM. Ayant mené deux cordes parallèles MN, mn, on aura, à cause de la ressemblance des solides, $MN : mn :: CM : Cm$, Concevons que M, m, soient les sommets de deux pyramides ou cônes évanouissans et semblables NMO, nmo, dont les bases NO ou NL et nl seront entre eux comme les carrés de MN et mn: prenons dans la première pyramide un point quelconque X, et faisons $MX = x$, $Xx = \partial x$, et la surface $XY = X$ qui est parallèle à la base NL: cela posé, l'élément $Xy = X\partial x$ exercera sur le point M l'attraction $= \frac{X\partial x}{x^2}$, d'où l'on conclura l'attraction de la pyramide $MX = \int \frac{X\partial x}{x^2}$. Soit $\alpha = Aa$ la base des deux pyramides MN, mn, à la distance $MA = 1$; alors la base à une autre distance x sera $X = \alpha x^2$, d'où l'on tire l'attraction de la pyramide $MX = \int \alpha \partial x = \alpha x$, celle de la pyramide $MN = \alpha$ MN, et de la pyramide $mn = \alpha . mn$. Il en suit en général, que les *attractions qu'exercent des pyramides semblables sur des points dans leurs sommets, sont comme les hauteurs, ou d'autres lignes homologues, de ces pyramides, c'est-à-dire comme leurs racines cubiques.* Puisque $\alpha = \frac{X}{x^2} = \frac{NL}{MN^2}$, on peut aussi exprimer l'attraction de la pyramide par $\frac{X}{x} = \frac{NL}{MN}$.

Ainsi les points M, m, sont attirés par les pyramides ou les élémens semblablement situés de leurs corps, MNO, mno, avec des forces qui sont entre elles comme $MN : mn :: CM : Cm$; et ces forces étant décomposées suivant une direction quelconque MC, mC, seront comme $MN \cos CMN$ et $mn \cos Cmn$, donc comme $MN : mn :: CM : Cm$. Puisque les pyramides sont

supposées être semblables, elles seront dans le rapport de CM^3 et Cm^3, ou dans celui des solides entiers: d'où il suit que les deux solides renferment le même nombre de pyramides semblables. L'attraction des solides entiers sera donc aussi dans le rapport de $CM:Cm$. Puisque le point C est arbitraire, MC peut représenter la direction moyenne de toutes les attractions élémentaires; et alors on aura le théorème qu'il fallait prouver.

§. 124. *Théorème. Les attractions que deux points matériaux qui se trouvent sur le même diamètre du sphéroïde elliptique, éprouvent par l'action du sphéroïde entier, sont comme les distances de ces points au centre.* Soit (*Fig.* 29.) AFED une section du sphéroïde, P un point matériel dans le plan de cette section, et concevons un sphéroïde semblable, mené par P dans la même situation que AFE, dont la section soit $PQed$: cela posé, AFED, $PQed$, seront des ellipses semblables (§. 122. n. 2.). Ayant mené par P deux droites infiniment proches l'une de l'autre, DPF, EPG, elles formeront les pyramides semblables PGF, PDE, Pde, si le plan AFE tourne autour de P, en décrivant un angle infiniment petit; et les attractions U, V, v, que les pyramides PGF, PDE, Pde, exerceront sur P, seront comme les distances PF, PD, Pd (§. 123.). Si C est le centre des deux ellipses dans cette situation, et f le milieu des cordes FD, Pd, on aura $PF = Dd$, d'où il suit $V - v : U :: Dd : PF :: 1 : 1$; l'attraction du segment $DEed$ est donc égale à celle de la pyramide PFG. Or ces attractions étant opposées l'une à l'autre, le point P sera attiré seulement par la pyramide Pde. Il en est de même de toute autre ligne dans le plan AFE, d'où il suit, que le point P est attiré par l'élément sphéroïdal AFEC qui est renfermé entre deux plans passant par P, précisément comme s'il était attiré seulement par l'élément du sphéroïde intérieur $PQeC$. Concevons maintenant, que le plan AFEP, en tournant autour de P, traverse le sphéroïde entier: alors ce qui précède, aura lieu dans chaque position de ce plan, ou pour chaque élément du sphéroïde, et par conséquent dans toute l'étendue du sphéroide: le point P éprouvera par l'action du sphéroïde entier la même attraction, que par l'action seule du sphéroïde semblable $PQeC$, à la surface duquel P se trouve.

Soit maintenant C le centre du sphéroïde, et p un autre point sur le rayon CP, lequel éprouvera, par ce qui précède, l'attraction seule du sphéroïde semblable passant par p: les attractions des deux points P, p, seront donc comme CP, Cp (§. 123.), ou comme leurs distances au centre C.

Le rapport précédent a encore lieu, si le sphéroïde tourne autour d'un axe R Cr: car la diminution de la pesanteur des points P, p, due aux forces centrifuges, suivant SP, sp, est dans le rapport de SP : sp :: CP : Cp (§. 69.). Or la pesanteur étant, par ce qui précède, dans le même rapport, et les forces centrifuges ayant la même situation par rapport à la pesanteur, parce que les deux points sont sur le même rayon; la pesanteur, diminuée par la rotation, suivra aussi le même rapport.

§. 125. *Théorème. L'équilibre ne peut avoir lieu dans le sphéroïde elliptique, que lorsque tous les points à la surface sont attirés vers le centre, en raison inverse des distances au centre ou des rayons du sphéroïde.* Soit (*Fig.* 30.) AMP le méridien elliptique, P le pole, A un point dans l'équateur, M un point quelconque, $CA = m$, $CP = n$, $CM = r$, et désignons par A, P, M, la pesanteur vers le centre, qui aurait lieu sous l'équateur, au pole, et dans le parallèle M, si la terre ne tournait pas sur un axe. Concevons de petits cylindres de même épaisseur, qui s'étendent de ces points jusqu'au centre; alors chaque point dans les sections perpendiculaires de ces canaux, ab, pq, mn, éprouvera l'attraction $\frac{Ca}{m}$ A, $\frac{Cp}{n}$ P, $\frac{Cm}{r}$ M, vers C (§. 124.). En faisant donc $Ca = x$, $Cp = y$, $Cm = z$, on aura la pesanteur des élémens cylindriques $b\alpha = \frac{x\,\partial x}{m}$ A, $q\pi = \frac{y\,\partial y}{n}$ P, $n\mu = \frac{z\,\partial z}{r}$ M, d'où il résulte, si l'on fait après l'intégration $x = m$, $y = n$, $z = r$, la pesanteur des canaux entiers, $CA = \frac{1}{2}m$A, $CP = \frac{1}{2}n$P, $CM = \frac{1}{2}r$M. Comme tous ces canaux doivent se faire équilibre en C (§. 120. n. 1.), on a $m\text{A} = n\text{P} = r\text{M}$, ou A : P :: n : m et A : M :: r : m. L'équilibre a donc lieu dans la sphère, si elle n'a point de rotation, parce que $m = n = r$ et A = P = M.

Si le solide tourne autour d'un axe, la proposition précédente a également lieu. Dans ce cas chaque point m sera sollicité suivant CA par la force centrifuge $V = \frac{\gamma^2 u}{2b}$ Z (§. 69.), u étant la distance du point m à l'axe, b l'accélération de la pesanteur en m, et Z le poids du point matériel m. Or

les masses des élémens m étant supposées égales, leurs poids seront proportionnels à h: en faisant donc $Z = 2\mu h$, il viendra $V = \mu\gamma^2 u$, et $u = z \sin PCM$, donc $V = \mu\gamma^2 z \sin PCM$, z étant $= Cm$. Il en résulte une pression suivant $mM = V \sin PCM = \mu\gamma^2 z \sin^2 PCM = V'$. Mais $Z = \frac{z}{r} M$ (§. 124.); la pesanteur de l'élément $n\mu$ suivant mC, diminuée par la force centrifuge, sera donc $(Z - V')\partial z = z\partial z\left(\frac{M}{r} - \mu\gamma^2 \sin^2 PCM\right)$, dont l'intégrale donnera la pesanteur diminuée du canal entier $CM = \frac{1}{2}(Mr - \mu\gamma^2 r^2 \sin^2 PCM) = V''$. Si l'on met dans l'expression de V', r à la place de z, on aura la force centrifuge du point M suivant $CM = \mu\gamma^2 r \sin^2 PCM = M'$, et sa pesanteur diminuée $= M'' = M - M' = M - \mu\gamma^2 r \sin^2 PCM$, partant $V'' = \frac{1}{2} M'' r$. Si l'on nomme A'', P'', la pesanteur des points A, P, modifiée par la force centrifuge, on trouvera de la même manière la pesanteur modifiée du canal $CA = \frac{1}{2} A'' m$, et du canal $CB = \frac{1}{2} P'' n$. Or tous ces canaux devant exercer la même pression dans le cas de l'équilibre, il s'en suit $M'' r = A'' m = P'' n$; ce qui nous apprend, que la pesanteur, diminuée par la rotation, vers le centre, est aussi réciproque aux distances du centre. Mais il sera bon d'observer, que cette pression vers le centre n'est équivalente à la pesanteur des corps graves, perpendiculaire à la surface, que dans l'axe et dans l'équateur.

§. 126. PROBLÈME. *Etant donné dans l'ellipse* APB (*Fig.* 31.) *un point* Z, *d'où l'on a mené* ZT *parallèlement à l'un des deux axes* AB, *et deux cordes* ZM, Zm, *qui font avec* ZT *des angles égaux* $TZM = TZm = \Phi$; *ayant de plus abaissé des trois points* Z, M, m, *les perpendiculaires* ZD, LMH, mlh, sur AB: *trouver la somme des deux lignes* ZL, Zl.

Solution. Soit C le centre de l'ellipse, et nommons $CA = CB = a$, $CP = Cp = b$, $Ah = t$, $hm = u$: le point Z étant donné par les coordonnées $AD = c$, $DZ = e$, la nature de l'ellipse donnera pour les points Z et m les équations:

$$a^2 e^2 = b^2 c(2a - c) \quad \text{et} \quad a^2 u^2 = b^2 t(2a - t).$$

En faisant donc $Zl = x$, $lm = y$, on aura $x = t - c$, $y = u - e$, d'où l'on tire $u^2 - e^2 = y(y + 2e)$. Or les deux équations précédentes donnent $a^2(u^2 - e^2) = b^2(t - c)(2a - c - t)$, d'où l'on tirera $a^2 y(y + 2e) = b^2 x(2a - 2c - x)$. Si l'on y substitue $y = x \operatorname{tang} \Phi$, on aura $Zl = x = \frac{2b^2(a - c) - 2a^2 e \operatorname{tg} \Phi}{a^2 \operatorname{tang}^2 \Phi + b^2}$, et en mettant $LZM = -\Phi$ au lieu de $lZm = +\Phi$,

$ZL = x' = \frac{2b^2(a-c)+2a^2 e \operatorname{tg}\Phi}{a^2 \operatorname{tang}^2\Phi + b^2}$, d'où il résulte $x + x' = \frac{4b^2(a-c)}{a^2 \operatorname{tg}^2\Phi + b^2}$.

Si $\operatorname{tang}\Phi$ est plus grand que $\frac{b^2(a-c)}{a^2 e}$, x devient négatif. En effet, la droite qui touche la courbe dans un point quelconque, fait avec une ligne, parallèle aux abscisses t, comme ZT, un angle ψ dont la tangente est $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{b^2(a-t)}{a^2 u}$: on a donc dans le point Z, $\operatorname{tg}\psi = \frac{b^2(a-c)}{a^2 e}$. Or il est visible que, si l'on fait $\Phi > \psi$, Zm ou $Z\nu$ rencontrera l'ellipse de l'autre côté dans un point n, ce qui donnera $Zo = -x = \frac{2a^2 e \operatorname{tg}\Phi - 2b^2(a-c)}{a^2 \operatorname{tg}^2\Phi + b^2}$, et $x' - x = \frac{4b^2(a-c)}{a^2 \operatorname{tg}^2\Phi + b^2}$, comme précédemment. La somme algébrique des deux abscisses ZL, Zl, est donc constamment $\frac{4b^2(a-c)}{a^2 \operatorname{tg}^2\Phi + b^2}$.

Soit maintenant D le sommet, C le centre d'une ellipse DFEG, semblable à AZBP, et faisons $EDQ = EDq = \Phi$; cela posé, les cordes DQ et ZM, Dq et Zm, seront parallèles entre elles, et la nature de l'ellipse donnera l'équation

$RQ^2 = Rq^2 = DR^2 \operatorname{tg}^2\Phi = \frac{b^2}{a^2} DR(2CD - DR)$, et $CD = a - c$, d'où il suit

$$DR = \frac{2b^2(a-c)}{a^2 \operatorname{tg}^2\Phi + b^2} = \frac{x + x'}{2}.$$

Comme AB pourra être, dans les formules précédentes, le grand ou le petit axe, on en conclura ce théorème général: Ayant mené d'un point quelconque Z d'une ellipse, deux cordes, inclinées sur l'un des axes de l'ellipse AB sous des angles égaux, ZM, Zm, ou ZN, Zn; ayant ensuite abaissé sur le même axe AB les perpendiculaires ZD, LMH, mlh, et décrit par le point D, sur l'axe AB, une ellipse semblable à la grande; ayant enfin tiré de D deux cordes, parallèles aux cordes ZM, Zm, ou ZN, Zn; on aura $ZL + Zl$ ou $ZO - Zo = 2DR$.

§. 157. Soit Z un point à la surface du sphéroïde elliptique, C le centre, Pp l'axe, AB un diamètre de l'équateur: cela posé il suit de ce qui précède, que l'attraction moyenne sur Z doit passer par l'axe, parce que le plan ZAPB partage le sphéroïde en deux portions égales et semblables (§ 120.): l'attraction qu'éprouve Z, pourra donc être décomposée suivant deux directions, dont l'une est perpendiculaire, et l'autre parallèle à l'axe. Supposons que la ligne ZY, qui est parallèle à l'axe, rencontre le plan de l'équateur en D, qu'il soit décrit par D un sphéroïde semblable sur les mê-

mes axes, et que le plan AZBP tourne autour de ZY: cela posé, quelle que soit la position de ce plan, ses intersections avec les deux sphéroïdes formeront deux ellipses semblables AB, DE, dont les axes sont AB, P*p*, et DE, FG, D étant le sommet commun à toutes les ellipses intérieures, et le plan générateur par ZY étant constamment parallèle à l'axe (§. 122.). L'attraction de l'espace sphéroïdal, renfermé par deux ellipses qui se coupent sur ZY sous un angle infiniment petit dans une position quelconque du plan AZB, est la différentielle de l'attraction que le sphéroïde entier exerce sur Z. Soit donc ZL parallèle au grand axe des deux ellipses ou à l'équateur (§. 122. n. 1.), et tout le reste de la figure tracé comme dans le §. précédent: supposons que les cordes ZM, Z*m*, DQ, D*q*, s'éloignent des deux côtés de ZL et DE, avec la même vitesse angulaire, ensorte que les angles LZM, LZ*m*, EDQ, ED*q*, soient constamment égaux entre eux; et concevons que, dans chaque position instantanée, M, *m*, Q, *q*, soient les bases infiniment petites de pyramides semblables, dont les sommets sont en Z et D. Cela posé, les attractions que les points Z, D, éprouveront par les actions des pyramides, seront comme les cordes ZM, Z*m*, DQ, D*q* (§. 123.), d'où résulteront les attractions, parallèles à l'équateur, suivant ZL et DE, qui seront comme les abscisses ZL, Z*l*, DR, DR. Ainsi la somme des deux attractions ZL, Z*l*, est à la somme des deux pressions DR, comme ZL+Z*l* est à 2DR: elles sont donc égales (§. 126.). Pendant que les angles LZM, LZ*m*, EDQ, ED*q*, ont augmenté de zéro à 90°, le rayon vecteur ZM a traversé la surface elliptique TBPYZT, Z*m* a décrit les segmens T*m*ZT et ZAYZ; les deux rayons ZM, Z*m*, ont donc parcouru l'ellipse entière AB, pendant que DQ, D*q*, ont décrit l'ellipse entière DE; et dans chaque position l'égalité précédente a eu lieu. Ainsi l'attraction totale que l'élément sphéroïdal AZBPA exerce sur Z suivant ZT, est égale à celle que l'ellipse DFEGD exerce sur D suivant DE, quelle que soit la position du plan ZYB. Pendant que ce plan, en tournant sur ZY, traverse le sphéroïde entier, le point Z éprouvera constamment une attraction, parallèle à l'équateur, suivant ZT, qui est égale à l'attraction de D par l'action de DFEG: d'où il suit que la résultante, ou l'attraction moyenne

de Z, parallèle à l'équateur, est aussi égale et parallèle à l'attraction moyenne que D éprouve par l'action du sphéroïde intérieur DE. Or cette dernière passant nécessairement par le centre du sphéroïde DE ou par l'axe, et les points Z, D, étant situés dans le plan d'un méridien, l'attraction moyenne de Z, parallèle à l'équateur, coupera l'axe perpendiculairement (ce qui a déjà été prouvé plus haut), et sera égale à l'attraction que le sphéroïde entier DE exerce sur D.

Puisque les mêmes raisonnemens sont applicables au cas, où AB est l'axe et P*p* l'équateur (§. 126.), il en suit de même, que l'attraction totale de Z, parallèle à l'axe, est égale à l'attraction de D par le sphéroïde DE; mais dans ce cas le sommet D du sphéroïde est situé dans l'axe.

§. 128. Soit (*Fig.* 32.) M un point du méridien PA, P le pole, $CA = m$, $CP = n$, la pesanteur sous l'équateur $= A$, au pole $= P$, MK parallèle, et ML perpendiculaire à l'axe, et concevons deux sphéroïdes KN, LO, semblables au sphéroïde terrestre, décrits par K et L sur les mêmes axes: cela posé, toutes les forces qui sollicitent M, pourront être décomposées suivant MK et ML. En nommant donc K, L, les attractions des points K, L, par l'action des sphéroïdes KN, LO, l'attraction que M éprouve suivant MK, sera $= L$, et l'attraction suivant ML ou $KC = K$ (§. 127.). Or on a, dans le cas de la rotation même (§. 124.), $K = \frac{CK}{m} A$, $L = \frac{CL}{n} P$, et l'équilibre suppose $A : P :: n : m$ (§. 125.); d'où il suit

$$K : L :: n^2 CK : m^2 CL.$$

Si l'on nomme $CK = x$, $KM = CL = y$, on trouvera la direction moyenne de la pesanteur en M, ME, en faisant $L : K :: MK : KE$, d'où l'on tire

$$KE = \frac{n^2}{m^2} \cdot \frac{CK}{CL} MK = \frac{n^2 x}{m^2}.$$

Soit M*e* perpendiculaire à l'arc elliptique en M, ensorte que K*e* soit la sous-normale $= \frac{y \partial y}{\partial x}$, d'où, à cause de $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$, l'on tirera $Ke = \frac{n^2}{m^2} x = KE$: ainsi les points E, *e*, coïncident, et ME est perpendiculaire à l'arc du méridien; d'où il résulte que, *dans le sphéroïde elliptique,* 1) *la direction moyenne de la pesanteur est partout perpendiculaire à la surface,* si le rapport des axes $m : n$ est égal à $P : A$. Ainsi l'une des conditions que suppose l'équilibre (§. 120. n. 2.), est remplie dans le sphéroïde elliptique.

La pesanteur en M est $M = \sqrt{(K^2 + L^2)} = A \sqrt{\left(\frac{x^2}{m^4} + \frac{m^2 y^2}{n^4}\right)} = \frac{A\sqrt{(n^4 x^2 + m^4 y^2)}}{m\, n^2}$, ou en faisant $m^2 - n^2 = l^2$, $M = \frac{A\sqrt{(m^4 - l^2 x^2)}}{m\, n}$. En nommant β la hauteur du pole ou l'angle $A e M$, on aura $\text{tang}\, \beta = \frac{MK}{Ke} = \frac{m^2 y}{n^2 x}$, d'où il suit $x^2 = \frac{m^4}{m^2 + n^2 \text{tg}^2 \beta}$, donc $m^4 - l^2 x^2 = \frac{m^4 n^2}{m^2 \cos^2 \beta + n^2 \sin^2 \beta}$, et $M = \frac{A\, m}{\sqrt{(m^2 - l^2 \sin^2 \beta)}}$. Puisque l est une quantité très-petite par rapport à m, l'extraction de la racine donnera

$$M = A\left(1 + \frac{l^2 \sin^2 \beta}{2 m^2} + \frac{3 l^4 \sin^4 \beta}{8 m^4}\right), \text{ et } \frac{M - A}{A} = \frac{l^2 \sin^2 \beta}{2 m^2}\left(1 + \frac{3 l^2 \sin^2 \beta}{4 m^2}\right),$$

ou à peu près $\frac{M - A}{A} = \frac{l^2 \sin^2 \beta}{2 m^2} = \frac{l^2 (1 - \cos 2\beta)}{4 m^2}$; d'où il résulte que 2) *la pesanteur croît sur le sphéroïde elliptique, de l'équateur au pole, à peu près en raison du carré du sinus de la latitude, ou en raison du sinus verse de deux fois la latitude.*

L'équation $\text{tang}\, \beta = \frac{m^2 y}{n^2 x}$ donne aussi $\text{tang}\, MEK = \frac{m^2}{n^2}$ tang MCK. Or puisque tous les points m sur le rayon CM ne sont attirés que par le sphéroïde semblable LmO (§. 124.), et que par conséquent $\frac{m}{n}$ et MCK ont la même valeur pour tous les points m, l'angle MEK qui détermine la direction de la pesanteur, sera aussi constant; d'où il suit que 3) *dans tous les points sur le même rayon les directions de la pesanteur sont parallèles entre elles, et la pesanteur* vers le centre, ou perpendiculairement à la surface, est en M et m, comme CM à Cm, ou *comme la distance au centre* (§. 124.).

§. 129 Si l'on nomme maintenant $CM = r$, $Cm = z$, la pesanteur en M et en m, suivant ME, M et Z, vers le centre, M' et Z', et qu'on abaisse sur MC la perpendiculaire EG, on aura $Z = \frac{z}{r} M$, $Z' = \frac{z}{r} M'$ (§. 128. n. 3.), et $M' = \frac{MG}{ME} M$, d'où il resulte la pesanteur de l'élément du canal Cm vers $C = Z' \partial z = \frac{MG \cdot M}{ME \cdot r} z \partial z$, M, r, ME, MG, ayant une valeur constante dans toute la longueur du canal. Ainsi la pesanteur du canal Cm vers C est $\frac{MG \cdot M \cdot z^2}{2 ME \cdot r}$, et celle du canal entier $CM = \frac{MG \cdot M}{2 ME} r$. Or les triangles semblables CKM, CGE, donnent $CG = \frac{x}{r} CE$, $MG = \frac{r^2 - x \cdot CE}{r}$, $KE = \frac{n^2}{m^2} x$ (§. 128.), partant $MG \cdot r = x^2 + y^2 - x^2 + \frac{n^2}{m^2} x^2 = y^2 + \frac{n^2}{m^2} x^2 = n^2$. On a de plus $ME = \sqrt{\left(y^2 + \frac{n^4}{m^4} x^2\right)} = \frac{n \sqrt{(m^4 - l^2 x^2)}}{m^2}$, et $M = \frac{A \sqrt{(m^4 - l^2 x^2)}}{m\, n}$

(§. 128.), donc $\frac{M}{ME} = \frac{m \cdot A}{n^2}$. Cela donne la pression du canal CM vers le centre $C = \frac{1}{2} A \cdot m$, ce qui est une quantité indépendante de la latitude de M, et égale aux poids des canaux CA, CP (§. 125.). Ainsi *tous les canaux* CM *depuis un point quelconque de la surface jusqu'au centre exercent en* C *le même effort;* ce qui est la seconde condition de l'équilibre (§ 120. n. 1.).

On a donc vu que toutes les conditions que l'équilibre suppose, sont remplies par le sphéroïde elliptique (§. 128.); d'ou il suit, que l'*ellipse est la figure des méridiens, qui convient à l'équilibre,* ce qui étoit le premier objet du Chapitre présent (§. 121.). Il nous reste encore à déterminer le rapport qui doit exister entre les deux axes du méridien elliptique, conformément à la rotation connue de la terre. Or ce rapport étant le rapport inverse de la pesanteur dans l'équateur et au pole (§. 125.), il s'agit de déterminer ce dernier rapport.

§. 130. Si l'on conçoit le sphéroïde partagé parallèlement à l'équateur en disques d'une épaisseur infiniment petite, le pole de rotation sera en même tems le pole de tous ces disques, et l'attraction qu'un disque quelconque exerce sur le pole, sera la différentielle de la pesanteur au pole. Soit (*Fig.* 33.) AB un de ces cylindres évanouissans, $CA = a$ le rayon de sa base ou du parallèle, $CP = r$ la hauteur du pole au-dessus de la base, donc l'épaisseur du cylindre $= \partial r$: ayant décrit du centre de la base deux cercles infiniment peu éloignés l'un de l'autre MN, *mn*, et nommant $CM = x$, $Mm = \partial x$; la surface MmnN sera $= 2\pi x \partial x$, et l'anneau cylindrique MmnN $= 2\pi x \partial x \partial r$, ce qui est en même tems sa masse M, si l'on suppose la densité $= 1$. Chaque élément ∂M de l'anneau attire P suivant PM avec la force $\frac{\partial M}{PM^2}$, et suivant PC avec la force $\frac{r \partial M}{PM^3}$: l'attraction totale de l'anneau suivant PC sera donc $\frac{r \cdot M}{PM^3} = \frac{2\pi r x \partial r \partial x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$. En intégrant par rapport à x, on aura l'attraction du cylindre MCN suivant $C = \text{const.} - \frac{2\pi r \partial r}{\sqrt{(r^2 + x^2)}} = 2\pi \partial r \left(1 - \frac{r}{\sqrt{(r^2 + x^2)}}\right)$, la constante étant déterminée ensorte que l'intégrale soit nulle, si x est nul. En faisant $x = a$, on aura l'attraction du disque entier $AB = 2\pi \partial r \left(1 - \frac{r}{\sqrt{(a^2 + r^2)}}\right) = 2\pi \partial r (1 - \cos APC) = 4\pi \partial r (\sin \frac{1}{2} APC)^2$;

ce qui est la moyenne direction et grandeur de l'attraction, les forces latérales suivant CA, CB, etc. se détruisant mutuellement.

§. 131. Soit (*Fig.* 34.) APB le demi-sphéroïde, P le pole, AB l'équateur, C le centre, ab, $\alpha\beta$, deux parallèles, $CA = m$, $CP = n$, $Pc = r$, $ca = cb = y$, $c\gamma = \partial r$ cela posé P sera attiré par l'élément du sphéroïde $\alpha\beta$ avec la force $2\pi\partial r\left(1 - \frac{r}{\sqrt{(r^2+y^2)}}\right)$ (§. 130.) $= 2\pi\partial r\left\{1 - \frac{nr}{\sqrt{(2m^2nr - l^2r^2)}}\right\} = \partial P$, parce que la nature de l'ellipse PA fournit l'équation $y^2 = \frac{m^2}{n^2}(2nr - r^2)$, et l^2 est $= m^2 - n^2$. L'intégration donnera

$$P = 2\pi\left\{C + r + \frac{n\sqrt{(2m^2nr - l^2r^2)}}{l^2} + \frac{2m^2n^2}{l^3}\text{ Arc tang }\frac{\sqrt{(2m^2nr - l^2r^2)}}{lr}\right\};$$

ce qui est l'attraction du segment du sphéroïde $aPbc$. Pour que l'intégrale soit nulle, lorsque r est nul, il faut faire $C = -\frac{2m^2n^2}{l^3}\text{ Arc tg }\frac{\sqrt{2m^2n}}{l\sqrt{r}} = -\frac{2m^2n^2}{l^3}\pi$, d'où il vient

$$P = 2\pi\left\{r + \frac{n\sqrt{(2m^2nr - l^2r^2)}}{l^2} - \frac{2m^2n^2}{l^3}\text{ Arc tang }\frac{lr}{\sqrt{(2m^2nr - l^2r^2)}}\right\}.$$

En faisant $r = 2n$ on aura $2m^2nr - l^2r^2 = 4n^4$, et l'attraction du sphéroïde entier sur P, ou la pesanteur au pole,

$$P = 4\pi n\left\{1 + \frac{n^2}{l^2} - \frac{m^2n}{l^3}\text{ Arc tang }\frac{l}{n}\right\} = \frac{4\pi m^2n}{l^2}\left\{1 - \frac{n}{l}\text{ Arc tang }\frac{l}{n}\right\}.$$

Puisqu'il est en général Arc tang $\frac{l}{n} = \frac{l}{n} - \frac{l^3}{3n^3} + \frac{l^5}{5n^5}$ — cet. on peut développer P en série, ce qui donnera

$$P = \frac{4\pi m^2n}{l^2}\left\{\frac{l^2}{3n^2} - \frac{l^4}{5n^4} + \frac{l^6}{7n^6} - \text{cet.}\right\} = \frac{4\pi m^2}{3n}\left\{1 - \frac{3l^2}{5n^2} + \frac{3l^4}{7n^4} - \text{cet.}\right\}.$$

Prenons sur CB, $CF = l$, joignons PF, et décrivons du rayon $PC = n$ l'arc CD: cela posé F sera le foyer de l'ellipse, tang $CPF = \frac{l}{n}$, donc $P = \frac{4\pi m^2n}{l^3}(CF - CD)$.

Si le solide est une sphère du rayon a, on a $l = 0$, $m = n = a$, d'où il vient l'attraction d'une sphère sur un point à sa surface, $S = \frac{4}{3}\pi a$, et en nommant la masse de la sphère $\frac{4}{3}\pi a^3 = M$, $S = \frac{M}{a^2}$: l'attraction sera donc la même, que si la masse entière était réunie au centre de la sphère.

§. 132. Soit (*Fig.* 35.) AMBN l'équateur, et par conséquent un cercle auquel l'axe est perpendiculaire au centre C; soit AB la projection du méridien du point A, dont on cherche l'attraction; soient enfin AM, Am, deux plans quelconques, perpendiculaires à l'équateur, dont les intersections

avec le sphéroïde sont des ellipses, semblables au méridien, tellement situées, que le grand axe $AM = 2a$ est dans l'équateur, et le petit axe $= 2b$ est perpendiculaire à l'équateur, a étant à b comme m à n (§. 122.). Les plans AM, Am, renferment une portion évanouissante du sphéroïde, dont l'attraction est la différentielle de celle du sphéroïde. Il faut donc regarder l'inclinaison d'un plan à l'autre, MAm, comme la différentielle de l'angle BAM. En faisant donc $BAM = \Phi$, $MAm = \partial\Phi$, il faut regarder Φ et $\partial\Phi$ comme des quantités constantes, lorsqu'il s'agit de l'attraction de l'élément MAm. Après avoir trouvé, par une première intégration, cette différentielle de l'attraction, toutes les quantités variables de l'ellipse AM doivent être exprimées en fonctions de Φ; alors la seconde intégration par rapport à Φ donnera l'attraction du secteur sphéroïdal BAM. Comme la direction moyenne de toutes les forces qui sollicitent A, passe nécessairement par le centre C, on peut d'abord décomposer chaque attraction AM suivant AR et RM; alors les forces RM seront détruites par des forces analogues dans l'autre moitié du sphéroïde ANB, et la somme des forces AR donnera la force totale qui attire A vers le centre. En nommant donc l'attraction de l'élément AMm suivant $AM = Q$, et l'attraction suivant $AB = Q'$, on aura $Q' = Q \cos\Phi$. Or AMBN étant un cercle, AMB est un angle droit, et l'on aura

$$AM = AB \cos\Phi, \text{ ou } a = m \cos\Phi, \text{ donc}$$
$$b = \frac{n}{m} a = n \cos\Phi, \text{ et } \sqrt{(a^2 - b^2)} = c = \cos\Phi \sqrt{(m^2 - n^2)} = l \cos\Phi.$$

§. 133. Les deux plans, perpendiculaires à l'équateur, qui, dans la *Fig.* 35. ont été projettés en lignes droites, sont représentés en profil dans la *Fig.* 36: ils sont projettés sur le plan AM, l'oeil étant supposé perpendiculairement au dessus de C au pole L de l'ellipse AM (*Fig.* 35.), et l'arc de l'équateur ALM étant projetté en ligne droite ACM (*Fig.* 36), et L en C. Leurs communes sections avec le sphéroïde sont les ellipses ADM, AZm, les plans se coupent sous l'angle sphérique $DAZ = \partial\Phi$ (§. 132.), et leur commune section est la droite AE, perpendiculaire à AM, et tangente aux deux ellipses; les demi-axes $AC = a$, $CD = b$, sont entre eux comme m et n (§ 132.). Menons par deux points V, v, de l'ellipse ADM, les

plans AVZ, Avz, perpendiculaires à AVM, qui coupent le plan AZm suivant AZ et Az; et décrivons du centre A et du rayon $AC = a$, une sphère, dont le secteur $CEAcC$ tombe entre les plans des deux ellipses, ensorte que l'angle sphérique CEc est égal à l'inclinaison $\partial\Phi$. La pyramide $AVvzZA$ étant l'élément du secteur sphéroïdal $ADMmZA$, renfermé par les plans AM, Am, son attraction ∂q sera la différentielle de celle de ce secteur, que nous avons désignée par Q (§. 132.).

Si l'on fait l'élément de la surface sphérique $NXrn = \partial s$, l'attraction de la pyramide ANr sur A est $\frac{\partial s}{AN} = \frac{\partial s}{a}$ (§. 123.), d'où l'on conclura l'attraction de la pyramide semblable $AVz = \frac{AV}{a^2}\partial s = \partial q$ (§. 123.). En abaissant dans le plan ADM, les perpendiculaires NO, no, VY, sur AM, et nv sur NO, et nommant

$$AO = X,\ ON = Y,\ AY = x,\ YV = y,\ nv = \partial X,\ Nv = \partial Y;$$

les triangles semblables AON, Nvn, fourniront $Nn = \frac{AN}{AO} Nv = \frac{a\partial Y}{X}$, et $NAX = E \sin EN = \partial\Phi \cos CN = \frac{X}{a}\partial\Phi$, d'où l'on tirera l'arc $NX = AN \,.\, NAX = X\partial\Phi$. Il suit de là $\partial s = Nn \,.\, NX = a\partial\Phi\partial Y$ et $\partial q = \frac{AV}{a}\partial\Phi\partial Y$. Puisque chaque pyramide AVz a une pyramide analogue de l'autre côté de AM, la force résultante des deux pyramides et de tout le secteur du sphéroïde $ADMmNA$, passera par AM, et la différentielle de cette résultante, ou l'attraction de la pyramide AVz suivant AM est $\partial Q = \frac{AY}{AV}\partial q = \frac{x}{a}\partial\Phi\partial Y$.

§. 134. On a par la nature de l'ellipse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, et par les triangles semblables ANO, AVY, $\frac{Y}{a} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, d'où il vient

$$Y = \frac{ab\sqrt{(2a-x)}}{\sqrt{(2ab^2+c^2x)}}, \quad \text{partant} \quad x = \frac{2ab^2(a^2-Y^2)}{a^2b^2+c^2Y^2};$$

ce qui étant substitué dans l'équation précédente (§. 133.), donnera

$$\partial Q = \frac{2b^2\partial\Phi(a^2-Y^2)\partial Y}{a^2b^2+c^2Y^2}, \quad \text{dont l'intégrale est}$$

$$Q = \frac{2b^2}{c^2}\partial\Phi\left\{\frac{a^3}{bc}\,\text{Arc tang}\,\frac{cY}{ab} - Y\right\},$$

ce qui étant nul, si $NO = Y = 0$, est compté depuis Mm ou AC. Ainsi pour avoir l'attraction du secteur entier $MDAZmM$, il faut faire $CAN = 90°$, ou ce qui revient au même, $Y = AE = a$, et multiplier par 2, parce qu'il

y a de l'autre côté de AM un secteur analogue. L'attraction de l'élément entier AMm (*Fig.* 35.) suivant AM sera donc $Q = \frac{4ab}{c^2}\partial\Phi\left\{\frac{a^2}{c}\text{ Arc tg }\frac{c}{b} - b\right\}$, et l'attraction suivant AB, $Q' = Q\cos\Phi$ (§. 132.). En nommant α l'angle constant, dont la tangente est $\frac{c}{b} = \frac{l}{n}$, et substituant $a = m\cos\Phi$, $b = n\cos\Phi$, $c = l\cos\Phi$ (§. 132.), on aura $Q' = \frac{4m^3}{l^4}\left(n\alpha - \frac{n^2 l}{m^2}\right)\partial\Phi\cos^2\Phi$, ce qui est la différentielle de l'attraction du secteur BAM sur A suivant AB: son intégrale est $\frac{2m^3}{l^3}\left(n\alpha - \frac{n^2 l}{m^2}\right)(\Phi + \frac{1}{2}\sin 2\Phi)$, comptée depuis AB. En faisant donc $\Phi = 90° = \frac{1}{2}\pi$, et multipliant par 2, on aura l'attraction totale qu'éprouve un point A dans l'équateur vers le centre du sphéroïde,

$$A = \frac{2m^3\pi}{l^3}\left(n\alpha - \frac{n^2 l}{m^2}\right) = \frac{2m^3\pi}{l^3}\left(CD - \frac{n^2}{m^2}CF\right) \text{ (Fig. 34.)}.$$

Si l'on substitue $\alpha = \frac{l}{n} - \frac{l^3}{3n^3} + \frac{l^5}{5n^5}$ — cet. on aura en série

$$A = 2\pi m\left(1 - \frac{m^2}{3n^2} + \frac{m^2 l^2}{5n^4} - \frac{m^2 l^4}{7n^6} + \text{cet.}\right).$$

§. 135. Les valeurs précédentes de A et P donnent la pesanteur sous l'équateur et le pole, qui résulte de l'attraction du sphéroïde, et qui aurait lieu, si la terre ne tournait pas sur elle-même; je l'appellerai la pesanteur *absolue*, et la pesanteur *relative* celle qui a été diminuée par la rotation. Soient donc A, M, P, la pesanteur absolue, A′, M′, P′, la pesanteur relative, aux points A, M, P (*Fig.* 32.), $CA = m$, $CP = n$, $CM = r$, et $\gamma = 15''$ la vitesse de rotation: cela posé on a $P' = P$, et le rapport des axes, dû à l'équilibre, est (§. 125.)

$$(1) \ldots\ldots m : n :: P : A'.$$

Il reste donc à déterminer A′, ou la diminution que A éprouve par la rotation, c'est-à-dire la force centrifuge dans l'équateur. Si l'on nomme M la pesanteur du point M, sa force centrifuge, ou la pression que M éprouve par la rotation suivant LM, est $F = \frac{\gamma^2}{2g}M \cdot LM$ (§. 69.), et l'accélération de cette force, $f = \frac{F}{M}g = \frac{1}{2}\gamma^2 LM$. Dans l'équateur on a $LM = CA = m$, $M = A$; ainsi f se change en $e = \frac{1}{2}\gamma^2 m$, et F en $E = \frac{\gamma^2 m}{2g}A$. Puisque E est opposé à A, on a $A' = A - E = \frac{2g - \gamma^2 m}{2g}A$. Si l'on fait, comme ci-dessus (§. 59.), $\frac{m}{g} = 1307915$ et $\gamma = 15'' = 0,000072722$, on trouvera $\frac{E}{A} = \frac{\gamma^2}{2}\cdot\frac{m}{g} = \frac{1}{289}$, donc $A' = A - E = \frac{288}{289}A$, et $m : n :: 289P : 288A$. Mais pour

avoir une valeur exacte de $\frac{E}{A} = c$, il faut égaler g à l'espace que les corps parcourraient sous l'équateur en une seconde, si la terre ne tournait pas sur elle-même; cet espace ne peut pas être observé immédiatement.

Nommons cet espace G, et G' l'espace observé qui est l'accélération de la pesanteur relative sous l'équateur; désignons par g, g', les mêmes espaces relativement à un lieu M, dont la latitude soit β. Les forces étant comme leurs accélérations, on a $E = \frac{e}{G} A$, $F = \frac{f}{g} M$. Or e étant opposé à G, on a $G' = G - e$, donc $E = \frac{e \cdot A}{G' + e}$, et en substituant $e = \frac{1}{2} \gamma^2 m$, $E = \frac{A \gamma^2 m}{2 G' + \gamma^2 m}$, d'où il vient $A' = A - E = \frac{2 A G'}{2 G' + \gamma^2 m}$. Comme les observations se font ordinairement d'après le tems solaire, il faut égaler le tems d'une rotation de la terre à 23 h. 56 m. 4 s. = 86164 s. $= t$, ce qui donne $\gamma = \frac{2\pi}{t}$.

La longueur du pendule à secondes donne le seul moyen pour déterminer exactement G ou g. Si cette longueur a été trouvée par observation, en $A = a$, en $M = b$, on a $G' = \frac{\pi^2}{2} a$, $g' = \frac{\pi^2}{2} b$; d'où l'on tire $\frac{E}{A}$ ou $c = \frac{\gamma^2 m}{2 G' + \gamma^2 m} = \frac{4 m}{a t^2 + 4 m}$. Or $A' = A - E = A(1 - c) = \frac{A \cdot a t^2}{a t^2 + 4 m}$: partant $\frac{E}{A'} = \frac{E (a t^2 + 4 m)}{A \cdot a t^2} = \frac{4 m}{a t^2}$. Si l'on fait

$$\frac{4 m}{a t^2} = q, \quad \text{on a } \frac{E}{A'} = q, \quad \text{et } A = A'(1 + q).$$

§. 136. Suivant les observations de Bouguer [1], le demi-diamètre de l'équateur est $m = 3281012$ toises, et la longueur du pendule à secondes sous l'équateur, $a = 439,21$ lignes ou $\frac{43921}{86400}$ toises, d'où l'on tire [2] $G = 2174,95$ lignes $= \frac{217495}{86400}$ toises, donc

$$\frac{G}{m} = \frac{1}{1303384}, \quad \text{et } q = 0,0034775 = \frac{1}{287,6}.$$

Bouguer trouve, par la longueur du pendule à Paris $= 440,57$ lignes, $q = \frac{1}{287,9}$. Je supposerai $q = \frac{1}{288}$, ce qui est sous l'équateur le rapport de la force centrifuge à la pesanteur actuelle ou relative, d'où il suit que la force centrifuge est $\frac{1}{289}$ de la pesanteur absolue. Si l'on substitue maintenant $A' = \frac{A}{1 + q}$ dans l'équation (1) (§. 135.), il viendra

(1) *Fig. de la Terre, Sect. VI.* §. 40. *Sect. VII.* §. 22.
(2) *l. c. Sect. VII.* §. 25.

$$(2)\ldots\ldots \frac{m}{n} = (1+q)\frac{P}{A}.$$

Pour exprimer $\frac{P}{A}$ d'une manière plus commode pour le calcul, faisons

$$m = n\ (1+\omega),$$

l'*aplatissement* étant ω, et par conséquent un nombre très-petit dont nous négligerons les puissances plus élevées que la seconde. En faisant encore $\frac{l}{n} = \lambda$, on aura $\alpha = \text{Arc tang}\ \lambda$, et $\lambda^2 = \frac{m^2}{n^2} - 1 = \omega\ (2+\omega)$. Cela donnera (§. 131. 134.)

$$P = \frac{4\pi n(1+\omega)^2}{\lambda^2}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}\right),\ A = \frac{2\pi n(1+\omega)^2}{\lambda^2}\left(\alpha - \frac{\lambda}{(1+\omega)^2}\right),\ \frac{P}{A} = \frac{2(1+\omega)(\lambda-\alpha)}{\alpha(1+\omega)^2-\lambda};$$

ce qui étant substitué dans l'équation (2), donnera

$$1 = \frac{2(1+q)(\lambda-\alpha)}{\alpha(1+\omega)^2-\lambda},\ \text{d'où l'on tirera}\ \alpha = \frac{(3+2q)\lambda}{(1+\omega)^2+2(1+q)},\ \text{ou}$$

$$(3)\ldots\ldots \text{Arc tang}\ \lambda = \frac{(3+2q)\lambda}{\lambda^2+3+2q} = \alpha.$$

Si l'on fait $\alpha = \frac{L}{9+3\lambda^2}$, on trouvera $L = \frac{3\lambda(3+2q)(3+\lambda^2)}{3+2q+\lambda^2}$, ce qui donnera, en divisant, et négligeant les quantités de l'ordre $q^2\lambda^2$, $L = 9\lambda + 2q\lambda^3$, partant

$$(4)\ldots\ldots \text{Arc tang}\ \lambda = \frac{(9+2q\lambda^2)\lambda}{3(3+\lambda^2)},$$

ce qui est la formule de M. de Laplace (1). Si l'on développe Arc lang λ en série, on aura l'équation

$$(9+3\lambda^2)\left(\lambda - \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^5}{5} - \frac{\lambda^7}{7} + \text{cet.}\right) = 9\lambda + 2q\lambda^3,$$

et en divisant par $2\lambda^3$,

$$0 = q - \frac{2}{5}\lambda^2 + \frac{12}{35}\lambda^4,\ \text{ou}\ 0 = \lambda^4 - \frac{7}{6}\lambda^2 + \frac{35}{12}q,$$

dont les racines sont, $\lambda^2 = \frac{7}{12}\left\{1 \pm \sqrt{\left(1-\frac{60}{7}q\right)}\right\}$, où il faut prendre le signe $-$, parce que $\lambda < 1$. On a donc

$$\lambda^2 = \frac{7}{12}\left\{1 - \left(1 - \frac{30}{7}q - \frac{3600}{8.49}q^2 - \frac{216000}{16.343}q^3 - \frac{5.12960000}{128.2401}q^4 - \text{cet.}\right)\right\} =$$

$$q\,(2,5 + 5,357.q + 23.q^2 + 123.q^3 + \text{cet.}).$$

En substituant $q = \frac{1}{288}$, il viendra $\lambda^2 = 0,008746123$; donc $1 + \lambda^2 =$

---

(1) *Mécan. cel. Tome II. pag.* 52.

$(1+\omega)^2 = 1{,}00874612 3$, ce qui donnera $1+\omega = 1{,}0043635$, et $\omega = 0{,}0043635 = \frac{1}{229{,}174}$. Suivant M. de Laplace on a $q = 0{,}00344957$; ce qui donne $\omega = 0{,}00433492 = \frac{1}{230{,}685}$. Ainsi les deux axes de l'ellipsoïde terrestre m, n, sont, suivant la théorie, dans le rapport de 230,2 à 229,2 ou de 231,7 à 230,7; le premier rapport est celui de Newton.

L'équation (4), qui répond à l'équilibre, donne plusieurs valeurs de λ, dont nous avons trouvé la plus petite. Pour le prouver, faisons Ang tang $\lambda = \alpha$, $\frac{\lambda + \frac{2}{9} q \lambda^3}{1 + \frac{1}{3}\lambda^2} = a$, et $a - \alpha = \Phi$, les racines de l'équation $\Phi = 0$ donnant le cas de l'équilibre. La première racine est $\lambda = 0$, qui donne $a = 0$, $\alpha = 0$, et $\Phi = 0$, mais qui ne peut pas exister dans la nature. Si λ est très-petit, a devient $= \lambda$, donc $a > \alpha$, et Φ positif. Si α est $= 45° = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$, λ est égal à l'unité, et l'on trouvera $a = \frac{3}{4} \cdot 1{,}00076 = 0{,}75\ldots$, donc $a < \alpha$, et la valeur de Φ est négative. L'équation $\Phi = 0$ a donc une racine entre $\alpha = 0$ et $\alpha = 45°$, qui est celle que nous avons trouvée, et qui donne $\alpha = 5°20'34''$. Si l'on fait $\alpha = 90°$, λ est $= \infty$, ce qui donne une valeur positive de Φ: d'où il suit que l'équation $\Phi = 0$ a une autre racine entre $\alpha = 45°$ et $\alpha = 90°$. On trouvera $\Phi = 0$, si l'on fait $\alpha = 89°54'56'',9$. ou $\lambda = 680{,}5$. Pour voir, s'il y a encore d'autres racines, il faut se rappeler qu'il y a nécessairement un *maximum* entre deux racines. Or on trouvera le *maximum* de Φ, en faisant $\frac{\partial a}{\partial \lambda} - \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = 0$, ce qui donne $0 = \lambda^4 - \left(\frac{6}{q} - 10\right)\lambda^2 + 9$, dont les racines sont $\lambda^2 = \frac{3}{q} - 5 \pm \sqrt{\left(\frac{9}{q^2} - \frac{30}{q} + 16\right)}$, ou $\lambda^2 = 0{,}0052$ et $\lambda^2 = 1729{,}3424$; et comme nous ne considérons ici que les valeurs positives de λ, $\lambda = 0{,}072111$ et $\lambda = 41{,}58537$, ou $\alpha = 4°7'28'',3$ et $\alpha = 88°37'21''$. Il suit de là, que Φ n'a que deux *maxima*, et par conséquent trois racines seulement, $\lambda = 0$, $\lambda = 0{,}09352$, et $\lambda = 680{,}5$, qui donnent $\alpha = 0$, $\alpha = 5°20'34'$, et $\alpha = 89°54'57''$: les *maxima*, pour lesquels nous avons trouvé $\alpha = 4°7'28''$ et $\alpha = 88°37'21''$, tombent entre ces trois valeurs. Il n'y a donc que deux figures de l'ellipsoïde, avec lesquelles l'équilibre puisse subsister, et qui sont déterminées par le rapport des axes,

$$m : n :: 230 : 229, \text{ et } m : n :: 680{,}5 : 1;$$

la première figure est à très-peu près celle qui existe dans la nature.

§. 137. La longueur du pendule à secondes a été employée (§. 135.) seulement, pour déterminer la pesanteur G et g; mais cette longueur, ayant été mesurée avec la plus grande précision, peut aussi servir à déterminer immédiatement la loi, suivant laquelle la pesanteur, et par conséquent la figure de la terre, varie depuis l'équateur jusqu'au pole. L'équation (§. 128.) $\frac{M'-A'}{A'} = \frac{1^2 \sin^2 \beta}{2 m^2}$ donne à peu près $\frac{M'-A'}{A'} = \frac{\omega \sin^2 \beta}{1+2\omega}$. Puisque la longueur du pendule est proportionnelle à la pesanteur, on aura, en nommant L, λ, λ', les longueurs du pendule à secondes, sous l'équateur, et sous les latitudes β, β',

$$A' : M' :: L : \lambda, \quad \text{donc } \frac{M'-A'}{A'} = \frac{\lambda - L}{L} = \frac{\omega \sin^2 \beta}{1+2\omega}, \quad \frac{\lambda' - L}{L} = \frac{\omega \sin^2 \beta'}{1+2\omega};$$

d'où l'on tirera $\lambda - L : \lambda' - L :: \sin^2 \beta : \sin^2 \beta'$, et $L = \frac{\lambda \sin^2 \beta' - \lambda' \sin^2 \beta}{\sin^2 \beta' - \sin^2 \beta}$, donc $\frac{\lambda - L}{L} = \frac{(\lambda - \lambda) \sin^2 \beta}{\lambda \sin^2 \beta' - \lambda' \sin^2 \beta} = \frac{\omega \sin^2 \beta}{1+2\omega}$, d'où il résulte

$$\omega = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda' \sin^2 \beta - \lambda \sin^2 \beta' - 2(\lambda - \lambda')} = \frac{2(\lambda - \lambda')}{\lambda \cos 2\beta' - \lambda' \cos 2\beta - 5(\lambda - \lambda')}.$$

Si L est donné par une mesure exacte, on a $\lambda' = L$, $\beta' = 0$, partant

$$\omega = \frac{\lambda - L}{L \sin^2 \beta - 2(\lambda - L)} = \frac{2(\lambda - L)}{L(1 - \cos 2\beta) - 4(\lambda - L)}.$$

Les observations, faites par Bouguer à Paris et à Panama, donnent $\beta = 48° 50'$, $\beta' = 8° 35'$, $\lambda = 440,58$, $\lambda' = 439,2$; donc $\omega = \frac{1}{171}$ et $m:n :: 172:171$. Suivant les observations de Graham et de Condamine, on a $\beta = 51° 31'$, $\beta' = 1° 28'$, $\lambda = 440,64$, $\lambda' = 439,225$; partant $\omega = \frac{1}{187}$ et $m:n :: 188:187$. La longueur du pendule sous l'équateur même, et à Paris, $L = 439,21$ et $\lambda = 440,57$, donne $\omega = \frac{1}{181}$ et $m:n :: 182:181$.

Il résulte donc des mesures du pendule, un aplatissement considérablement plus grand que celui que donne la théorie, et presque le même que celui qu'on a conclu des mesures des degrés, $\frac{178}{179}$ (I. §. 215.). Il paraît donc résulter des observations immédiates, des degrés et de la longueur du pendule, que la terre est plus aplatie, qu'elle ne devrait l'être d'après l'hypothèse, qu'elle ait été primitivement une sphère homogène. Il y a cependant d'autres mesures qui donnent un aplatissement moins grand (I. §. 192.), de sorte qu'il paraît que la nature ne s'écarte pas beaucoup de cette hypothèse, et qu'on ne commettra pas une erreur considérable, en suivant la théorie précédente.

§. 138. On peut se servir de la même méthode, pour déterminer la figure des corps célestes dont on connaît la masse et la rotation. Si l'on nomme r le demi-diamètre d'une planète, t la durée d'une rotation de la planète sur elle-même, γ la vitesse de cette rotation, G, e, l'accélération de la pesanteur A, et de la force centrifuge E, sous l'équateur, on aura (§. 135.)

$$\frac{E}{A} = \frac{e}{G} = \frac{\gamma^2 r}{2G} = \frac{2\pi^2 r}{G t^2} = q;$$

où il faut exprimer t en secondes, et r, G, par une même unité: en tirant donc $\frac{G}{g}$ de la première table (§. 65.), et faisant $g = \frac{1}{1300000}$ (§. 59.), r sera le demi-diamètre de la planète, divisé par le rayon de la terre, qu'on trouve dans la table (II. §. 153.); après quoi on aura (§. 136.)

$1 + \omega = \sqrt{(1 + 2,5.q + 5,357.q^2 + \text{cet.})}$, donc $\omega = \frac{5}{4} q (1 + \frac{3}{2} q)$ à peu près.

Relativement à Jupiter, on a $r = 10,8616$; $t = 35733''$ (II. §. 166.), $G = 2,8183.g = \frac{2,8183}{1300000}$; d'où il vient $q = \frac{\pi^2.21,7232.1300000}{2,8183.35733^2} = 0,07745$; et $\omega = 0,108$; donc $m:n :: 1,108 : 1 :: 11 : 10$.

On trouvera de la même manière, pour les autres planètes, ce qui suit.

	r	t	1300000 . G	q	ω	$m:n$
♄	9,9831	36960	1,0073	0,186173	0,248	5 : 4
♃	10,8616	35733	2,8183	0,07745	0,108	11 : 10
♂	0,5233	88762	0,4965	0,003433	0,0043	233 : 232
♀	0,9593	84059	1,0492	0,00332	0,0042	239 : 238
☿	0,3837	86731	0,9913	0,001331	0,0017	589 : 588
☉	111,7442	2161020	28,4133	0,0000216	0,00003	$\frac{33334}{33333}$
☾	0,27293	2360591	0,1721	0,0000073	0,00001	$\frac{100001}{100000}$

On peut se servir d'une approximation fort simple, en regardant les planètes comme des corps semblables, ensorte que, si la densité est la même, la pesanteur g sera comme les diamètres (§. 123.). Or, g étant aussi proportionnelle à la masse de la planète, ou à la densité, si les diamètres sont égaux; il s'en suit, que la pesanteur est comme le produit du diamètre par la densité.

Si l'on prend pour unité le rayon et la densité de la terre, on aura $G = g r \delta$, δ étant la densité de la planète, d'où il vient $q = \frac{2\pi^2}{g \delta t^2}$, et $\omega = \frac{5\pi^2}{2 g \delta t^2}$. En nommant $\zeta = \frac{1}{230}$ l'aplatissement de la terre, Δ sa densité, T la durée de sa rotation, on aura

$$\text{l'aplatissement de la planète, } \omega = \frac{\Delta}{\delta} \cdot \frac{T^2}{t^2} \cdot \zeta.$$

Si l'on fait par ex. suivant Newton, relativement à Jupiter $\frac{\delta}{\Delta} = \frac{945}{4000}$, on trouvera comme ci-dessus, $m : n :: 10,4 : 9.4$ ([1]).

En renversant cette méthode, on trouvera la rotation t d'une planète, dont l'aplatissement ω est donné par les observations, $t = T \sqrt{\frac{\Delta \zeta}{\delta \omega}}$. Relativement à Saturne on a $\frac{\delta}{\Delta} = 0,1$ (§. 65.): en faisant donc $m : n :: 11 : 10$ (II. §. 167.), ou 13 : 10, on trouvera $t = 15$ h. 46 m. 56 s. Suivant les observations de Bugge, $\frac{1}{\omega}$ est $= 2$, d'où cet astronome conclut $t = 6$ h. 9 m. Le milieu est 10 h. 58 m. à peu près comme M. Herschel l'a trouvé par ses observations.

§. 129. La solution du problème de la figure de la terre, que nous avons donnée par une méthode synthétique, pourrait suffire au but de cet ouvrage. Je tâcherai cependant, autant que les bornes que je me suis prescrites le permettent, d'exposer la méthode analytique, par laquelle les grands géomètres du tems présent ont donné de ce fameux problème, une solution qui ne laisse rien à désirer. C'est à M. de Laplace qu'on doit les recherches les plus générales sur la figure, avec laquelle l'équilibre peut subsister ([2]); je me bornerai à prouver que l'équilibre a lieu dans le sphéroïde elliptique, et à déterminer le rapport des diamètres, la pesanteur aux divers points de la terre, etc. Ces recherches seront fondées sur les deux suppositions suivantes: que le solide est parfaitement homogène, de manière que sa densité soit partout égale à l'unité; qu'il a été dans un état fluide, pour pouvoir prendre la figure due à l'équilibre. Tous les corps célestes que nous connaissons, ont une figure qui s'écarte insensiblement de la sphère, ce qui facilite beaucoup la solution; ils tournent sur eux-mêmes, et ils sont

(1) *Phil. Nat. Princ. Math. Lib. III. Prop. XIX.*
(2) *Mécan. cél. Liv. I. Chap. VIII. Liv. III.*

exposés aux actions des autres corps. Il en résulte, en vertu de la pesanteur universelle, trois espèces de forces qui sollicitent chaque molécule du solide: 1) les forces centrifuges, dues à la rotation, 2) l'attraction mutuelle de tous les élémens du solide, 3) l'attraction d'un corps étranger. Nous désignerons par S' le point du solide M dont on considère le mouvement de rotation, par ∂M un élément quelconque qui l'attire, par S le corps étranger qui agit sur S', par x', y', z', X, Y, Z, x, y, z, les coordonnées rectangles qui se rapportent à S', à ∂M, et à S; nous prendrons pour leur origine le centre de gravité du solide M, et nous supposerons les abscisses x', X, x, parallèles à l'axe de rotation, ensorte que l'équateur soit le plan des ordonnées y', z', Y, Z, y, z. Le solide M étant, par hypothèse, un ellipsoïde, dont l'équateur et tous les parallèles sont des ellipses semblables, tandis que chaque méridien est une ellipse dont l'excentricité dépend du point où il coupe l'équateur; nous aurons à déterminer trois axes, celui de rotation $= 2a$, le grand et le petit axe de l'équateur, $2b$ et $2c$, a, b, c, étant les axes des x, y, z. Cela posé soit (*Fig.* 37.) C le centre, P le pole du solide M, AB l'équateur, EX, ex, deux parallèles consécutifs, $CP = a$, $CB = b$, $CA = c$, et faisons

$$(a) \ldots\ldots \begin{cases} \frac{a}{b} = \beta, \ \frac{a}{c} = \gamma, \ \frac{1}{\beta^2} - 1 = \alpha, \ \frac{1}{\gamma^2} - 1 = \alpha', \text{ donc} \\ \beta^2 = \frac{1}{1+\alpha}, \ \gamma^2 = \frac{1}{1+\alpha'}, \ b = a\sqrt{(1+\alpha)}, \ c = a\sqrt{(1+\alpha')}. \end{cases}$$

D'un point quelconque X sur la surface de l'ellipsoïde abaissons la perpendiculaire XY sur le plan des y', z', et soit YZ perpendiculaire à CA, donc

$$CZ = z' = DV, \quad ZY = y = VX, \quad YX = x' = ZV = EF.$$

On aura dans l'ellipse du parallèle EX,

$$VX^2 = y^2 = \frac{b^2}{c^2}(DE^2 - z'^2) = \frac{1+\alpha}{1+\alpha'}(CF^2 - z'^2),$$

et dans l'ellipse du méridien AE,

$$FE^2 = x'^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - CF^2) = a^2 - \frac{CF^2}{1+\alpha'}.$$

La comparaison de ces deux équations donnera

$$CF^2 = \frac{(1+\alpha')y'^2 + (1+\alpha)z'^2}{1+\alpha} = (1+\alpha')(a^2 - x'^2),$$

d'où l'on tirera l'équation de la surface de l'ellipsoïde,

$$(1) \ldots\ldots 0 = x'^2 + \frac{y'^2}{1+\alpha} + \frac{z'^2}{1+\alpha'} - a^2.$$

L'aire de l'ellipse EX étant $\frac{\pi b}{c} DE^2 = \pi (a^2 - x'^2) \sqrt{(1+\alpha)(1+\alpha')}$, la solidité du segment Eε sera $\pi (a^2 - x'^2) \partial x' . \sqrt{(1+\alpha)(1+\alpha')}$. Si l'on fait pour abréger,

$$(b) \ldots\ldots \sqrt{(1+\alpha)(1+\alpha')} = \delta,$$

l'intégrale de Eε donnera le segment $A\varepsilon = \pi \delta x' \left(a^2 - \frac{x'^2}{3}\right)$, ce qui deviendra la moitié de l'ellipsoïde, si l'on fait $x' = a$: on aura donc la masse de l'ellipsoïde entier

$$(2) \ldots\ldots M = \frac{4}{3} \pi \delta a^3.$$

§. 140. La force centrifuge de S', due à la rotation, est $\frac{\gamma^2 r}{2g}$ (§. 69.). Comme dans toutes les formules précédentes on a pris pour unité la pesanteur sur la terre et son demi-diamètre, g est environ $\frac{1}{300000}$ (§. 59.); ainsi

$$(c) \ldots\ldots f = \frac{\gamma^2}{2g} = \frac{2\pi^2}{g\,t^2} \quad (\text{§. } 135.)$$

est la force centrifuge à la distance $= 1$, et sa direction est perpendiculaire à l'axe des x'. En décomposant donc la force centrifuge suivant $+x'$, $+y'$, $+z'$, et nommant ces forces A', B', C', on aura

$$\text{I.} \quad A' = 0, \quad B' = fy', \quad C' = fz'.$$

§. 141. Soit (*Fig.* 18.) A le point S', z un élément quelconque ∂M qui l'attire, leur distance $Az = R'$; soient AB, AC, AD, parallèles aux coordonnées x', y', z', zX' perpendiculaire au plan BAC des x', y', X'U perpendiculaire à AB: cela posé on aura

$$AU = X - x', \quad UX' = Y - y', \quad X'z = Z - z'.$$

Appelons η l'angle que la prolongation de Az fait en z avec une ligne parallèle à AU, et θ l'angle formé par Uz et UX', ensorte que

$$\eta = UAz, \quad \theta = X'Uz, \quad Uz = R' \sin\eta, \quad AU = R' \cos\eta.$$

On aura donc

$$(3) \ldots\ldots X - x' = R' \cos\eta, \; Y - y' = R' \sin\eta \cos\theta, \; Z - z' = R' \sin\eta \sin\theta.$$

Maintenant on peut regarder ∂M comme un parallélepipède dont les trois côtés sont l'accroissement de Az, et deux petits arcs, décrits avec les rayons Az et Uz dans les plans UAz et X'Uz: ces trois côtés sont $\partial R'$, $R' \partial \eta$, et $R' \sin\eta . \partial\theta$, d'où il vient

$$\partial M = R'^2 \partial R' . \partial \theta . \partial \eta \sin \eta, \text{ et } \frac{\partial M}{R'^2} = \partial R' . \partial \theta . \partial \eta \sin \eta,$$

ce qui est l'attraction suivant Az qui, étant décomposée suivant $+x'$, $+y'$, $+z'$, donnera les forces $\frac{X-x'}{R'} \cdot \frac{\partial M}{R'^2}$, $\frac{Y-y'}{R'} \cdot \frac{\partial M}{R'^2}$, $\frac{Z-z'}{R'} \cdot \frac{\partial M}{R'^2}$. Si l'on nomme A'', B'', C'', les attractions que le point S' éprouve par l'action de l'élément ∂M suivant $+x'$, $+y'$, $+z'$, on aura, en substituant les valeurs (3), et prenant $\partial R'$ négativement, parce que les élémens se rapprochent par l'attraction,

$$(4) \ldots \begin{cases} A'' = -\partial R' . \partial \theta . \partial \eta \sin \eta \cos \eta, \ B'' = -\partial R' . \partial \theta \cos \theta . \partial \eta \sin^2 \eta, \\ C'' = -\partial R' . \partial \theta \sin \theta . \partial \eta \sin^2 \eta. \end{cases}$$

Pour trouver l'attraction que la masse entière M exerce sur le point S', il faut intégrer A'', B'', C'', trois fois par rapport à R', θ, η, et étendre les intégrales au solide entier. La première intégrale sera prise entre les deux points opposés où la prolongation de $Az = R'$ coupe la surface, c'est-à-dire depuis $R' = +R$, jusqu'à $R' = -R_{\prime\prime}$, $R_{\prime}$ étant la portion de la corde de l'ellipsoïde par A, z, qui s'étend de A par z jusqu'à la surface, et $R_{\prime\prime}$ le reste de cette corde, ensorte que $R_{\prime} + R_{\prime\prime}$ soit la corde entière. En nommant donc ρ la distance du point S' au milieu de cette corde, et σ la moitié de la corde, on aura $R_{\prime} = \sigma + \rho$, $R_{\prime\prime} = \sigma - \rho$. Ainsi la première intégration donnera

$$(5) \ldots \begin{cases} \Sigma A' = -\Sigma (R_{\prime} + R_{\prime\prime}) \partial \theta . \partial \eta \sin \eta \cos \eta, \ \Sigma B' = -\Sigma (R_{\prime} + R_{\prime\prime}) \partial \theta \cos \theta . \partial \eta \sin^2 \eta, \\ \Sigma C' = -\Sigma (R_{\prime} + R_{\prime\prime}) \partial \theta \sin \theta . \partial \eta \sin^2 \eta. \end{cases}$$

$R_{\prime}$ et $R_{\prime\prime}$ sont les rayons, menés du point S' à deux points opposés de la surface de l'ellipsoïde: on aura donc pour chacun de ces points ∂M, (1) (§. 139) $0 = X^2 + \frac{Y^2}{1+\alpha} + \frac{Z^2}{1+\alpha'} - a^2$. En substituant au lieu de X, Y, Z, leurs valeurs (3), et faisant pour abréger,

$$(d) \ldots \begin{cases} \cos^2 \eta + \frac{\sin^2 \eta \cos^2 \theta}{1+\alpha} + \frac{\sin^2 \eta \sin^2 \theta}{1+\alpha'} = \Delta, \\ x' \cos \eta + \frac{y' \sin \eta \cos \theta}{1+\alpha} + \frac{z' \sin \eta \sin \theta}{1+\alpha'} = \Lambda, \ a^2 - x'^2 - \frac{y'^2}{1+\alpha} - \frac{z'^2}{1+\alpha'} = \Pi, \end{cases}$$

la dernière équation deviendra $0 = \Delta R'^2 - 2\Lambda R' - \Pi$, d'où l'on conclura la somme des deux racines, $R_{\prime} + R_{\prime\prime} = \frac{2\Lambda}{\Delta}$. Si l'on substitue cette valeur dans les équations (5), il viendra

$$(6)\ldots\ldots \begin{cases} \Sigma A'' = -2\Sigma \frac{A}{\Delta}\, \partial\theta\,.\,\partial\eta \sin\eta\cos\eta, \\ \Sigma B'' = -2\Sigma \frac{A}{\Delta}\, \partial\theta\cos\theta\,.\,\partial\eta\sin^2\eta,\ \ \Sigma C'' = -2\Sigma \frac{A}{\Delta}\, \partial\theta\sin\theta\,.\,\partial\eta\sin^2\eta. \end{cases}$$

Ces intégrales s'étendent des deux côtés de S′ jusqu'à la surface, ensorte que, pour chaque valeur de R′, ou de θ et η, elles répondent en même tems aux angles $\pi+\theta$ et $\pi+\eta$: elles doivent donc être intégrées encore par rapport à θ et η, depuis o jusqu'à π, pour s'étendre au solide entier. Si l'on désigne par Φ chaque fonction rationnelle de $\sin\eta$, $\cos^2\eta$, $\sin\theta$, $\cos^2\theta$, on trouvera

$$\Sigma A'' = -2\Sigma\partial\theta\partial\eta\,(x'\,.\,\Phi + y'\cos\eta\cos\theta\,.\,\Phi + z'\cos\eta\,.\,\Phi),$$
$$\Sigma B'' = -2\Sigma\partial\theta\partial\eta\,(x'\cos\eta\cos\theta\,.\,\Phi + y'\,.\,\Phi + z'\cos\theta\,.\,\Phi),$$
$$\Sigma C'' = -2\Sigma\partial\theta\partial\eta\,(x'\cos\eta\,.\,\Phi + y'\cos\theta\,.\,\Phi + z'\,.\,\Phi).$$

Or comme les intégrales doivent être prises depuis o jusqu'à π, il est aisé de voir, que $\Sigma\partial\eta\cos\eta\,.\,\Phi$ et $\Sigma\partial\theta\cos\theta\,.\,\Phi$ seront nuls. En effet, on peut envisager ces intégrales comme s'étendant des deux côtés de l'angle droit par le premier et le second *quadrans* jusqu'à o et π, de sorte que chaque angle $90°-\psi$ a son angle correspondant $90°+\psi$. Or $\sin(90°+\psi)=\sin(90°-\psi)$, et $\cos(90°+\psi) = -\cos(90°-\psi)$, $\cos^2(90°+\psi) = \cos^2(90°-\psi)$: Φ a donc la même valeur pour $90°\pm\psi$, mais la valeur de $\Sigma\partial\eta\cos\eta\,.\,\Phi$ ou de $\Sigma\partial\theta\cos\theta\,.\,\Phi$, qui répond à l'angle $90°-\psi$, est égale et opposée à celle qui répond à l'angle $90°+\psi$; d'où il suit que toutes les intégrales de cette forme se détruisent réciproquement. Cela posé on aura

$$\Sigma A'' = -2\Sigma\,.\,x'\,\partial\theta\partial\eta\,.\,\Phi,\ \ \Sigma B'' = -2\Sigma\,.\,y'\,\partial\theta\partial\eta\,.\,\Phi,\ \ \Sigma C'' = -2\Sigma\,.\,z'\,\partial\theta\partial\eta.$$

Comme ces intégrales se rapportent seulement à ∂M, ou aux coordonnées X, Y, Z, on peut faire sortir x', y', z', hors de la caractéristique Σ, ce qui donnera, en vertu des équations (6) et (*d*),

$$(7)\ldots\ldots \begin{cases} \Sigma A'' = -2x'.\Sigma\frac{\partial\theta\,.\,\partial\eta\sin\eta\cos^2\eta}{\Delta},\ \ \Sigma B'' = -\frac{2y'}{1+\alpha}.\Sigma\frac{\partial\theta\cos^2\theta.\partial\eta\sin^3\eta}{\Delta}, \\ \Sigma C'' = -\frac{2z'}{1+\alpha'}\,.\,\Sigma\,\frac{\partial\theta\sin^2\theta\,.\,\partial\eta\sin^3\eta}{\Delta}. \end{cases}$$

Les équations précédentes nous apprennent une vérité importante. Comme A″, B″, C″, sont indépendans des axes de l'ellipsoïde, *a*, *b*, *c*, et ne renferment que leur rapport, α et α', il en suit, qu'on peut augmenter à volonté

le sphéroïde, sans altérer l'attraction sur un point intérieur S', pourvu que α et α' ne soient pas changés, ou ce qui revient au même, la grandeur de la portion extérieure du sphéroïde n'a aucune influence sur l'attraction, de sorte que chaque point S' n'est attiré que par le sphéroïde intérieur; ainsi qu'on l'a vu plus haut (§. 124).

§. 142. Pour intégrer les formules (7), faisons

$$(c)\ldots\ldots\begin{cases}\cos^2\eta+\dfrac{\sin^2\eta}{2}\left(\dfrac{1}{1+\alpha}+\dfrac{1}{1+\alpha'}\right)\ \text{ou}\ \cos^2\eta+\dfrac{\sin^2\eta}{\delta^2}\left(1+\dfrac{\alpha+\alpha'}{2}\right)=m,\\ \dfrac{\alpha'-\alpha}{2\,\delta^2}\sin^2\eta=n,\end{cases}$$

m et n étant des fonctions de η, qui par conséquent seront regardées comme constantes dans l'intégration par rapport à θ, et $\delta^2=(1+\alpha)(1+\alpha')$. On aura (d)

$$\Delta=\cos^2\eta+\sin^2\eta\left(\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\alpha'}\right)-\frac{\sin^2\eta}{2}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{1+\alpha}+\frac{1+\cos 2\theta}{1+\alpha'}\right)=m+n\cos 2\theta,$$

d'où il vient

$$\Sigma\frac{\partial\theta}{\Delta}=\frac{1}{2\sqrt{(m^2-n^2)}}\ \text{Arc cos}\ \frac{m\cos 2\theta+n}{m+n\cos 2\theta}.$$

L'arc précédent deviendra Arc cos $1=0$, si $\theta=0$, et Arc cos $(-1)=\pi$, si $\theta=90°$: il sera donc 2π, si $\theta=180°$; d'ou l'on conclura, depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=180°$,

$$\Sigma\frac{\partial\theta}{\Delta}=\frac{\pi}{\sqrt{(m^2-n^2)}}.\quad\text{Or}$$

$$(m+n)(m-n)=\left(\cos^2\eta+\frac{1+\alpha'}{\delta^2}\sin^2\eta\right)\left(\cos^2\eta+\frac{1+\alpha}{\delta^2}\sin^2\eta\right)=$$
$$\frac{(1+\alpha')(1+\alpha\cos^2\eta)(1+\alpha)(1+\alpha'\cos^2\eta)}{\delta^4},$$

$$\text{donc}\ \Sigma\frac{\partial\theta}{\Delta}=\frac{\pi\,\delta}{\sqrt{(1+\alpha\cos^2\eta)(1+\alpha'\cos^2\eta)}},$$

ce qui donne

$$(7)\ldots\ldots\Sigma A''=-2\pi\delta x'.\Sigma\frac{\partial\eta\sin\eta\cos^2\eta}{\sqrt{(1+\alpha\cos^2\eta)(1+\alpha'\cos^2\eta)}}$$

depuis $\eta=0$ jusqu'à $\eta=\pi$. Si l'on fait

$(f)\ldots\ldots\cos\eta=\xi$, on aura depuis $\xi=+1$ jusqu'à $\xi=-1$,

$$(8)\ldots\ldots\Sigma A''=2\pi\delta x'.\Sigma\frac{\xi^2\partial\xi}{\sqrt{(1+\alpha\xi^2)(1+\alpha'\xi^2)}}.$$

Il est visible que A'' se convertira en B'', si l'on substituera l'axe des y' à celui des x': alors x' se changera en y', a en b, β en $\frac{1}{\beta}$, γ en $\frac{b}{c}=\frac{\gamma}{\beta}$, α

en $\beta^2 - 1 = -\frac{\alpha}{1+\alpha}$, α' en $\frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1 = \frac{\alpha' - \alpha}{1+\alpha}$, δ en $\frac{\sqrt{(1+\alpha')}}{1+\alpha}$; cela fait, on changera B″ en C″ par la permutation de y', z', et de α, α'. Faisons donc

$$(g) \ldots\ldots \Sigma \frac{\xi^2 \partial \xi}{\sqrt{(1+\alpha\xi^2)(1+\alpha'\xi^2)}} = \text{F},$$

et désignons par F′, F″, ce que devient F par les permutations précédentes qui changent A″ en B′, et B″ en C″: cela posé les équations (7) (8) donneront

$$(9) \ldots\ldots \Sigma \text{A}'' = 2\pi\delta x' \text{F}, \quad \Sigma \text{B}'' = \frac{2\pi y' \sqrt{(1+\alpha')}}{1+\alpha} \text{F}', \quad \Sigma \text{C}'' = \frac{2\pi z' \sqrt{(1+\alpha)}}{1+\alpha'} \text{F}''.$$

Les permutations précédentes donneront

$$\text{F}' = \Sigma \frac{\xi^2 \partial \xi}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha\xi^2}{1+\alpha}\right)\left(1 + \frac{\alpha' - \alpha}{1+\alpha}\xi^2\right)}} = (1+\alpha)\Sigma \frac{\xi^2 \partial \xi}{\sqrt{(1+\alpha-\alpha\xi^2)(1+\alpha+(\alpha'-\alpha)\xi^2)}}.$$

Faisons $\xi = \frac{\psi\sqrt{(1+\alpha)}}{\sqrt{(1+\alpha\psi^2)}}$; d'où il vient $\partial\xi = \frac{\partial\psi\sqrt{(1+\alpha)}}{(1+\alpha\psi^2)^{\frac{3}{2}}}$, $1+\alpha-\alpha\xi^2 = \frac{1+\alpha}{1+\alpha\psi^2}$, $1+\alpha+(\alpha'-\alpha)\xi^2 = (1+\alpha)\frac{1+\alpha'\psi^2}{1+\alpha\psi^2}$, partant

$$\text{F}' = (1+\alpha)^{\frac{3}{2}} \Sigma \frac{\psi^2 \partial \psi}{(1+\alpha\psi^2)^{\frac{3}{2}}(1+\alpha'\psi^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Mais l'équation $\xi = \frac{\psi\sqrt{(1+\alpha)}}{\sqrt{(1+\alpha\psi^2)}}$ fait voir, que ξ et ψ deviennent en même tems $+1$ ou -1, d'où il suit que l'intégrale F′ doit être prise depuis $\psi = +1$ jusqu'à $\psi = -1$, et que par conséquent on peut mettre ξ à la place de ψ, d'où il vient

$$\text{F}' = (1+\alpha)^{\frac{3}{2}} \Sigma \frac{\xi^2 \partial \xi}{(1+\alpha\xi^2)^{\frac{3}{2}}(1+\alpha'\xi^2)^{\frac{1}{2}}}.$$ Si l'on fait

$(h) \ldots\ldots \alpha = \lambda^2$, $\alpha' = \lambda'^2$, l'équation (g) deviendra

$$\text{F} = \Sigma \frac{\xi^2 \partial \xi}{\sqrt{(1+\lambda^2\xi^2)(1+\lambda'^2\xi^2)}},$$ ce qui donne

$$\left(\frac{\partial . \text{F}\lambda}{\partial\lambda}\right) = \Sigma \frac{\xi^2 \partial \xi}{\sqrt{(1+\lambda'^2\xi^2)}} \left\{ \frac{\partial . \frac{\lambda}{\sqrt{(1+\lambda^2\xi^2)}}}{\partial\lambda} \right\} = \Sigma \frac{\xi^2 \partial \xi}{(1+\lambda^2\xi^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2\xi^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{F}'}{(1+\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

En substituant cette valeur dans la seconde des équations (9), et observant que B″ se change en C″, si l'on met z' au lieu de y', et λ' au lieu de λ, on aura les équations suivantes:

$$\text{II.} \quad \Sigma \text{A} = 2\pi\delta x' \text{F}, \quad \Sigma \text{B}'' = 2\pi\delta y' \left(\frac{\partial . \text{F}\lambda}{\partial\lambda}\right), \quad \Sigma \text{C}'' = 2\pi\delta z' \left(\frac{\partial . \text{F}\lambda'}{\partial\lambda'}\right).$$

§. 143. Si la planète M est un solide de révolution autour de l'axe $CP = a$, toutes les ellipses, parallèles à l'équateur, se changeront en cercles, et l'on aura

$$b = c,\ \alpha = \alpha',\ \delta = 1 + \alpha,\ F = \Sigma \frac{\xi^2 \partial \xi}{1 + \lambda^2 \xi^2} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\xi - \frac{1}{\lambda} \text{ Arc tang. } \lambda \xi\right),$$

donc depuis $\xi = 1$ jusqu'à $\xi = -1$,

$F = -\frac{2}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda} \text{Arc tang.} \lambda\right)$, et $\Sigma A'' = -\frac{4\pi(1+\lambda^2)x'}{\lambda^3}(\lambda - \text{Arc tang.} \lambda)$ (II). Pour déterminer B″ et C″, reprenons les équations (7). Dans le cas présent on a (d) (§. 141.) $\Delta = \frac{1 + \lambda^2 \cos^2 \eta}{1 + \lambda^2}$, d'où il vient $\Sigma B'' = -2y'. \Sigma \partial \theta \cos^2 \theta \frac{\partial \eta \sin^3 \eta}{1 + \lambda^2 \cos^2 \eta}$. Mais $\Sigma \partial \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta = {}^1 \pi$, donc $\Sigma B'' = \pi y . \Sigma \frac{\partial \xi (1 - \xi^2)}{1 + \lambda^2 \xi^2} = \frac{\pi y'}{\lambda^2} \left\{\frac{1+\lambda^2}{\lambda} \text{Arc tang. } \lambda \xi - \xi\right) = -\frac{2\pi y'}{\lambda^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda} \text{Arc tang. } \lambda - 1\right)$, et $\Sigma C'' = -\frac{2\pi z'}{\lambda^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda} \text{Arc tg. } \lambda - 1\right)$. La pesanteur *absolue* (§ 135) vers le centre, et décomposée suivant x', y', z', est égale à $-\Sigma A''$, $-\Sigma B''$, $-\Sigma C''$; ainsi les équations précédentes nous apprennent que, dans chaque rayon du sphéroïde, la pesanteur est comme la distance au centre, x', y', z', (Voy. §. 124.). A la surface du sphéroïde on a $x' = a$, $y' = z' = b = a \sqrt{(1 + \lambda^2)}$: ainsi la pesanteur est au pole $= \frac{4\pi a(1+\lambda^2)}{\lambda^3}(\lambda - \text{Arc tg. } \lambda)$, et sous l'équateur $= \frac{2\pi a(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda^3}\left(\text{Arc tg. } \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)$, ce qui est parfaitement d'accord avec les formules que nous avons trouvées par la première méthode (§. 131. 134.), dans lesquelles m, n, l, sont les quantités que nous avons désignées ici par $b = a\sqrt{(1 + \lambda^2)}$, a, et $\sqrt{(b^2 - a^2)} = \lambda a$.

Si le solide est une sphère, on a (a) (§. 139.) $\beta = \gamma = 1$, $\lambda = 0$, $\Delta = 1$, ce qui change les équations (7) en

$$\Sigma A'' = -2\pi x' . \Sigma \partial \eta \sin \eta \cos^2 \eta = 2\pi x' . \Sigma \xi^2 \partial \xi = \tfrac{2}{3} \pi x' \xi^3 = -\tfrac{4}{3}\pi x',$$
$$\Sigma B'' = -2y'. \Sigma \partial \theta \cos^2 \theta . \partial \eta \sin^3 \eta = \pi y'. \Sigma \partial \xi (1 - \xi^2) = \pi y' \xi (1 - \tfrac{1}{3}\xi^2) = -\tfrac{4}{3}\pi y',$$
$$\Sigma C'' = -\tfrac{4}{3}\pi z'.$$

La pesanteur à la surface est donc $\frac{4}{3}\pi a$. Or la masse de la sphère étant $M = \frac{4}{3}\pi a^3$, la pesanteur est partout $\frac{M}{a^2}$, comme si la masse entière était réunie au centre.

§. 144. Désignons par S la masse d'un corps étranger, par x, y, z, ses coordonnées, par R, R′, sa distance au centre de gravité M, et à un

élément quelconque S', sur lequel il agit, et dont la distance au même centre est r': cela posé, les forces accélératrices que S exercera sur S' suivant $+x$, $+y$, $+z$, seront

$$A''' = \frac{S(x-x')}{R'^3},\ B''' = \frac{S(y-y')}{R'^3},\ C''' = \frac{S(z-z')}{R'^3},$$ et l'on a

$$R' = \{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{1}{2}} = \{R^2-2(xx'+yy'+zz')+r'^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque les quantités, marquées d'un trait, sont très-petites par rapport à celles sans trait, on aura à très-peu près

$$\frac{1}{R'^3} = \frac{1}{R^3}\left(1+\frac{3(xx'+yy'+zz')}{R^2}\right).$$

Comme nous ne considérons ici que le mouvement de l'élément S' relativement au centre de gravité M, il faut retrancher des forces précédentes, celles que le centre de gravité éprouve suivant les mêmes directions, et qui sont $\frac{Sx}{R^3}$, $\frac{Sy}{R^3}$, $\frac{Sz}{R^3}$. En faisant donc

$$(i)\ldots\ldots \frac{S}{R^3} = T, \text{ on aura}$$

$$\text{III. } A''' = T\left\{\frac{3x(xx'+yy'+zz')}{R^2}-x'\right\},\ B''' = T\left\{\frac{3y(xx'+yy'+zz')}{R^2}-y'\right\},$$

$$C''' = T\left\{\frac{3z(xx'+yy'+zz')}{R^2}-z'\right\}.$$

§. 145. Si on rassemble toutes les forces I, II, III (§. 140. 142. 144.), qui sollicitent l'élément S' suivant $+x'$, $+y'$, $+z'$, on aura, en faisant $xx'+yy'+zz' = u$,

$$\text{IV. } A = 2\pi\delta x'F + T\left(\frac{3xu}{R'^2}-x'\right),\ B = (f-T)y' + 2\pi\delta y'\left(\frac{\partial.F\lambda}{\partial\lambda}\right) + \frac{3S}{R^5}yu,$$

$$C = (f-T)z' + 2\pi\delta z'\left(\frac{\partial.F\lambda'}{\partial\lambda'}\right) + \frac{3S}{R^5}zu.$$

Nommons p la pression hydrostatique que l'élément S' éprouve par le fluide qui l'environne, et envisageons S' comme un parallélepipède dont les trois côtés sont $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$, ensorte que $S' = \partial x'\partial y'\partial z'$. La pression hydrostatique étant perpendiculaire et proportionnelle à chaque face de l'élément, le côté de S' le plus proche du centre de gravité, qui est perpendiculaire à x' et égal à $\partial y'\partial z'$, éprouvera la pression $p\partial y'\partial z'$ suivant $+x'$, et le côté opposé éprouvera la pression $p'\partial y'\partial z'$ suivant $-x'$, p' étant ce que devient p, si x' croît de $\partial x'$, ou $p' = p + \left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)\partial x'$. La différence

entre ces deux pressions donne la pression suivant $-x' = \left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right) \partial x' \partial y' \partial z = \left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)$ S'; d'où résulteront les forces accélératrices, $\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)$, $\left(\frac{\partial p}{\partial y'}\right)$, $\left(\frac{\partial p}{\partial z'}\right)$, suivant $-x'$, $-y'$, $-z'$. Dans le cas de l'équilibre ces forces doivent être égales aux forces A, B, C, suivant $+x'$, $+y'$, $+z'$, ce qui donne les équations suivantes,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right) = \text{A}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y'}\right) = \text{B}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial z'}\right) = \text{C}.$$

Si on les multiplie respectivement par $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$, et qu'on les ajoute ensemble, en observant que p est fonction de x', y', z', et par conséquent $\partial p = \left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right) \partial x' + \left(\frac{\partial p}{\partial y'}\right) \partial y' + \left(\frac{\partial p}{\partial z'}\right) \partial z$, on aura l'équation $\partial p = \text{A} \partial x' + \text{B} \partial y' + \text{C} \partial z'$. Relativement à un point dans la surface du sphéroïde, la pression p doit être nulle: ainsi on aura $0 = \text{A} \partial x' + \text{B} \partial y' + \text{C} \partial z'$, et en substituant les valeurs IV,

$$(10)\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} 0 &= x' \partial x' \left\{ 2\pi\delta \text{F} + \text{T} \left(\frac{3x^2}{\text{R}^3} - 1\right) \right\} \\ &+ y' \partial y' \left\{ f - \text{T} + 2\pi\delta \left(\frac{\partial . \text{F}\lambda}{\partial \lambda}\right) + \frac{3\text{S}}{\text{R}^4} y^2 \right\} \\ &+ z' \partial z' \left\{ f - \text{T} + 2\pi\delta \left(\frac{\partial . \text{F}\lambda'}{\partial \lambda'}\right) + \frac{3\text{S}}{\text{R}^4} z^2 \right\} + \text{cet.} \end{aligned} \right.$$

les termes suivans n'ayant point le facteur $x' \partial x'$, $y' \partial y'$, ou $z' \partial z'$. Or le point S' étant supposé à la surface du sphéroïde, il est assujéti à l'équation (1) (§. 139.), dont la différentielle est

$$(11)\ldots\ldots 0 = x' \partial x' + \frac{y' \partial y'}{1+\lambda^2} + \frac{z' \partial z'}{1+\lambda'^2}.$$

Si on fait pour abréger

$$(k)\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} & 2\pi\delta \text{F} = + \text{T} \left(\frac{3x^2}{\text{R}^3} - 1\right) = \text{L}, \ f - \text{T} + 2\pi\delta \left(\frac{\partial . \text{F}\lambda}{\partial \lambda}\right) + \frac{3\text{S}}{\text{R}^4} y^2 = \text{M}, \\ & f - \text{T} + 2\pi\delta \left(\frac{\partial . \text{F}\lambda'}{\partial \lambda'}\right) + \frac{3\text{S}}{\text{R}^4} z^2 = \text{N}, \end{aligned} \right.$$

l'équation (10) deviendra

$$0 = x' \partial x' + \frac{\text{M}}{\text{L}} y' \partial y + \frac{\text{N}}{\text{L}} z' \partial z + \text{cet.}$$

ce qui étant comparé avec l'équation (11), donnera, en égalant séparément les coefficiens de $y' \partial y'$ et de $z' \partial z'$, les deux équations suivantes,

$$(12)\ldots\ldots \text{L} = (1 + \lambda^2)\,\text{M}, \quad \text{L} = (1 + \lambda'^2)\,\text{N}.$$

§. 146. Si on veut appliquer les formules précédentes à la Lune, S est la masse de la terre, R la distance de la lune à la terre, et cette ligne ne s'écarte pas sensiblement de l'équateur lunaire, ou du plan des y, z, parce que l'équateur de la lune coïncide à très-peu près avec son orbite. En prenant donc pour l'axe des y le rayon de la lune, qui est dirigé vers la terre, on aura $y = R$, et $x = z = o$, ce qui change L, M, N (k) (§. 145.), en

$$L = 2\pi\delta F - T,\ M = f + 2T + 2\pi\delta\left(\frac{\partial . F\lambda}{\partial\lambda}\right),\ N = f - T + 2\pi\delta\left(\frac{\partial . F\lambda'}{\partial\lambda'}\right).$$

Puisque la rotation de la lune a la même période que sa révolution autour de la terre, les forces centrifuges, dues à ces deux mouvemens, seront égales à la même distance R: donc, la première étant fR, et la dernière $\frac{S}{R^2}$, on aura

$$f = \frac{S}{R^3} = T\ (i).$$ La substitution de cette valeur donnera

$$L = 2\pi\delta F - T,\ M = 3T + 2\pi\delta\left(\frac{\partial . F\lambda}{\partial\lambda}\right),\ N = 2\pi\delta\left(\frac{\partial . F\lambda'}{\partial\lambda'}\right);$$

ainsi les équations (12) prendront la forme

$$(13) \ldots\ldots 2\pi\delta F = 2\pi\delta(1+\lambda^2)\left(\frac{\partial . F\lambda}{\partial\lambda}\right) + (4+3\lambda^2)T,$$

$$(14) \ldots\ldots 2\pi\delta F = 2\pi\delta(1+\lambda'^2)\left(\frac{\partial . F\lambda'}{\partial\lambda'}\right) + T.$$

L'intégration des fonctions F, $\left(\frac{\partial . F\lambda}{\partial\lambda}\right)$, $\left(\frac{\partial . F\lambda'}{\partial\lambda'}\right)$, est singulièrement facilitée par la considération que l'aplatissement de la lune est si petit, qu'on peut négliger les produits de α et α'. Cela posé on aura (§. 142. (g))

$$F = \Sigma\xi^2\partial\xi\left(1 - \frac{\alpha+\alpha'}{2}\xi^2\right) = \frac{\xi^3}{3} - \frac{\alpha+\alpha'}{10}\xi^5 = -\frac{2}{3} + \frac{\lambda^2+\lambda'^2}{5};$$ d'où l'on tirera

$$\left(\frac{\partial . F\lambda}{\partial\lambda}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{3\lambda^2+\lambda'^2}{5},\ \text{et}\ \left(\frac{\partial . F\lambda'}{\partial\lambda'}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{\lambda^2+3\lambda'^2}{5}.$$

Si on substitue cela dans les équations (13) (14), elles deviendront

$$2\pi\delta\left(\frac{\lambda^2+\lambda'^2}{5} - \frac{2}{3}\right) = 2\pi\delta\left(\frac{\lambda'^2}{5} - \frac{\lambda^2}{15} - \frac{2}{3}\right) + (4+3\lambda^2)T,\ \text{et}$$

$$2\pi\delta\left(\frac{\lambda^2+\lambda'^2}{5} - \frac{2}{3}\right) = 2\pi\delta\left(\frac{\lambda^2}{5} - \frac{\lambda'^2}{15} - \frac{2}{3}\right) + T,\ \text{ou}$$

$$8\pi\delta\lambda^2 = (60+45\lambda^2)T,\ \text{et}\ 8\pi\delta\lambda'^2 = 15T.$$

Puisque δ est multiplié par λ^2 ou λ'^2, et que les puissances plus élevées de λ et λ' sont négligées ici, il faut faire $\delta = 1$ (b) (§. 139.), d'où il viendra

$$\lambda^2 = \frac{60\,T}{8\pi - 45\,T}, \qquad \lambda'^2 = \frac{15\,T}{8\pi}.$$

Si on substitue la masse de la lune, $M = \frac{4}{3}\pi\delta a^3$ (§. 139. (2)), $T = \frac{S}{R^3}$ (§. 144. (i)), et qu'on fasse pour abréger,

$$\frac{S}{M} = m, \qquad \frac{R}{a} = n, \text{ il viendra}$$

$$\lambda^2 = \frac{20\,m}{2\,n^3 - 15\,m}, \qquad \lambda'^2 = \frac{5\,m}{2\,n^3}.$$

Or on a $n = \frac{60}{0,27293}$ (II. §. 214. 215.), $m = 78$ (§. 63.), partant $2n^3 = 21248583$; d'où l'on tirera

$$\lambda^2 = \alpha = \frac{1560}{21247413} = 0,0000734167,$$

$$\lambda'^2 = \alpha' = \frac{\alpha}{4} = 0,0000183542.$$

Maintenant il faut se rappeler que (§. 139. (a)) $\alpha = \frac{b^2 - a^2}{a^2}$, $\alpha' = \frac{c^2 - a^2}{a^2}$, d'où il vient $\alpha - \alpha' = \frac{3}{4}\alpha = \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{(b+c)(b-c)}{a^2}$, ou à très-peu près $\frac{3}{8}\alpha = \frac{b-c}{a}$, partant

$$\frac{b-c}{a} = \frac{15}{4}\cdot\frac{m}{n^3} = \frac{15}{4}\cdot\frac{S}{M}\cdot\frac{a^3}{R^3} = 0,0000275312;$$

ce qui est l'aplatissement de l'équateur lunaire. On a de plus $\alpha = \frac{(b+a)(b-a)}{a^2}$, donc à très-peu près

$$\frac{b-a}{a} = \frac{\alpha}{2} = 0,0000367083 \text{ et } \frac{c-a}{a} = \frac{\alpha'}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{b-a}{2} = 0,000009177;$$

ce qui est l'aplatissement de l'axe de la lune, relativement au diamètre de l'équateur, qui est dirigé vers la terre, et à celui qui passe par les bords du disque lunaire (Voy. §. 113.); le premier est quatre fois plus grand que le dernier. Il en résulte que l'aplatissement de l'équateur lunaire est trois quarts de celui de l'axe relativement au plus grand diamètre de l'équateur, et trois fois plus grand que l'aplatissement de l'axe par rapport au plus petit diamètre. L'analyse précédente suppose, que la lune a été une masse fluide et homogène au commencement de sa consolidation ou crystallisation; mais on a vu dans le *Chap. V*, que suivant les observations, la lune est beaucoup plus aplatie que suivant cette hypothèse.

§. 147. La figure de la terre dépend de sa rotation seule, parce que la masse de la lune est trop faible, pour alonger le sphéroïde terrestre d'une

manière sensible. Il faut donc faire $T = 0$ dans les formules précédentes, et supposer que la terre est un sphéroïde de révolution; ce qui donne $\alpha = \alpha'$, $\delta = 1 + \alpha = 1 + \lambda^2$ (§. 143.), et (§. 146.)

$$L = 2\pi(1+\lambda^2)F,\ M = f + 2\pi(1+\lambda^2)\left(\frac{\partial . F\lambda}{\partial \lambda}\right),\ N = f + 2\pi(1+\lambda^2)\left(\frac{\partial . F\lambda}{\partial \lambda}\right) = M.$$

Ainsi les équations (12) donnent $2\pi F = f + 2\pi(1+\lambda^2)\left(\frac{\partial . F\lambda}{\partial \lambda}\right)$, ou en faisant

$$(l) \ldots\ldots f = \tfrac{4}{3}\pi e,$$

$$(15) \ldots\ldots F = \tfrac{2}{3}e + (1+\lambda^2)\left(\frac{\partial . F\lambda}{\partial \lambda}\right).$$

Maintenant il faut se rappeler (§. 142. (g)), que F est une fonction de λ et de λ', d'où il suit $\partial F = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)\partial\lambda + \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda'}\right)\partial\lambda'$, et dans le cas présent où λ' est égal à λ, $\partial F = 2\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)\partial\lambda$. En désignant par G ce que devient F, si $\lambda' = \lambda$, on aura relativement à la terre, $\partial F = \left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)\partial\lambda = 2\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)\partial\lambda$, ou $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)\partial\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)\partial\lambda$. Or $\left(\frac{\partial . F\lambda}{\partial \lambda}\right) = F + \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)$; d'où il résulte pour le cas que nous considérons,

$$\left(\frac{\partial . F\lambda}{\partial \lambda}\right) = G + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right) = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial . G\lambda^2}{\partial \lambda}\right).$$

Nous avons déjà trouvé (§. 143.) $G = -\frac{2}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\text{ Arc tg. }\lambda\right)$, d'où l'on tire

$$\left(\frac{\partial . G\lambda^2}{\partial \lambda}\right) = \frac{2\lambda - 2(1+\lambda^2)\text{ Arc tg. }\lambda}{\lambda^2(1+\lambda^2)},\ \text{ et }\ \left(\frac{\partial . F\lambda}{\partial \lambda}\right) = \frac{\lambda - (1+\lambda^2)\text{ Arc tg. }\lambda}{\lambda^3(1+\lambda^2)},$$

ce qui étant substitué dans l'équation (15), donnera

$$0 = \tfrac{2}{3}\lambda^3 e + 3\lambda - (3+\lambda^2)\text{ Arc tang. }\lambda,\ \text{ d'où il suit}$$

$$(16) \ldots\ldots \text{Arc tang. }\lambda = \frac{9\lambda + 2e\lambda^3}{9 + 3\lambda^2},$$

la même équation que nous avons trouvée par la méthode précédente (§. 136. (4)), q étant ce que nous avons désigné ici par e. Il s'en suit (§. 136.)

$$(17) \ldots\ldots e = \frac{2}{5}\lambda^2 - \frac{12}{35}\lambda^4 = \frac{2}{5}\alpha - \frac{12}{35}\alpha^2.$$

§. 148. Les forces A, B, C (§. 145. IV.), qui sollicitent chaque élément suivant $+x'$, $+y'$, $+z'$, étant prises négativement, donnent la pesanteur de cet élément suivant $-x'$, $-y'$, $-z'$. On aura donc, en faisant $T = 0$, la pesanteur, altérée par la rotation, suivant $-x'$, $-y'$, $-z'$,

$$-A = -2\pi(1+\lambda^2)x'F, \quad -B = -fy' - 2\pi(1+\lambda^2)y'\left(\frac{\partial.F\lambda}{\partial\lambda}\right),$$
$$-C = -fz' - 2\pi(1+\lambda^2)z'\left(\frac{\partial.F\lambda}{\partial\lambda}\right).$$

Ces forces étant multipliées respectivement par les coordonnées, suivant lesquelles elles agissent, leur résultante vers le centre sera aussi proportionnelle à la distance du centre: d'où il suit que, dans chaque rayon du sphéroïde, la pesanteur, altérée par les forces centrifuges, est également proportionnelle à la distance du centre; ainsi qu'on l'a vu précédemment (§. 124.). Pour déterminer la pesanteur au pole et dans l'équateur, on fera $x' = a$, $y' = z' = b = a\sqrt{(1+\lambda^2)}$, ce qui donne la pesanteur

$$\text{au pole } P = -2\pi(1+\alpha)aF, \text{ et}$$
$$\text{dans l'équateur, } Q = -a\sqrt{(1+\alpha)}.\left\{f + 2\pi(1+\alpha)\left(\frac{\partial.F\lambda}{\partial\lambda}\right)\right\}.$$

Dans un autre point quelconque M (*Fig.* 32.) la pesanteur p a la direction de la normale ME. En nommant donc $ME = u$, la pesanteur suivant PC ou $MK = x'$, sera $\frac{px'}{u}$; mais elle est aussi $= -A$, donc $p = -2\pi(1+\alpha)u.F$. On a

$$u = \frac{KE}{\cos\beta'} = \frac{x'\partial x'}{\partial y'\cos\beta'}, \ \beta' \text{ étant la hauteur du pole du lieu M,}$$
$$x'^2 = \frac{b^2 - y'^2}{1+\alpha}, \text{ partant } \frac{x'\partial x'}{\partial y'} = -\frac{y'}{1+\alpha}, \text{ et } u = \frac{y'}{(1+\alpha)\cos\beta'}.$$

En substituant $x' = KE \tang\beta' = \frac{y'\operatorname{tg}\beta'}{1+\alpha}$, on aura

$$x'^2 = \frac{y'^2\operatorname{tg}^2\beta'}{(1+\alpha)^2} = \frac{b^2 - y'^2}{1+\alpha}, \text{ d'où il vient } y'^2 = \frac{(1+\alpha)b^2}{1+\alpha+\operatorname{tg}^2\beta'}, \ y' = \frac{(1+\alpha)a}{\sqrt{(1+\alpha+\operatorname{tg}^2\beta')}}, \text{ et}$$
$$u = \frac{a}{\sqrt{(1+\alpha\cos^2\beta')}}. \quad \text{On a donc } p = -\frac{2\pi(1+\alpha)a}{\sqrt{(1+\alpha\cos^2\beta')}}F.$$

Si l'on substitue maintenant (§. 147.)

$$F \text{ ou } G = -\frac{2(\lambda - \text{Arc tg.}\lambda)}{\lambda^3}, \ \left(\frac{\partial.F\lambda}{\partial\lambda}\right) = \frac{\lambda - (1+\lambda^2)\text{Arc tg.}\lambda}{\lambda^2(1+\lambda^2)}, \text{ il viendra}$$
$$P = \frac{4\pi(1+\alpha)a}{\lambda^3}(\lambda - \text{Arc tg.}\lambda),$$
$$Q = a\sqrt{(1+\alpha)}.\left\{\frac{2\pi}{\lambda^3}[(1+\lambda^2)\text{Arc tg.}\lambda - \lambda] - f\right\},$$
$$p = \frac{4\pi(1+\alpha)a}{\lambda^3\sqrt{(1+\alpha\cos^2\beta')}}\{\lambda - \text{Arc tg.}\lambda\}.$$

Maintenant il faut se rappeler que p, étant donné par A, est la pesanteur

absolue, parce que la rotation n'a aucune influence sur A: la force centrifuge qui est suivant $CK = fy'$, diminuera donc la pesanteur p suivant EM de $fy' \cos \beta'$, d'où l'on conclura la pesanteur altérée par la rotation,

$$p' = p - fy' \cos \beta' = \frac{(1+\alpha)\, a}{\sqrt{(1+\alpha \cos^2 \beta')}} \left\{ \frac{4\pi}{\lambda^3} (\lambda - \text{Arc tg.}\, \lambda) - f \cos^2 \beta \right\}.$$

Si l'on nomme l la longueur du pendule à secondes sous la latitude β', l'espace que la pesanteur p y fait parcourir les corps graves en une seconde, sera $\frac{1}{2} \pi^2 l$ (§. 135.), et le même espace est pg: on aura donc

$$p = \frac{\pi^2 l}{2g} = \frac{4\pi (1+\alpha)\, a}{\lambda^3 \sqrt{(1+\alpha \cos^2 \beta')}} \{\lambda - \text{Arc tg.}\, \lambda\}.$$

Si l'on substitue (§. 147. (l)) $4\pi = \frac{3f}{e} = \frac{6\pi^2}{g e t^2}$ (§. 40. (c)), la dernière équation donnera

$$l e t^2 \lambda^3 \sqrt{(1 + \alpha \cos^2 \beta')} = 12 (1+\alpha)\, a\, (\lambda - \text{Arc tg.}\, \lambda),$$

d'où il viendra par l'équation (16) (§. 147.),

$$(18) \ldots\ldots l e t^2 (3+\alpha) \sqrt{(1 + \alpha \cos^2 \beta')} = 4 (1+\alpha)\, a\, (3 - 2e).$$

La différentielle de l'arc elliptique du méridien est

$$\partial s = Mm = \frac{M\mu}{\sin M m \mu} = -\frac{\partial y'}{\sin \beta'}, \text{ et l'équation}$$

$$y' = \frac{(1+\alpha)\, a}{\sqrt{(1+\alpha + \text{tg}^2 \beta')}} \text{ donne } \partial y' = -\frac{(1+\alpha)\, a\, \partial \beta' \sin \beta'}{(1+\alpha \cos^2 \beta')^{\frac{3}{2}}}, \text{ d'où il viendra}$$

$$\partial s = \frac{(1+\alpha)\, a\, \partial \beta'}{(1+\alpha \cos^2 \beta')^{\frac{3}{2}}}.$$

Or la longueur d'un degré du méridien est $s' = \frac{\partial s}{\partial \beta'} \cdot \frac{\pi}{180}$, d'où l'on tirera

$$s' = \frac{\pi (1+\alpha)\, a}{180 (1+\alpha \cos^2 \beta')^{\frac{3}{2}}} \text{ ou } (1+\alpha)\, a = \frac{180}{\pi} s' (1 + \alpha \cos^2 \beta')^{\frac{3}{2}}.$$

Si on substitue cela dans l'équation (18), elle deviendra

$$\pi l e t^2 (3+\alpha) = 720\, s' (3 - 2e) (1 + \alpha \cos^2 \beta'), \text{ d'où il viendra}$$

$$e = \frac{2160\, s' (1 + \alpha \cos^2 \beta')}{\pi l t^2 (3+\alpha) + 1440\, s' (1+\alpha \cos^2 \beta')}, \text{ et en substituant (17) (§. 147.),}$$

$$\frac{\alpha}{5} - \frac{6\alpha^2}{35} = \frac{1080\, s' (1 + \alpha \cos^2 \beta')}{\pi l t^2 (3+\alpha) + 1440\, s' (1+\alpha \cos^2 \beta')}.$$

Si on dispose cette équation suivant les puissances de α, elle deviendra

$$\left\{\frac{3}{5}\pi l t^2 + 72 (4 - 15 \cos^2 \beta') s' \right\} \alpha - \frac{\alpha^2}{7} \left\{\frac{11}{5}\pi l t^2 + 288 (6 - 7 \cos^2 \beta') s' \right\} = 1080\, s',$$

ou en faisant pour abréger, $\frac{120\, s'}{11 \pi l t^2} = n$,

$$o = 315\, n - 21 \left\{ \tfrac{1}{11} + (4 - 15 \cos^2 \beta')\, n \right\} \alpha + \left\{ 1 + 12\, (6 - 7 \cos^2 \beta')\, n \right\} \alpha^2.$$

Si on donne à cette équation la forme $o = \alpha^2 - A\alpha + B$, on aura

$$A = \frac{21 \left\{ \frac{1}{11} + (4 - 15 \cos^2 \beta)\, n \right\}}{1 + 12\, (6 - 7 \cos^2 \beta')\, n},$$

$$B = \frac{315\, n}{1 + 12\, (6 - 7 \cos^2 \beta')\, n},$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2} A - \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B\right)}.$$

En prenant pour base la mesure qui donne
$s' = 57074$ toises et $l = 440,67$ lignes $= 0,51$ toises sous la latitude $\beta' = 48° 50'$, la durée d'une rotation de la terre étant $t = 86164$ sec. (§. 135.), on trouvera
$n = 0,0000523431 6$, donc $A = 1,9027974$, $B = 0,0164574 23$, et
$\alpha = \lambda^2 = 0,0086888$; ce qui donne l'aplatissement de la terre

$$\frac{b - a}{a} = \sqrt{(1 + \lambda^2)} - 1 = 0,004335 = \frac{1}{230,6},$$

précisément comme par la méthode précédente (§. 136). Ce résultat dépend en même tems de la mesure des degrés et de la longueur du pendule.

LIVRE V.

DES PERTURBATIONS DES CORPS CÉLESTES.

CHAPITRE I.

Introduction.

§. 149. Les hypothèses doivent être fondées sur un certain nombre d'expériences ou de faits, qu'on peut regarder comme les donnécs d'un problème dont l'hypothèse donne la solution. Ainsi chaque hypothèse est juste, en tant qu'elle satisfait aux expériences, sur lesquelles elle est fondée; et elle ne peut induire en erreur, que dans le cas où elle est appliquée à d'autres expériences. Mais comme son utilité est proportionnelle au nombre des phénomènes qu'on peut expliquer ou calculer par son moyen, il est naturel de lui donner la plus grande étendue possible, en l'ajustant successivement à d'autres observations; et cette opération servira à déterminer le vrai sens d'une hypothèse, et à estimer sa valeur par le nombre plus ou moins grand des observations, auxquelles elle pourra être appliquée. Cette opération conduira souvent à des observations qui d'abord paraissent renverser entièrement l'hypothèse, parce qu'on ne l'avait pas comprise parfaitement, ou qu'on ne savait pas l'appliquer duement; mais les mêmes observations serviront à aprofondir le véritable esprit de l'hypothèse, et à apprendre la manière dont il faut l'ap-

pliquer. Il est arrivé plus d'une fois en astronomie, que les observations qui avaient d'abord fourni matière à des objections, se trouvèrent à la fin si conformes à l'hypothèse, qu'elles en donnèrent de nouvelles preuves. On se rapellera ici les phénomènes du mouvement de la terre.

Telle a été l'origine de la plupart des hypothèses astronomiques; et l'esprit humain n'aurait fait aucune découverte, s'il avait dû d'abord tenir compte de toutes les expériences, que l'hypothèse devait expliquer un jour. Il vient de là, que des découvertes et des hypothèses qui supportent les épreuves les plus rigoureuses, sont extrèmement rares, et qu'elles ne doivent leur existence qu'à l'esprit philosophique qui ne perd jamais de vue la grande et simple marche de la nature, sans se laisser égarer par les petites anomalies qui environnent l'objet principal comme un brouillard. Peut-être Newton n'eût jamais découvert la grande loi d'attraction, s'il eût d'abord cherché une hypothèse qui satisfît au détail le plus minutieux des observations, ou qu'il se fût proposé la solution du problème, renfermant les orbites compliquées des planètes, avec toutes leurs anomalies et perturbations. En faisant d'abord abstraction de ces anomalies, et ne considérant que le mouvement elliptique, il simplifia le problème; et la simplification ouvre la carrière des découvertes. Le mouvement elliptique des planètes le conduisit à la découverte de la force attractrice du soleil, les ellipses des satellites indiquèrent l'attraction des planètes; et la combinaison et l'application de toutes ces forces dans leur plus grande étendue, servirent à expliquer le déplacement et les perturbations des orbites de la lune et des planètes, ou leurs écarts de l'ellipse. C'est ainsi que les perturbations, et les écarts des lois de Kepler, qui semblaient être contraires à la loi d'*attraction du soleil,* fournirent la plus forte preuve de la *gravitation universelle.*

§. 150. On a vu dans le *Livre II,* que chaque planète décrirait autour du soleil, et chaque satellite autour de la planète principale, une ellipse suivant les lois de Kepler, s'il n'était sollicité que par des forces, dirigées vers son corps central, et réciproques au carré des distances. Mais dès que la planète éprouve d'autres forces, qui changent la direction ou la loi de la orce centrale, le mouvement elliptique doit nécessairement être dérangé: et

ces écarts des lois de Kepler, qui sont une suite nécessaire de l'attraction mutuelle des planètes, seront le sujet du *Livre* présent. Newton exposa les principes généraux de cette application de sa théorie, principalement à la lune; mais la solution du problème en détail, et le calcul complet des perturbations, ont été réservés à la dernière moitié du dix-huitième siècle. Les plus grands géomètres de cette époque sont parvenus, par l'analyse, à déterminer les perturbations mutuelles des corps du système solaire, avec une précision qui, à l'égard de la théorie, laisse peu à désirer. Les formules que l'analyse a fournies, sont composées de divers termes, proportionnels aux sinus de certains angles, ou à ces angles mêmes. Les termes de la première classe ont, suivant la nature des lignes trigonomètriques, des périodes, dans lesquelles ils parviennent à leur plus grande et plus petite valeur, et deviennent nuls, pour commencer dérechef à croître, sans cependant franchir une certaine limite, ensorte qu'ils ne peuvent jamais s'accumuler, et qu'au bout de milliers d'années ils ne seront pas plus considérables qu'aujourd'hui. Leur découverte supposant donc des observations très-exactes, elle ne pouvait être que l'ouvrage de l'astronomie moderne, à moins que ces irrégularités ne soient fort considérables, comme celles de la lune, qui étaient bien connues des anciens. Les autres termes, qui ne sont pas proportionnels aux sinus, mais aux arcs, ou au tems dans lequel ces arcs sont décrits, n'ont point de période, et s'accumulent sans cesse. Dans des observations, éloignées d'un petit nombre d'années, ces perturbations progressives se confondent avec celles qui sont périodiques, mais à la longue elles s'en détachent de plus en plus, et finissent par se distinguer tellement qu'il est impossible de prendre les unes pour les autres. A l'instar du moyen mouvement, elles seront déterminées par la comparaison d'observations fort éloignées, quoique moins exactes. Tel est particulierement le mouvement des apsides et des noeuds de toutes les planètes, qui monte à plus d'un degré en cent ans. Les observations de plusieurs siècles indiqueront donc, si le changement de la longitude des aphélies et des noeuds est conforme à la rétrogradation des points équinoxiaux, ou si les apsides et les noeuds ont un mouvement propre. Les observations suffiront donc, pour déterminer exactement ces perturbations progressives, et la

théorie n'a qu'à les expliquer; elles sont cependant d'un grand usage, même pour les perturbations périodiques, parce qu'étant faciles à observer, elles serviront à déterminer les coefficiens constans, les masses, etc.

Mais si les coefficiens sont donnés de cette manière par observation, la *forme* des équations qui renferment les perturbations périodiques, ne pourra être déterminée que par la théorie; et cette forme est, dans le cas même ou les coefficiens sont inconnus, très-importante pour la détermination *empirique* des perturbations. En nous faisant connaître les argumens dont elles dépendent, elle donne une règle, suivant laquelle les observations doivent être dirigées; elle nous apprend la période de chaque inégalité, et par conséquent l'époque et la situation, dans laquelle elle est la plus grande et la plus facile à observer; elle fournit le moyen de séparer une perturbation de l'autre, et de les déterminer séparément par observation.

§. 151. Les inégalités progressives, ou proportionnelles aux arcs et au tems, sont ordinairement si petites, qu'elles ne deviennent sensibles qu'au bout d'un ou de plusieurs siècles: d'où il vient qu'on indique leur valeur pour cent ans, et qu'on leur donne le nom d'*équations séculaires*. La position des noeuds et des apsides, l'excentricité et l'inclinaison, enfin tous les élémens à l'exception de la distance moyenne, ont des équations séculaires. Cette distauce même, le grand axe, ou ce qui revient au même, le moyen mouvement ou la durée d'une révolution, de la lune, paraît aussi être assujéti à des variations, proportionnelles au tems (II. §. 190.); et cette inégalité du moyen mouvement est ce que les astronomes appellent proprement l'*équation séculaire*. Le mouvement de la lune ne diffère pas de celui des planètes, et est soumis aux mêmes lois. Une équation séculaire de la lune prouverait donc l'existence d'une inégalité analogue des autres planètes, qui, en s'accumulant sans cesse, devrait être sensible depuis longtems, surtout dans les orbites de Jupiter et de Saturne, dont les actions mutuelles sont les plus considérables. En effet les observations ont paru indiquer une équation séculaire de ces deux planètes; mais comme le moyen mouvement de Saturne, qui par la comparaison des observations modernes avec les anciennes, paraissait se ralentir, semblait au contraire s'accélérer, par la comparaison

des observations modernes entre elles; il était évident, que cela ne pouvait pas dépendre d'une équation rigoureusement séculaire, mais d'une inégalité qui lui ressemblait dans l'espace de quelques siècles. Après avoir reconnu l'invariabilité du moyen mouvement des planètes, il fallait douter de l'équation séculaire de la lune, d'autant plus que les recherches des plus grands géomètres donnèrent le résultat, que la théorie de l'attraction n'admettait aucune inégalité du moyen mouvement. Cela fit soupçonner que ces inégalités de la lune, aussi bien que de Jupiter et de Saturne, n'étaient pas de véritables équations séculaires, mais des équations à longues périodes; et l'on verra par la suite, que cette conjecture a été pleinement confirmée par les découvertes de M. le Marquis de la Place.

§. 152. Une équation séculaire, ou l'accélération du moyen mouvement, et par conséquent la diminution de la durée des révolutions, ne peut être déterminée que par trois observations fort éloignées l'une de l'autre. Si l'on divise le nombre des cercles entiers, des degrés, etc. que la lune a parcourus d'une observation à l'autre, par le nombre des ans écoulés, on aura le moyen mouvement annuel pendant tout cet intervalle, si la lune a eu même situation dans les deux observations, ensorte que la différence entre le lieu moyen et le lieu vrai était la même, ou si l'on peut calculer cette différence par la théorie connue de la lune. Mais il faut une troisième observation intermédiaire, pour juger si le moyen mouvement a été invariable pendant tout ce tems. La comparaison de cette observation avec la première et avec la seconde donnera le moyen mouvement dans la première et la seconde portion de l'intervalle entier, d'où il est aisé de voir, si le moyen mouvement augmente ou diminue. Dans le premier cas il résulte une correction α du moyen mouvement A, à laquelle, vu qu'elle dépend nécessairement du tems t, on peut donner la forme, $\alpha = at + bt^2 + ct^3 +$ cet. Mais tous les termes de la forme at sont déjà renfermés dans le moyen mouvement, conclu des observations: on aura donc $A = at$, $\alpha = bt^2 + ct^3 +$ cet. et le moyen mouvement apparent $= A + \alpha$. On voit par là, que l'équation séculaire α, ou plutôt le plus considérable de ses termes, bt^2, est proportionnel au carré du tems, dont on se convaincra encore plus facilement de la manière suivan-

te. Quelle que soit la force inconnue qui produit l'accélération de la lune, elle doit être regardée comme constante, parce qu'autrement il ne pourrait pas en résulter une véritable équation séculaire. Elle communiquera donc à la lune, dans chaque instant ∂t, le même degré de vitesse ∂v, ensorte qu'on aura $\partial v = \gamma \partial t$, γ étant une constante quelconque. On tire de là $v = c + \gamma t$, c étant la vitesse moyenne au commencement de l'époque: en nommant donc s le moyen mouvement dans le tems t, on aura $\partial s = v \partial t = c \partial t + \gamma t \partial t$, et $s = ct + \frac{1}{2}\gamma t^2$, ct étant le mouvement uniforme ou moyen. Son accélération, ou l'*équation séculaire* $\frac{1}{2}\gamma t^2$ est donc *proportionnelle au carré du tems.*

§. 153. Soit $y = \frac{1}{2}\gamma$ l'équation séculaire pour les cent premiers ans après l'époque, et X le moyen mouvement de la lune entre deux observations, éloignées l'une de l'autre de n ans: cela posé, $\frac{X}{n}$ et $\frac{100\,X}{n} = x$ seront les moyens mouvemens, annuel et séculaire, y étant le nombre de secondes, dont le moyen mouvement de la lune est plus grand que x dans le siècle suivant, et moins grand dans le siècle précédent: ainsi dans le siècle suivant le moyen mouvement corrigé sera $x + y$, et dans m siècles $= mx + m^2 y$. En nommant donc C la longitude moyenne au commencement de l'époque, on aura pour m siècles *après* l'époque la longitude moyenne $= C + mx + m^2 y$, et pour m siècles *avant* l'époque $= C - mx$, sans l'équation séculaire. Puisque cette équation croît avec le tems, et par conséquent décroit pour des tems antérieurs, le moyen mouvement dans les m siècles précédens a été $mx - m^2 y$, d'où il vient la longitude moyenne, m cens ans avant l'époque $= C - (mx - m^2 y) = C - mx + m^2 y$, ensorte que l'équation séculaire $m^2 y$ est additive après et avant l'époque. On trouvera immédiatement le même résultat, en prenant m négativement, parce que $m^2 = (-m)^2$ est positif.

Maintenant, étant données par observation trois longitudes moyennes, dont la troisième est l'époque C, soient μ, ν, les nombres des siècles écoulés, et M, N, les moyens mouvemens, entre la première et la troisième observation, et entre la seconde et la troisième: cela posé il résultera deux valeurs du moyen mouvement séculaire, dont la différence dépend de l'équation séculaire, savoir $\frac{M}{\mu} = \alpha$, et $\frac{N}{\nu} = \alpha + \beta$. Ainsi la longitude moyenne a été lors de la première observation, $A = C - M = C - \mu\alpha$, et lors de la seconde,

$B = C - N = C - \nu\alpha - \nu\beta$. Mais on a aussi $A = C - \mu x + \mu^2 y$ et $B = C - \nu x + \nu^2 y$, d'où l'on tirera $\alpha = x - \mu y$ et $\alpha + \beta = x - \nu y$, partant

$$y = \frac{\beta}{\mu - \nu} \text{ et } x = \alpha + \frac{\mu\beta}{\mu - \nu}.$$

Les trois observations, au moyen desquelles on a déterminé l'équation séculaire de la lune, sont: I. une éclipse de lune, observée à Babylon 720 ans avant J. C., II. deux éclipses de soleil, observées par les Arabes en Egypte dans les ans 977 et 978 après J. C., III. les observations modernes, par ex. une éclipse lunaire, observée à Paris en 1717. Par la comparaison des observations I et III, et de II et III, Cassini et Lalande ont conclu $\alpha = 10^s\, 7^\circ\, 49'\, 52''$, $\alpha + \beta = 10^s\, 7^\circ\, 52'\, 28'',5$; donc $\beta = 2'\, 36'',5$. Si l'on prend pour époque l'an 1700, on a $\mu = \frac{1700 + 720}{100} = 24,2$; $\nu = \frac{1700 - 978}{100} = 7,2$; d'où il vient l'équation séculaire dans le 17. et 18. siècles, $y = \frac{2'36'',5}{17} = 9'',2$; et le moyen mouvement séculaire de la lune dans le 18. siècle, $x = \alpha + \mu y = 10^s\, 7^\circ\, 49'\, 52'' + 3'\, 42'',64 = 10^s\, 7^\circ\, 53'\, 35''$; ce qui sont les valeurs adoptées par Mayer. L'équation séculaire $y = 9''$ donne pour deux mille ans, $20.20.9' = 1^\circ$, ce qui répond à l'an 300 avant J. C. et à l'an 3700 après J. C. (Voy. II. §. 190.).

§. 154. Après s'être assuré que l'équation séculaire ne pouvait pas être l'effet de l'attraction mutuelle des corps célestes, on en chercha d'autres explications, et on pensa d'abord à la *résistance de l'éther*. Si les corps célestes se meuvent dans un milieu qu'on appelle l'*éther*, ils éprouveront une résistance d'autant plus forte, que leur mouvement est plus rapide. Cette résistance ralentira le mouvement suivant la tangente; son rapport au mouvement vers le centre diminuera, et la planète approchera du corps central. Son orbite étant ainsi rétrécie, la durée d'une révolution, qui dépend du grand axe de l'orbite suivant la troisième loi de Kepler, deviendra plus courte, d'où résultera une équation séculaire du moyen mouvement. Mais alors l'équation séculaire de tous les corps célestes devrait être positive, et celle des planètes serait plus grande que celle de la lune; ce qui est contraire à l'expérience (§. 151.). Les observations ayant prouvé, que le moyen mouvement des planètes n'est point altéré, Newton en conclut avec raison, que les planètes se meuvent dans un espace vide, ou dans un milieu dont la résistance est insensible.

Puisque le mouvement planétaire suivant les lois de Kepler suppose que les corps célestes sont des sphères homogènes, ce qui à la rigueur n'est pas le cas, il importait d'examiner, si l'*aplatissement* pouvait produire une équation proportionnelle au carré du tems. Les recherches des plus grands géomètres ont prouvé le contraire ([1]). M. de Laplace envissgea cet objet sous un nouveau point de vue ([2]); et quoique cette recherche ne soit plus d'aucun usage, depuis que le même savant a découvert, que les équations séculaires de la lune, de Jupiter et de Saturne, ne sont qu'apparentes, l'hypothèse sur laquelle elle se fonde, est si ingénieuse, qu'il ne sera pas inutile de l'exposer ici succinctement, d'autant plus que les observations pourront un jour nécessiter les astronomes à reprendre cette hypothèse. La théorie de Newton suppose, que la force centrale se répand dans un instant jusqu'aux corps les plus éloignés, ensorte quelle agisse sur les corps mus de même que sur ceux qui sont en repos; et il faut convenir que cette hypothèse, quelle que soit sa probabilité, n'est pas démontrée. Quand une force agit sur les corps les plus éloignés, ainsi que sur tous les corps intermédiaires (*actio in distans*), il est naturel de supposer, qu'elle emploie un certain tems, quelque petit qu'il soit, pour parcourir cet espace. Cela posé la planète sera animée dans chaque instant par une force qui, à l'instar de la lumière, quoique suivant la direction contraire, coule vers le soleil avec une rapidité immense; et la résistance de ce courant produira une perturbation du mouvement elliptique, semblable à l'aberration de la lumière. La planète frappant ce courant suivant la tangente de son orbite, avec sa propre vitesse, elle éprouvera, outre la pression vers le soleil, une autre impression, opposée à son mouvement; et ces deux impulsions seront entre elles, comme la vitesse de la force centrale ou du fluide gravifique est à celle de la planète.

§. 155. Soit (*Fig.* 38.) C le soleil, M une planète qui dans le tems ∂t parcourt l'arc $MN = \partial s$ ou la portion de la tangente MT, et qui rencontre le fluide gravifique qui coule suivant MC avec la vitesse θ; faisons

(1) Voy. *D'Alembert, Opusc. Math. Tom. V. VI.* et *Lagrange, Sur l'équ. séc. de la lune, dans les Mém. de Math. et de Phys. présentés à l'Ac. Roy. des Sc. Ann.* 1773.

(2) *Mém. de Math. et de Phys. etc. Ann.* 1776, *pag.* 173. *suiv.*

sur la prolongation de TM, $Mm = MT = \partial s$. Cela posé la planète sera animée par deux forces MC, Mm, qui seront entre elles comme les vitesses θ et $\frac{\partial s}{\partial t}$. Soit $m\mu$ un arc de cercle décrit du centre C, $ACM = \Phi$, $CM = r$, ensorte que $m\mu = r\partial\Phi$, $M\mu = \partial r$: la force MC étant $= \frac{C}{r^2}$, la résistance Mm sera $= \frac{C}{r^2}\frac{\partial s}{\theta\partial t}$. En décomposant cette dernière suivant MC et la direction perpendiculaire, on aura les forces $M\mu = \frac{C\partial r}{r^2\theta\partial t}$ et $\mu m = \frac{C\partial\Phi}{r\theta\partial t}$: d'où il viendra la force entière, dirigée vers le centre,

$$MC = \frac{C}{r^2}\left(1 + \frac{\partial r}{\theta\partial t}\right).$$

Ayant mené MP perpendiculaire à CA, Mn parallèle et égale à $m\mu$, $n\nu$ perpendiculaire à MP, nommant $CP = x$, $PM = y$, et décomposant les deux forces suivant x et y, MC donnera les forces

$$MP = \frac{C\sin\Phi}{r^2}\left(1 + \frac{\partial r}{\theta\partial t}\right), \qquad PC = \frac{C\cos\Phi}{r^2}\left(1 + \frac{\partial r}{\theta\partial t}\right),$$

et μm ou Mn donnera

$$M\nu = \frac{C\partial\Phi\cos\Phi}{r\theta\partial t}, \qquad \nu n = \frac{C\partial\Phi\sin\Phi}{r\theta\partial t}.$$

La planète est donc sollicitée par les forces

$$\text{suivant PC, } X = \frac{C}{r^2}\left(\cos\Phi + \frac{\partial r\cos\Phi}{\theta\partial t} - \frac{r\partial\Phi\sin\Phi}{\theta\partial t}\right),$$

$$\text{suivant MP, } Y = \frac{C}{r^2}\left(\sin\Phi + \frac{\partial r\sin\Phi}{\theta\partial t} + \frac{r\partial\Phi\cos\Phi}{\theta\partial t}\right);$$

d'où l'on tirera les équations (§. 17. n. 4.),

$$\partial\partial y\cos\Phi - \partial\partial x\sin\Phi = -2g\partial t^2(Y\cos\Phi - X\sin\Phi),$$

$$\partial\partial y\sin\Phi + \partial\partial x\cos\Phi = -2g\partial t^2(Y\sin\Phi + X\cos\Phi),$$

et en substituant les valeurs de $\partial\partial x$, $\partial\partial y$ (§. 19.),

I. $2\partial r\partial\Phi + r\partial\partial\Phi = -\frac{2gC}{r\theta}\partial t\partial\Phi$, II. $\partial\partial r - r\partial\Phi^2 = -\frac{2gC}{r^2}\partial t^2\left(1 + \frac{\partial r}{\theta\partial t}\right)$.

Ces équations donneront celles du mouvement elliptique, III, IV, (§. 19), si on suppose la vitesse θ infinie.

En multipliant I. par r, et intégrant, on aura

$$r^2\partial\Phi = A\partial t - 2gC\partial t\int\frac{\partial\Phi}{\theta}.$$

Quoiqu'il soit probable que θ est fonction de la distance r, il est permis de regarder θ comme constant par rapport aux petites variations de la distance

de chaque planète dans son orbite, à cause de l'extrême petitesse de l'intégrale $\int \frac{\partial \Phi}{\theta}$: on aura donc $\int \frac{\partial \Phi}{\theta} = \frac{\Phi}{\theta}$, ce qui donnera

$$\text{I.} \quad \partial \Phi = \frac{A \partial t}{r^2} - \frac{2gC\Phi}{r^2 \theta} \partial t.$$

Si l'on prend les carrés, et qu'on néglige $\frac{1}{\theta^2}$, il viendra

$$\frac{r \partial \Phi^2}{\partial t^2} = \frac{A^2}{r^3} - \frac{4gAC\Phi}{r^3 \theta};$$

ce qui étant substitué dans l'équation II, donnera

$$\text{II.} \quad 0 = \frac{\partial \partial r}{\partial t^2} - \frac{A^2}{r^3} + \frac{4gAC\Phi}{r^3 \theta} + \frac{2gC}{r^2},$$

en négligeant le terme insensible $\frac{\partial r}{\theta \partial t}$.

Si l'on fait $\Phi = nt + \alpha \xi$, $r = a(1 + \alpha u)$, nt sera le moyen mouvement, a la distance moyenne, et $\alpha \xi$, αu, seront de très-petits nombres. En nommant T la durée d'une révolution, on aura $nT = 2\pi$, et (§. 29.) $\pi = \frac{A \cdot T}{2a^2}$, en faisant abstraction de l'excentricité; d'où il vient $n = \frac{A}{a^2}$. Ainsi les équations précédentes seront à très-peu près,

$$\text{I.} \quad 0 = n + \frac{\alpha \partial \xi}{\partial t} - \frac{A}{a^2}(1 - 2\alpha u) + \frac{2gCnt}{a^2 \theta},$$

$$\text{II.} \quad 0 = \frac{\partial \partial u}{\partial t^2} - \frac{A^2}{\alpha a^4}(1 - 3\alpha u) + \frac{4gACnt}{\alpha a^4 \theta} + \frac{2gC}{\alpha a^2}(1 - 2\alpha u),$$

ou en substituant $A^2 = 2gCa$ (§. 28.),

$$\text{I.} \ 0 = \frac{\partial \xi}{\partial t} + 2nu + \frac{n^2 a t}{\alpha \theta}, \quad \text{II.} \ 0 = \frac{\partial \partial u}{\partial t^2} + n^2 u + \frac{2n^2 a t}{\alpha \theta}.$$

Il est aisé de voir que l'intégrale de l'équation II. doit avoir la forme

$$u = D \cos(\beta t + \delta) + Et,$$

d'où il suit, à cause de $r = a(1 + \alpha u)$, que αD est l'excentricité elliptique, et $\beta t + \delta$ l'anomalie: on aura donc $\delta = 0$, si l'on prend pour époque le passage par l'aphélie. Ainsi, en désignant par γ l'excentricité, il viendra

$$u = \frac{\gamma}{\alpha} \cos \beta t + Et, \text{ ce qui donne } \frac{\partial \partial u}{\partial t^2} = -\frac{\gamma}{\alpha} \beta^2 \cos \beta t, \text{ et}$$

$$\text{II.} \ 0 = \frac{n^2 - \beta^2}{\alpha} \gamma \cos \beta t + n^2 t \left(E + \frac{2n^2 a}{\alpha \theta}\right), \text{ d'où l'on conclura}$$

$$\beta = n,\ E = -\frac{2n^2 a}{2\alpha\theta},\ \text{donc}\ u = \frac{\gamma}{\alpha}\cos nt - \frac{2n^2 a}{\alpha\theta}t,$$

ce qui étant substitué dans l'équation I, donnera

$$\partial\xi = \frac{3n^2\alpha}{\alpha\theta}t\partial t - \frac{2n\gamma}{\alpha}\partial t\cos nt,\ \text{partant}\ \xi = \frac{3n^2 a}{2\alpha\theta}t^2 - \frac{2\gamma}{\alpha}\sin nt.$$

On a donc

$$r = a\left(1 + \gamma\cos\beta t - \frac{2n^2 a}{\theta}t\right),\ \text{et}\ \Phi = nt - 2\gamma\sin nt + \frac{3n^2 a}{2\theta}t^2;$$

nt étant le moyen mouvement, $2\gamma\sin nt$ le premier terme de l'équation du centre, et $\frac{3n^2 a}{2\theta}t^2$ l'équation séculaire, proportionnelle au carré du tems. On voit donc, que cette hypothèse explique parfaitement l'équation séculaire en général.

Cela supposé, l'équation séculaire de la lune étant connue, elle peut servir à déterminer la vitesse θ du fluide gravifique. Si on nomme i le nombre des mois écoulés pendant le tems t, on a $nt = 2\pi i$, et l'équation séculaire que nous venons de trouver, est $\zeta = \frac{6na\pi^2 i^2}{\theta}$. Le nombre i est dans une année $= \frac{365\text{ j. } 6\text{ h. } 9\text{ m.}}{27\text{ j. } 7\text{ h. } 43\text{ m.}}$, et dans 2000 ans, $i = 2000 \cdot \frac{525969}{39343}$, d'où l'on conclura l'équation séculaire pour 2000 ans, $\zeta = \frac{6na\pi^2 \cdot (2000)^2 (525969)^2}{(39343)^2\theta}$. Or la même étant suivant Mayer $= 1^\circ$ (§. 153.), il viendra

$$\theta = \frac{6n}{1^\circ}\pi^2 a . 4000000\left(\frac{525969}{39343}\right)^2.$$

Mais $n = 32'', 94$ si l'on exprime le tems t en minutes, et $a = 0{,}0025138 . e$, e étant la distance de la terre au soleil; d'où il vient $\frac{6n}{1^\circ} = \frac{32,94}{600} = 0, 0549$; et pour une minute,

$$\theta = \pi^2 . 549 . 1, 00552\left(\frac{525969}{39343}\right)^2 . e = 973753 . e.$$

Le fluide gravifique parcourrait donc en une minute à peu près un million de demi-diamètres de l'orbe terrestre; et sa vitesse serait 8000000 fois plus grande que celle de la lumière, qui emploie huit minutes à parcourir une ligne égale à la distance du soleil.

Si on veut appliquer cette théorie à la terre, on a pour un an, $i = 1$, $a = e$, et $n = 2'', 464$; partant l'équation séculaire pour 2000 ans,

$$\zeta = \frac{6ne\pi^2}{\theta}4000000 = 599'', 4 = 10'.$$

Puisque les équations séculaires de différentes planètes, $\zeta = \frac{6 n a \pi^2 i^2}{\theta}$, sont comme $n a i^2$, ou comme $n^3 a$, et suivant la troisième loi de Kepler, comme $V \frac{1}{a^7}$, on trouvera les équations séculaires pour 2000 ans, de Mercure $= 5^{\circ}\, 30'$, de Vénus $= 38'$, celles des autres planètes étant insensibles.

On verra facilement, que cette hypothèse ne suppose pas nécessairement un fluide gravifique, mais qu'elle se réduit à ce qui suit. La pesanteur poussant tous les corps vers le soleil, et leur imprimant une accélération, il faut lui attribuer aussi une certaine vitesse, qui doit être bien distinguée de celle qu'elle imprime aux corps, attendu qu'en vertu de la réaction elle ne peut agir sur les corps qu'en tant que ces derniers lui résistent, ou qu'ils ont une vitesse, différente de la sienne. Chaque corps sera donc soumis à la pesanteur, pourvu qu'il n'ait déjà la même vitesse vers le soleil; et pour que l'attraction du soleil n'eût aucun effet sur les planètes, il faudrait qu'au commencement de leur existence, une vitesse vers le soleil, huit millions de fois plus grande que celle de la lumière, leur eût été imprimée.

On aura remarqué que cette hypothèse n'explique point les équations séculaires de Jupiter et de Saturne, dont l'une est positive, l'autre négative; et l'on verra par la suite, qu'une véritable équation séculaire n'existe point dans le système solaire.

§. 156. Si on suppose la théorie de l'attraction, découverte par Newton, les principes de la Dynamique (§. 17.) fourniront les équations différentielles du second ordre, qui renferment en même tems le mouvement elliptique et les perturbations. La première intégration n'est pas difficile: elle donne des équations différentielles du premier ordre, qui renferment les variations de tous les élémens. Mais la seconde intégration, qui donne pour chaque instant, la longitude et les autres élémens, a été essayée inutilement par les plus grands géomètres des tems modernes, qui ont traité ce problème de différentes manières; et l'on a reconnu, que l'intégrale exacte, quand même elle ne serait pas impossible dans l'état actuel de l'analyse, serait tellement compliquée que, pour lui donner une forme favorable pour le calcul, il faudrait la développer en série. Ainsi la seule méthode, qui soit en notre pouvoir, est une *approximation* qui consiste à rejetter les quantités qui sont très-petites

par rapport aux autres, et à représenter l'intégrale par une série, dont la forme est indiquée par celle des équations différentielles, et dont les coefficiens seront déterminés, en comparant la différentielle de l'intégrale supposée aux différentielles données. La solution du problème se réduit donc à exprimer l'intégrale par une série convergente; ce qui suppose nécessairement, que la masse ou la distance, en un mot, que l'attraction d'un corps est inconsidérable par rapport à celle de l'autre; le dernier corps étant appelé le *corps central,* et le premier le corps *perturbateur.* Dans un pareil cas l'orbite troublée s'écartera fort peu des lois de Kepler, et l'on pourra la regarder comme une ellipse variable, assujétie à ces lois, ainsi que l'a prouvé Lagrange ([1]). Si l'orbite troublée s'éloignait beaucoup de l'ellipse, si par ex. la lune était quatre fois plus éloignée de la terre, le soleil pourrait être regardé comme son corps central, aussi bien que la terre; et le calcul de son orbite surpasserait nos forces. Heureusement le système solaire est tellement arrangé, qu'on peut prendre le mouvement elliptique pour base de chaque orbite troublée. En concevant un corps A qui décrit autour du soleil, suivant les lois de Kepler, une ellipse dont les élémens varient par des nuances insensibles, et supposant que la planète B est le satellite du corps A, en décrivant autour de lui un petit épicycle; le mouvement du mobile A représentera l'orbite primitive, altérée par les inégalités *séculaires,* tandis que le mouvement dans l'épicycle présentera les inégalités *périodiques.*

Suivant cette méthode on néglige une infinité de termes qui sont censés être inconsidérables par rapport à ceux qui sont conservés: c'est donc la partie la plus importante et la plus difficile de ce calcul, de déterminer d'avance les termes qui sont assés petits, pour pouvoir être négligés sans erreur sensible, et d'ordonner la série de manière qu'elle commence par les termes les plus considérables. Cette détermination demande beaucoup de précaution, parce qu'il arrive souvent que des termes, dont les différentielles ont de très-petits coefficiens, se trouvent après l'intégration multipliés par des facteurs considérables. Le mouvement des apsides de la lune en est une preuve remarquable. Ayant négligé les termes qui, dans les équations

(1) *Mém. de l'Acad. de Berlin,* 1781.

différentielles, semblaient être inconsidérables, on ne trouva que la moitié de ce que les observations avaient indiqué; mais en tenant compte des termes négligés, le calcul se trouva parfaitement conforme aux observations; ce qui confirma la théorie de Newton d'une manière frappante. Cette théorie, suivant laquelle chaque corps céleste attire tous les autres en raison directe de sa masse, et inverse du carré des distances, fournit les premières équations différentielles, dont l'intégration conduit à la solution du problème. Pour les intégrer, ou plutôt pour développer les quantités variables en des fonctions d'une forme favorable pour le calcul, on se sert de l'autre supposition, que les perturbations sont inconsidérables par rapport à la force centrale, et que par conséquent la véritable orbite, malgré les perturbations qu'elle éprouve, peut être regardée comme une ellipse, dont la position et les dimensions ne sont plus constantes, attendu que leurs variations donnent les perturbations; ensorte que c'est proprement un problème du *calcul des variations*. On peut se permettre encore une supposition, savoir que le corps perturbateur suit exactement les lois de Kepler, parce que les perturbations qu'il éprouve, n'influent sur le corps troublé qu'en changeant d'une manière insensible la configuration des deux corps, ou les argumens des inégalités; il y a cependant des cas, principalement dans la théorie de Jupiter et de Saturne, où il faut en tenir compte. Ainsi, les deux corps tournant autour d'un commun corps central, celui-ci sera pris pour centre, et l'orbite du corps perturbateur sera le plan invariable, par rapport auquel le mouvement troublé sera déterminé.

Les constantes arbitraires qui sont introduites par chaque intégration, sont les élémens des ellipses planétaires. Ce sont les données qui ne peuvent pas être déterminées par la théorie, mais par les observations seules: elles n'ont aucune influence sur les équations différentielles, ou sur les lois générales du mouvement, mais seulement sur les modifications arbitraires des orbites elliptiques qui, pour chaque planète qui se meut suivant les lois de Kepler, peuvent varier à l'infini. Il y a six constantes arbitraires, ou six élémens de chaque orbite, indépendans les uns des autres: le grand axe d'où dépend le mouvement moyen, l'excentricité, la position des apsides, celle

des noeuds, l'inclinaison, et l'époque: en effet, le problème donnant trois équations différentielles du second ordre, dont chacune doit être intégrée deux fois, ces six intégrations introduiront six constantes arbitraires. Telles sont les suppositions, sur lesquelles se fondera l'analyse suivante.

Quel que soit le nombre des forces qui agissent sur une planète, les perturbations dues à l'action de chaque corps pourront être considérées séparément, parce qu'elles sont indépendantes les unes des autres, en n'altérant que les argumens des inégalités d'une manière insensible. Ainsi on n'a qu'à considérer trois corps, le *corps central,* le corps *perturbateur,* et le corps *troublé;* ce qui a donné le nom au fameux *problème des trois corps,* qui a occupé les plus grands géomètres depuis Newton. Les diverses méthodes qu'on a imaginées pour faciliter la solution de ce problème, se trouvent dans une foule de livres. Les sources principales sont *L. Euleri Theoria motus lunae,* 1753, et *Theoria motuum lunae,* 1772. *D'Alembert, Recherches sur différ. points du Syst. du Monde. Part. I. II. III.* et *Opusc. Math. Tom. V. VI. Clairaut, sur la théorie de la lune,* 1750; et les mémoires de *Lagrange* et de *Laplace,* dans les Mémoires des Académies. Nous suivrons particulièrement la méthode, par laquelle M. de Laplace a enrichi l'astronomie des découvertes les plus importantes, et qu'on trouve développée dans sa *Théorie de Jupiter et de Saturne* (*Mém. de Paris, Ann.* 1785 et 1786), et dans la *Mécanique céleste,* ouvrage qui a fait époque dans l'astronomie physique.

CHAPITRE II.

Le Problème des trois corps.

§. 157. Le mouvement des planètes suivant les lois de Kepler se fait dans un plan invariable, et il est tout simple de prendre ce plan de l'orbite pour celui des coordonnées: ainsi nous n'avons eu besoin que de deux coordonnées dans le I. et le II. Livre. Nous allons maintenant considérer les actions mutuelles de deux corps qui ne se meuvent pas dans le même plan, dont les orbites mêmes ne sont pas dans un plan invariable: il est donc nécessaire de rapporter le mouvement troublé à un plan fixe qui n'est pas celui de l'orbite; et pour cela nous aurons besoin de trois coordonnées, pour déterminer le lieu de la planète troublée.

Soit (*Fig.* 39.) S le corps central, SA une ligne fixe d'où l'on compte les longitudes, ASY un plan invariable d'où se comptent les latitudes, Z la planète troublée par l'action de la planète Z'; abaissons les perpendiculaires ZY, Z'Y', sur le plan ASY, et YX, Y'X', sur la droite SA; menons Yy, Zz, parallèles à SA et à YY', et faisons

$$SX = x,\quad XY = y,\quad YZ = z,\quad SX' = x',\quad X'Y' = y',\quad Y'Z' = z',$$

les rayons vecteurs $SZ = r$, $SZ' = r'$,

et la distance entre les deux planètes $ZZ' = \rho$.

Cela posé on aura

$$(1)\ldots\ldots \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, & r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \\ \rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2. \end{cases}$$

§. 158. Comme l'objet de l'astronomie n'est pas le mouvement *absolu* des planètes dans l'espace, mais leur mouvement *relatif* autour du soleil, il faut appliquer à la planète Z, outre les forces qui l'animent, encore celles

qui sollicitent le soleil S, suivant la direction contraire (§. 57). En désignant donc par S, Z, Z', les masses de ces corps, et par C la force accélératrice du corps central à la distance $= 1$, cette force à la distance r sera $R = \frac{C}{r^2}$, C étant $= \frac{A^2}{ge}$ §. 27. (7) (8)). Nommons $2a$, $2b$, e, le grand axe, le petit axe, et le paramètre de l'orbite de Z, et faisons pour abréger, la constante $C = \frac{B}{2g}$, de sorte que

$$(a) \ldots\ldots 2gC = \frac{2A^2}{e} = \frac{A^2 a}{b^2} = B;$$

cela posé l'accélération $\frac{\partial v}{\partial t}$ ou $\frac{\partial \partial s}{\partial t^2}$ que S imprime à Z suivant ZS, sera $2gR = \frac{B}{r^2}$. Or les accélérations étant en raison directe des masses agissantes, et en raison inverse du carré des distances, l'accélération de Z en vertu de l'action de Z' suivant ZZ' sera $\frac{Z'}{S} \cdot \frac{B}{\rho^2}$, et celles de S en vertu des actions de Z et de Z' suivant SZ et SZ', seront $\frac{Z}{S} \cdot \frac{B}{r^2}$ et $\frac{Z'}{S} \cdot \frac{B}{r'^2}$. Si on exprime toutes les masses par celle du corps central, et qu'on fasse $\frac{Z}{S} = m$, $\frac{Z'}{S} = m'$, la planète Z recevra les accélérations

$$\frac{B(1+m)}{r^2} \text{ suivant ZS}, \quad \frac{m'B}{\rho^2} \text{ suivant ZZ'}, \text{ et } \frac{m'B}{r'^2} \text{ parallèlement à Z'S},$$

la première étant due à la force centrale, conformément à la théorie de la pesanteur universelle (§. 57.), et les deux autres dépendant de la force perturbatrice. Si on les décompose suivant les directions des coordonnées x, y, z, la première donnera, en faisant $1 + m = \mu$, les accélérations

$$\frac{\mu B x}{r^3} \text{ suivant } XS = -x, \quad \frac{\mu B y}{r^3} \text{ suivant } YX = -y, \quad \frac{\mu B z}{r^3} \text{ suivant } ZY = -z;$$

la seconde donnera $\frac{m'B}{\rho^3}\, Zz$ et $\frac{m'B}{\rho^3}\, zZ'$ suivant Zz et zZ', ou bien

$$\frac{m'B(x'-x)}{\rho^3} \text{ suivant } +x, \quad \frac{m'B(y'-y)}{\rho^3} \text{ suivant } +y, \quad \frac{m'B(z'-z)}{\rho^3} \text{ suivant } +z;$$

la troisième donnera

$$\frac{m'Bx'}{r'^3} \text{ suivant } -x, \quad \frac{m'By'}{r'^3} \text{ suivant } -y, \quad \frac{m'Bz'}{r'^3} \text{ suivant } -z.$$

En nommant donc X', Y', Z', les accélérations des forces perturbatrices suivant $-x$, $-y$, $-z$, on aura

$$(b) \ldots\ldots \begin{cases} X' = m'B\left(\frac{x'}{r'^3} - \frac{x'-x}{\rho^3}\right), \quad Y' = m'B\left(\frac{y'}{r'^3} - \frac{y'-y}{\rho^3}\right), \\ Z' = m'B\left(\frac{z'}{r'^3} - \frac{z'-z}{\rho^3}\right); \end{cases}$$

et les accélérations de la planète Z suivant $-x$, $-y$, $-z$, seront

$$(c)\ldots\ldots \frac{\mu B x}{r^3} + X' = X, \quad \frac{\mu B y}{r^3} + Y' = Y, \quad \frac{\mu B z}{r^3} + Z' = Z.$$

Faisons pour abréger,

$$(d)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} m' \left(\frac{x x' + y y' + z z'}{r'^3} - \frac{1}{\varrho} \right) = R, \\ x \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) + y \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) = (R), \\ \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) \partial x + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) \partial y + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) \partial z = (\partial R), \end{array} \right.$$

(∂R) étant la différentielle de la fonction R, si on ne fait varier que les élémens de la planète m, ou les lettres sans trait: cela posé on trouvera par la différentiation,

$$(e)\ldots\ldots X' = B \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right), \quad Y' = B \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right), \quad Z' = B \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right).$$

§. 159. Si l'on substitue les valeurs (c) et (e) dans l'équation fondamentale, fournie par la dynamique (§. 17. n. 4.), il viendra

$$\text{I.} \quad 0 = \frac{\partial \partial x}{B \partial t^2} + \frac{\mu x}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right),$$

$$\text{II.} \quad 0 = \frac{\partial \partial y}{B \partial t^2} + \frac{\mu y}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right),$$

$$\text{III.} \quad 0 = \frac{\partial \partial z}{B \partial t^2} + \frac{\mu z}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right),$$

d'où l'on tirera

$$(2)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{x \partial \partial y - y \partial \partial x}{B \partial t^2} = y \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) - x \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right), \\ \frac{x \partial \partial z - z \partial \partial x}{B \partial t^2} = z \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) - x \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right), \\ \frac{y \partial \partial z - z \partial \partial y}{B \partial t^2} = z \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) - y \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right). \end{array} \right.$$

Si on intègre ces équations, en faisant pour abréger,

$$(f)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \left\{ y \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) - x \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) \right\} \partial t = \partial c, \\ \left\{ z \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right) - x \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) \right\} \partial t = \partial c', \\ \left\{ z \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) - y \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) \right\} \partial t = \partial c'', \end{array} \right.$$

il viendra

$$(3)\ldots\ldots \frac{x\partial y - y\partial x}{B\partial t} = c,\quad \frac{x\partial z - z\partial x}{B\partial t} = c',\quad \frac{y\partial z - z\partial y}{B\partial t} = c'',$$

d'où l'on tirera l'équation

$$(A)\ldots\ldots 0 = c''x - c'y + cz.$$

En substituant (1) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r\partial r = x\partial x + y\partial y + z\partial z$, dans les différentielles,

$$\partial\frac{x}{r} = \frac{r^2\partial x - x.r\partial r}{r^3},\quad \partial\frac{y}{r} = \frac{r^2\partial y - y.r\partial r}{r^3},\quad \partial\frac{z}{r} = \frac{r^2\partial z - z.r\partial r}{r^3},$$

on aura

$$\partial\frac{x}{r} = \frac{y(y\partial x - x\partial y) + z(z\partial x - x\partial z)}{r^3},$$

$$\partial\frac{y}{r} = \frac{x(x\partial y - y\partial x) + z(z\partial y - y\partial z)}{r^3},$$

$$\partial\frac{z}{r} = \frac{x(x\partial z - z\partial x) + y(y\partial z - z\partial y)}{r^3},$$

et par les équations (3),

$$(4)\ldots\ldots \partial\frac{x}{r} = -\frac{B}{r^3}(cy + c'z)\partial t,\quad \partial\frac{y}{r} = \frac{B}{r^3}(cx - c''z)\partial t,\quad \partial\frac{z}{r} = \frac{B}{r^3}(c'x + c''y)\partial t.$$

Si l'on élimine $\frac{x}{r^3}$, $\frac{y}{r^3}$, $\frac{z}{r^3}$, à l'aide des équations I, II, III, il viendra

$$\mu\partial\frac{x}{r} = \frac{c\partial\partial y + c'\partial\partial z}{\partial t} + B\left\{c\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + c'\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right\}\partial t,$$

$$\mu\partial\frac{y}{r} = \frac{c''\partial\partial z - c\partial\partial x}{\partial t} + B\left\{c''\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) - c\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right\}\partial t,$$

$$\mu\partial\frac{z}{r} = -\frac{c'\partial\partial x + c''\partial\partial y}{\partial t} - B\left\{c'\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) + c''\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\right\}\partial t.$$

Intégrons ces équations par parties, et faisons pour abréger,

$$(g)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} B\left\{c\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + c'\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right\}\partial t - \frac{\partial c\partial y + \partial c'\partial z}{\partial t} = \partial f, \\ B\left\{c''\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) - c\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right\}\partial t + \frac{\partial c\partial x - \partial c''\partial z}{\partial t} = \partial f', \\ -B\left\{c'\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + c''\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\right\}\partial t + \frac{\partial c'\partial x + \partial c''\partial y}{\partial t} = \partial f'', \end{array}\right.$$

f, f', f'', étant des fonctions des forces perturbatrices m', qui deviennent constantes, si ces forces sont nulles, parce qu'alors les différentielles de R, c, c', c'', s'évanouissent (d) (f). Cela posé l'intégration donnera

$$(5)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\mu\,\frac{x}{r}=\frac{c\partial y+c'\partial z}{\partial t}+f,\\ \mu\,\frac{y}{r}=\frac{c''\partial z-c\partial x}{\partial t}+f',\\ \mu\,\frac{z}{r}=-\frac{c'\partial x+c''\partial y}{\partial t}+f''.\end{array}\right.$$

En ajoutant ensemble ces trois équations, après les avoir multipliées respectivement par x, y, z, et substituant au lieu de c, c', c'', leurs valeurs (3), on trouvera

$$(\mathrm{B})\ldots\ldots\mu r=\mu\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}=\mathrm{B}(c^2+c'^2+c''^2)+fx+f'y+f''z.$$

La somme des équations I, II, III, multipliées respectivement par ∂x, ∂y, ∂z, donnera, à cause de $x\partial x+y\partial y+z\partial z=r\partial r$,

$$o=\frac{\partial x\partial\partial x+\partial y\partial\partial y+\partial z\partial\partial z}{\mathrm{B}\partial t^2}+\frac{\mu\partial r}{r^2}+(\partial\mathrm{R}),$$

dont l'intégrale est

$$o=\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{\mathrm{B}\partial t^2}-\frac{2\mu}{r}+2f(\partial\mathrm{R})+\text{const.}$$

Dans l'orbite non troublée l'élément de l'arc elliptique ∂s est $=\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)}$, et l'équation précédente devient, $o=\frac{\partial s^2}{\mathrm{B}\partial t^2}-\frac{2\mu}{r}+\text{const.}$ Mais la vitesse $v=\frac{\partial s}{\partial t}$ est donnée par l'équation, $v^2=2gf^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$ (§. 33. (1)), $2gf^2$ étant $\frac{2\mathrm{A}^2}{c}$ (§. 32. (3)) $=\mathrm{B}\mu$, à cause du mouvement relatif, d'où l'on tirera $v^2=\frac{\partial s^2}{\partial t^2}=\mu\mathrm{B}\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$; ce qui étant substitué dans l'équation $o=\frac{\partial s^2}{\mathrm{B}\partial t^2}-\frac{2\mu}{r}+$ const. donnera, const. $=\frac{\mu}{a}$. Ainsi on a

$$o=\frac{\partial s^2}{\mathrm{B}\partial t^2}-\frac{2\mu}{r}+\frac{\mu}{a}+2f(\partial\mathrm{R}).$$

Si l'on ajoute cette équation aux équations I, II, III, multipliées respectivement par x, y, z, il viendra

$$o=\frac{\partial s^2+x\partial\partial x+y\partial\partial y+z\partial\partial z}{\mathrm{B}\partial t^2}-\frac{\mu}{r}+\frac{\mu}{a}+(\mathrm{R})+2f(\partial\mathrm{R}).$$

Le premier terme est $\frac{\partial\partial.r^2}{2\mathrm{B}\partial t^2}$; ainsi cette équation devient

$$(\mathrm{C})\ldots\ldots o=\frac{\partial\partial.r^2}{\mathrm{B}\partial t^2}-\frac{2\mu}{r}+\frac{2\mu}{a}+2(\mathrm{R})+4f(\partial\mathrm{R}).$$

§. 160. L'équation (A) (§. 159.), étant du premier degré, est celle d'un plan; et comme les coordonnées x, y, z, sont les mêmes que celles qui déterminent le lieu de la planète m, ce plan est celui de l'orbite de m. La position du plan de l'orbite est donnée par les quantités c, c', c'': elle sera donc invariable, si ces quantités sont constantes, et ne sera point altérée par les variations des coordonnées x, y, z, ou du tems t. Si les forces perturbatrices m' sont nulles, R et $\partial c, \partial c', \partial c''$, le sont aussi ($d$) ($f$); par conséquent le plan est alors invariable, et son déplacement dépend des variations $\partial c, \partial c', \partial c''$, dues aux perturbations. Mais les élémens c, c', c'', varient si lentement, qu'on peut les regarder comme constans, et le plan comme invariable, pendant que les coordonnées prennent les accroissemens $\partial x, \partial y, \partial z$. Il est aisé de s'assurer de cette vérité importante. Si l'on ajoute ensemble les trois équations (3), après les avoir multipliées respectivement par $\partial z, -\partial y, \partial x$, il viendra $o = c''\partial x - c'\partial y + c\partial z$, et il résultera la même équation, si l'on différentie (A), en supposant c, c', c'', constans. Il s'en suit qu'en formant les *premières* différentielles de toutes nos équations, par rapport à t, il faut regarder c, c', c'', comme des quantités constantes, et que, malgré les perturbations, la planète doit être censée se mouvoir dans un plan, dont la position varie d'un tems à l'autre, mais si lentement, que ses variations sont proportionnelles au *secondes* différentielles ou au carré de ∂t. Le mouvement troublé est donc, à l'égard du plan de l'orbite, le même que le mouvement non troublé, avec cette différence, que les élémens qui déterminent la position de ce plan, sont assujétis à des variations qui sont de l'ordre des masses perturbatrices m'. Puisque les quantités c, c', c'', sont introduites par l'intégration des équations (2), elles doivent renfermer les constantes arbitraires, ou les élémens du plan de l'orbite, et serviront à déterminer ce plan.

Si on fait $z = o$ dans l'équation (A), elle déterminera, pour un instant donné, l'intersection de l'orbite avec le plan des x, y, que nous supposons être l'écliptique. Soit (*Fig.* 39.) SMN☊ cette commune section, $SX = x$, $XM = y$: cela posé l'équation (A), $o = c''x - c'y$, donnera le noeud ascendant, les ordonnées $YZ = z$ étant supposées se diriger vers le nord. Ainsi, en

nommant J la longitude du noeud, η l'inclinaison de l'orbite, faisant tang $\eta = \theta$, et prenant pour axe des x la ligne SA dirigée vers le point vernal, on aura tang $J = \frac{y}{x} = \frac{c''}{c'}$. Si du point Y on abaisse la perpendiculaire YN sur la ligne des noeuds, on aura $YNZ = \eta$, $XM = x \operatorname{tg} J = \frac{c''}{c'} x$, $MY = y - XM = \frac{c'y - c''x}{c'} = \frac{c}{c'} z$ (par l'équation (A)), $YN = \frac{c}{c'} z \cos J$, et $\theta = \frac{ZY}{YN} = \frac{c'}{c}$ séc J; d'où l'on tirera les équations suivantes,

$$(6) \ldots\ldots \operatorname{tang} J = \frac{c''}{c'}, \; \theta = \frac{\sqrt{(c'^2 + c''^2)}}{c}, \; \theta \sin J = \frac{c''}{c}, \; \theta \cos J = \frac{c'}{c}.$$

Puisque les inclinaisons θ de toutes les planètes sont très-petites, et que sin J et cos J sont susceptibles de toutes les valeurs entre 1 et -1, il suit des équations précédentes, que c', c'', sont des quantités très-petites par rapport à c.

§. 161. En opérant de la même manière sur l'équation (B), on trouvera des résultats analogues relativement à la figure de l'orbite troublée. Cette équation, étant du second degré, nous apprend que l'orbite troublée est une section conique, dont les élémens dépendent des quantités f, f', f'', qui sont constantes, si les forces perturbatrices sont nulles (§. 159.), et qui le seront encore, si l'on fait abstraction des secondes différentielles. Pour le prouver, ajoutons ensemble les trois équations (5), après les avoir multipliées respectivement par ∂x, ∂y, ∂z: il viendra $\mu \partial r = f \partial x + f' \partial y + f'' \partial z$, ce qui est la différentielle de (B), les quantités c, c', c'', f, f', f'', étant regardées comme constantes. Il en résulte, comme ci-dessus (§. 160.), que malgré les perturbations, la planète décrit dans chaque instant l'arc d'une ellipse, dont les élémens sont assujétis à des variations de l'ordre des masses m', qui ne se manifestent que dans les secondes différentielles. Pour déterminer les élémens de l'orbite troublée, savoir le grand axe $= 2a$, l'excentricité $= \gamma$, et la longitude de l'aphélie $= \varpi$, faisons pour abréger,

$$(h) \ldots\ldots \begin{cases} c^2 + c'^2 + c''^2 = \text{H}^2, \; f^2 + f'^2 + f''^2 = \lambda^2, \; c'f + c''f' = \text{L}, \\ cf - c'f'' = \text{M}, \; cf' + c''f'' = \text{N}. \end{cases}$$

Si on ajoute ensemble les trois équations (5), multipliées respectivement par c'', $-c'$, c, et qu'on substitue (A), on aura cette équation de condition,

$$(7) \ldots\ldots 0 = c''f - cf' + cf''.$$

34

Rapportons maintenant le lieu de la planète m à trois nouvelles coordonnées, ζ, ξ, ψ: la théorie de la transformation des coordonnées donnera trois équations linéaires de cette forme,

$$x = D\zeta + E\xi + F\psi,\quad y = D'\zeta + E'\xi + F'\psi,\quad z = D''\zeta + E''\xi + F''\psi,$$

les coefficiens D, E, F, etc. étant donnés par la position du plan et des axes des nouvelles coordonnées. Comme cette position est arbitraire, on peut déterminer les coefficiens à volonté. Supposons donc

$$(i) \ldots\ldots x = \frac{c''}{\Pi}\zeta + \frac{f}{\lambda}\xi - \frac{N}{\Pi\lambda}\psi,\ y = -\frac{c'}{\Pi}\zeta + \frac{f'}{\lambda}\xi + \frac{M}{\Pi\lambda}\psi,\ z = \frac{c}{\Pi}\zeta + \frac{f''}{\lambda}\xi + \frac{L}{\Pi\lambda}\psi.$$

Cela posé les valeurs de L, M, N, (h) donneront

$$(8) \ldots\ldots o = Lc - Mc' - Nc'', \text{ et } o = Lf'' + Mf' - Nf,$$

et si on substitue dans les équations (i) les valeurs (h) (7) (8), on trouvera

$$(9) \ldots\ldots c''x - c'y + cz = \Pi\zeta, \text{ et } fx + f'y + f''z = \lambda\xi.$$

La comparaison de la première avec l'équation (A) donne $\zeta = o$, et la seconde devient par l'équation (B), $\mu r = B\Pi^2 + \lambda\xi$. La somme des carrés des équations (i) donne, à l'aide des équations (h) (7) (8), $r^2 = \zeta^2 + \xi^2 + \frac{L^2+M^2+N^2}{\Pi^2\lambda^2}\psi^2$, et l'on trouvera ($h$) $L^2 + M^2 + N^2 = \Pi^2\lambda^2 - (c''f - cf' + cf'')^2 = \Pi^2\lambda^2$, parce que le dernier terme est nul (7). Ainsi la dernière équation deviendra $r^2 = \zeta^2 + \xi^2 + \psi^2$, d'où l'on voit, que les coordonnées ζ, ξ, ψ, ont la même origine que x, y, z, et que le plan des ξ, ψ, est l'orbite même, à cause de $\zeta = o$. La comparaison des équations, $r^2 = \xi^2 + \psi^2$ et $\mu r = B\Pi^2 + \lambda\xi$, donnera

$$(10) \ldots\ldots \mu^2\psi^2 = B^2\Pi^4 + 2B\Pi^2\lambda\xi + (\lambda^2 - \mu^2)\xi^2,$$

ce qui est l'équation de l'ellipse, les abscisses ξ étant prises du foyer sur le grand axe vers l'aphélie. En nommant u l'abscisse prise du centre, e le paramètre, $2a$, $2b$, le grand et le petit axe, γ l'excentricité, on aura $u = \xi - a\gamma$, et $\psi^2 = b^2\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) = b^2\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{2\gamma}{a}\xi - \gamma^2\right) = \frac{e^2}{4} + e\gamma\xi - (1-\gamma^2)\xi^2$, ce qui étant comparé avec l'équation (10), nous apprend que le paramètre est $\frac{2B\Pi^2}{\mu}$, l'excentricité $\frac{\lambda}{\mu}$, et le grand axe $\frac{e}{1-\gamma^2} = \frac{2B\Pi^2\mu}{\mu^2-\lambda^2}$. On aura donc

$$(11) \ldots\ldots e = \frac{2B\Pi^2}{\mu},\quad \gamma = \frac{\lambda}{\mu},\quad a = \frac{\mu}{P},\ P \text{ étant} = \frac{\mu^2-\lambda^2}{B\Pi^2}.$$

Pour déterminer la ligne des apsides, faisons $\psi = o$, ce qui donne pour les deux apsides, les équations (i), $x = \frac{f}{\lambda}\xi$, $y = \frac{f'}{\lambda}\xi$, $z = \frac{f''}{\lambda}\xi$. Si on désigne par Φ, β, la longitude et la latitude de l'aphélie, on aura $\tang \Phi = \frac{y}{x}$, $\tang \beta = \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, partant

$$(12)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \tang \Phi = \frac{f'}{f}, \quad \tang \beta = \frac{f''}{\sqrt{(f^2+f'^2)}}, \\ \sin\beta = \frac{f''}{\lambda}, \quad \cos\beta \sin\Phi = \frac{f'}{\lambda}, \quad \cos\beta\cos\Phi = \frac{f}{\lambda}. \end{array} \right.$$

Comme les latitudes et les excentricités de toutes les planètes sont très-petites, les équations (12) font voir, que $f'' = \lambda \sin\beta = \mu\gamma \sin\beta$ est une quantité du second ordre, par rapport à f et f'. Si on prend pour le plan des x, y, l'orbite de m, et qu'on substitue le périhélie ϖ au lieu de l'aphélie, on aura $\beta = o$; $\Phi = 180° + \varpi$, donc $f = -\mu\gamma\cos\varpi$, $f' = -\mu\gamma\sin\varpi$, $f'' = o$.

§. 162. On a vu que tous les élémens de l'orbite sont donnés par les quantités c, c', c'', f, f', f'', et $a = \frac{\mu}{P}$, et les expressions de ces dernières peuvent être simplifiées. Si on substitue les valeurs (f) (3) (§. 159.) dans les équations (g), il viendra

$$\partial f = (2x\partial y - y\partial x)\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + (2x\partial z - z\partial x)\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) - (y\partial y + z\partial z)\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right),$$

$$\partial f' = (2y\partial x - x\partial y)\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + (2y\partial z - z\partial y)\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) - (x\partial x + z\partial z)\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right),$$

$$\partial f'' = (2z\partial x - x\partial z)\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + (2z\partial y - y\partial z)\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - (x\partial x + y\partial y)\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right),$$

et en substituant les valeurs de (R), (∂R), et $r\partial r$ (§. 158. (d), §. 157. (1)),

$$(13)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \partial f = 2x(\partial R) - (R)\partial x - \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) r\partial r, \\ \partial f' = 2y(\partial R) - (R)\partial y - \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) r\partial r, \\ \partial f' = 2z(\partial R) - (R)\partial z - \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) r\partial r. \end{array} \right.$$

Si on met à la place de c, c', c'', leurs valeurs (3) (§. 159.), les équations (5) deviendront

$$f = \frac{\mu x}{r} + \frac{\partial x(y\partial y + z\partial z) - x(\partial y^2 + \partial z^2)}{\partial t^2},$$

$$f' = \frac{\mu y}{r} + \frac{\partial y\,(x\,\partial x + z\,\partial z) - y\,(\partial x^2 + \partial z^2)}{B\,\partial t^2},$$

$$f'' = \frac{\mu z}{r} + \frac{\partial z\,(x\,\partial x + y\,\partial y) - z\,(\partial x^2 + \partial y^2)}{B\,\partial t^2},$$

et en substituant $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$,

$$(14)\ldots\ldots\begin{cases} f = \dfrac{\mu x}{r} + \dfrac{r\,\partial r\,\partial x - x\,\partial s^2}{B\,\partial t^2}, \\ f' = \dfrac{\mu y}{r} + \dfrac{r\,\partial r\,\partial y - y\,\partial s^2}{B\,\partial t^2}, \\ f'' = \dfrac{\mu z}{r} + \dfrac{r\,\partial r\,\partial z - z\,\partial s^2}{B\,\partial t^2}. \end{cases}$$

Mais on a (h) (§. 161.) $f\partial f + f'\partial f' + f''\partial f'' = \lambda\partial\lambda$: en multipliant donc les équations (13) par (14), il viendra

$$(15)\ldots\ldots\lambda\partial\lambda = \left(2\mu r + \frac{r^2(\partial r^2 - 2\,\partial s^2)}{B\,\partial t^2}\right)(\partial R) + \left(\frac{r\,\partial s^2}{B\,\partial t^2} - 2\mu\right)(R)\,\partial r.$$

Les équations (5) (§. 159.) donnent $\left(\frac{\mu x}{r} - f\right)^2 + \left(\frac{\mu y}{r} - f'\right)^2 + \left(\frac{\mu z}{r} - f''\right)^2 =$
$\frac{c^2(\partial x^2 + \partial y^2) + c'^2(\partial x^2 + \partial z^2) + c''^2(\partial y^2 + \partial z^2) + 2cc'\partial y\,\partial z - 2cc''\partial x\,\partial z + 2c'c''\partial x\,\partial y}{\partial t^2}$,

ce qui étant développé donnera

$$\mu^2 - \frac{2\mu}{r}(fx + f'y + f''z) + \lambda^2 = \Pi^2\frac{\partial s^2}{\partial t^2} - \frac{(c\,\partial z - c'\partial y + c''\partial x)^2}{\partial t^2}.$$

Or le dernier terme est nul (§. 160.), et $fx + f'y + f''z = \mu r - B\Pi^2$ (§. 159. (B)), partant $\Pi^2\frac{\partial s^2}{\partial t^2} = \frac{2\mu}{r}B\Pi^2 - \mu^2 + \lambda^2$, et en substituant $\mu^2 - \lambda^2 = B\Pi^2 P$ (§. 161. (11)),

$$(16)\ldots\ldots\frac{\partial s^2}{\partial t^2} = B\left(\frac{2\mu}{r} - P\right).$$

Si on ajoute ensemble les carrés des équations (3) (§. 159.), il viendra
$\Pi^2 = \frac{x^2(\partial y^2 + \partial z^2) + y^2(\partial x^2 + \partial z^2) + z^2(\partial x^2 + \partial y^2) - 2xy\,\partial x\,\partial y - 2xz\,\partial x\,\partial z - 2yz\,\partial y\,\partial z}{B^2\,\partial t^2}$
$= \frac{r^2\,\partial s^2 - \partial r^2)}{B^2\,\partial t^2}$, donc $\frac{r^2\,\partial r^2}{B\,\partial t^2} = \frac{r^2\,\partial s^2}{B\,\partial t^2} - B\Pi^2$, et en substituant (16),

$$(17)\ldots\ldots\frac{r^2\,\partial r^2}{B\,\partial t^2} = 2\mu r - Pr^2 - B\Pi^2.$$

Si on substitue (16) et (17) dans l'équation (15), elle deviendra

$$\lambda\partial\lambda = (Pr^2 - B\Pi^2)(\partial R) - Pr(R)\,\partial r,$$

et la différentiation de l'équation $\lambda^2 = \mu^2 - B\Pi^2 P$ (11) (§. 161.) donnera

$$\lambda\partial\lambda = -\,\mathrm{BP\Pi}\partial\Pi - \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\Pi^2\partial\mathrm{P}.$$

En égalant ces deux valeurs de $\lambda\partial\lambda$, on aura

$$\mathrm{BP\Pi}\partial\Pi = \mathrm{P}r(\mathrm{R})\partial r - \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\Pi^2\partial\mathrm{P} + (\mathrm{B}\Pi^2 - \mathrm{P}r^2)(\partial R).$$

Or les équations (f) (3) (§. 159.) donnent $\mathrm{B}(c\partial c + c'\partial c' + c''\partial c'')$ ou $\mathrm{B}\Pi\partial\Pi =$

$$x\partial x\left\{y\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)+z\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right\}+y\partial y\left\{x\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)+z\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right\}+z\partial z\left\{x\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\right\}$$
$$-x^2\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\partial y+\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\partial z\right\}-y^2\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\partial z\right\}-z^2\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\partial y\right\}$$
$$= (\mathrm{R})\,r\partial r - r^2(\partial\mathrm{R});$$

ce qui étant multiplié par P, et comparé à la valeur précédente de $\mathrm{BP\Pi}\partial\Pi$, donnera $o = \mathrm{B}\Pi^2(\partial\mathrm{R}) - \frac{1}{2}\mathrm{B}\Pi^2\partial\mathrm{P}$, d'où l'on tirera $\partial\mathrm{P} = 2(\partial\mathrm{R})$, et à cause de $\mathrm{P} = \frac{\mu}{a}$ (11) (§. 161.),

$$(18)\ldots\ldots\partial\frac{\mu}{a} = 2\,(\partial\,\mathrm{R}).$$

Les équations (f) (§. 159.), (13), (18), donnent les différentielles des quantités c, c', c'', f, f', f'', $\frac{\mu}{a}$, dont dépendent les élémens de l'orbite en vertu des équations (6) (§. 160.), (11) (12) (§. 161.); et leurs intégrales sont données par les équations (3) (§. 159.), (14), et $\frac{\mu}{a} = 2\int(\partial\,\mathrm{R})$. Ainsi ces équations renferment les inégalités séculaires, dont celle du moyen mouvement mérite une attention particulière.

§. 163. La formule $\frac{\mu}{a} = 2\int(\partial\mathrm{R})$ qui est de l'ordre des masses perturbatrices m', exprime la variation de $\frac{\mu}{a}$, due à l'action de la planète m', que nous désignerons par $\delta\frac{\mu}{a}$. En nommant donc a et (a) les demi-axes de l'orbite invariable et de l'orbite troublée, on aura $\frac{\mu}{(a)} = \frac{\mu}{a} + \delta\frac{\mu}{a}$ $= \frac{\mu}{a} + 2\int(\partial\mathrm{R}) = \mathrm{P}$, d'où l'on déduira facilement la variation du moyen mouvement. On a vu (§. 57. (A)), qu'en vertu de la troisième loi de Kepler, corrigée par la théorie de la pesanteur universelle, il est $n^2a^3 = 2g\mathrm{C}(1+m) = 2\mu g\mathrm{C}$, n étant la vitesse moyenne dans l'orbite non troublée, et C la force centrale à une distance égale à l'unité. Or nous avons fait (§. 158. (a)), $2g\mathrm{C} = \mathrm{B}$, d'où il vient $n^2a^3 = \mu\mathrm{B}$. Si on désigne par ν le moyen mouvement dans le tems t, on a $\nu = nt$, $\partial\nu = n\partial t$, équation qui a aussi lieu dans l'orbite troublée, parce que les variations des élémens, comme ∂n, ne se manifestent que dans les secondes différentielles (§. 160. 161.); il s'en suit $\partial\partial\nu = \partial n\,\partial t$. Si on différentie l'équation $n^2a^3 = \mu\mathrm{B}$, on aura $o =$

$2a^3 n\partial n + 3n^2 a^2 \partial a$, donc $\frac{\partial n}{n} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\partial a}{a}$. La différentielle de $\frac{\mu}{a}$ est $-\frac{\mu\partial a}{a^2}$, d'où l'on tire $-\frac{\partial a}{a} = \frac{a}{\mu}\partial\frac{\mu}{a}$, partant $\frac{\partial n}{n} = \frac{3a}{2\mu}\partial\frac{\mu}{a}$, et en substituant (18) (§. 162.), $\partial n = \frac{3an}{\mu}(\partial R)$, donc $\partial\partial v = \partial n\partial t = \frac{3}{\mu}an(\partial R)\partial t$, et en intégrant,

$$(19)\ldots\ldots v = \frac{3}{\mu}\int\int an(\partial R)\partial t.$$

§. 164. Considérons maintenant les inégalités périodiques. L'équation (C) (§. 159.) donne le rayon vecteur dans l'orbite troublée, d'où l'on conclura celui de l'orbite invariable, en faisant $m' = 0$, et par conséquent $(R) = 0$ et $(\partial R) = 0$. En désignant donc par r le rayon vecteur elliptique, et par $r + m'\delta r$ sa perturbation, on aura les rayons vecteurs dans l'orbite invariable et dans l'orbite troublée, par les équations

$$(k)\ldots\ldots 0 = \frac{\partial\partial(r^2)}{B\partial t^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{2\mu}{a}, \text{ et}$$

$$0 = \frac{\partial\partial(r^2 + 2m'r\delta r)}{B\partial t^2} - \frac{2\mu}{r\left(1 + \frac{m'\delta r}{r}\right)} + \frac{2\mu}{a} + 2(R) + 4\int(\partial R), \text{ ou}$$

$$(l)\ldots\ldots 0 = \frac{\partial\partial(r^2)}{B\partial t^2} + \frac{2m'\partial\partial(r\delta r)}{B\partial t^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{2\mu m'\delta r}{r^2} + \frac{2\mu}{a} + 2(R) + 4\int(\partial R),$$

en négligeant les produits des masses m, m'. Substituons maintenant (k) en (l), divisons par 2, et mettons m' à la place de $\mu m'$: nous aurons

$$\text{IV.}\quad 0 = \frac{m'\partial\partial(r\delta r)}{B\partial t^2} + \frac{m'\delta r}{r^2} + (R) + 2\int(\partial R).$$

En ôtant l'équation IV, après l'avoir multipliée par x, de l'équation I, multipliée par $m'r\delta r$ (§. 159.), et négligeant les produits des masses, et par conséquent $m'\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)$, on aura

$$0 = \frac{m'r\delta r.\partial\partial x - m'x.\partial\partial(r\delta r)}{B\partial t^2} - x(R) - 2x\int(\partial R),$$

dont l'intégration donnera

$$0 = \frac{m'r\delta r.\partial x - m'x.\partial(r\delta r)}{B\partial t} - \int x(R)\partial t - 2\int x\partial t\int(\partial R).$$

En opérant de la même manière, II. $m'r\delta r$ — IV. y donnera

$$0 = \frac{m'r\delta r.\partial y - m'y.\partial(r\delta r)}{B\partial t} - \int y(R)\partial t - 2\int y\partial t\int(\partial R).$$

Si on ajoute ensemble les deux dernières équations, après les avoir multipliées respectivement par y et $-x$, il viendra

$$(D) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{m' r \delta r (x \partial y - y \partial x)}{B \partial t} = \\ x \int y (R) \partial t - y \int x (R) \partial t + 2x \int y \partial t \int (\partial R) - 2y \int x \partial t \int (\partial R). \end{array} \right.$$

Comme on néglige ici les produits des masses, il faut mettre à la place de $\frac{x \partial y - y \partial x}{B \partial t}$ sa valeur dans l'ellipse invariable. Soit donc (*Fig.* 40.) NPQS le plan de l'orbite, NpqS le plan des x, y, et supposons pour un moment, que les abscisses x soient prises sur la ligne des noeuds SN: ayant abaissé les perpendiculaires Pp sur le plan des x, y, et pr sur l'axe des x, P$rp = \eta$ sera l'inclinaison des deux plans, et on aura S$r = x$, $rp = y$, pP$= z$: en nommant donc y' l'ordonnée sur l'orbite, Pr, il viendra $y = y' \cos \eta$. Or la première loi de Kepler donne (§. 19. V.) $x \partial y' - y' \partial x = A \partial t$, d'où il suit $x \partial y - y \partial x = A \partial t \cos \eta$. Si on substitue (§. 158. (a)) $B = \frac{A^2 a}{b^2} = \frac{A^2}{a(1-\gamma^2)}$, il viendra $\frac{x \partial y - y \partial x}{B \partial t} = \frac{a(1-\gamma^2) \cos \eta}{A}$. Mais $A = \frac{2 \pi a b}{T}$ (§. 28.), $T = \frac{2\pi}{n}$ étant la durée d'une révolution, ce qui donne

$$A = nab = na^2 \sqrt{(1-\gamma^2)}, \quad B = n^2 a^3, \text{ et } \frac{x \partial y - y \partial x}{B \partial t} = \frac{\cos \eta . \sqrt{(1-\gamma^2)}}{na}.$$

Si on substitue cette valeur dans l'équation (D), elle deviendra

$$\text{V.} \ \frac{m' \delta r}{a} = \frac{n}{\cos \eta \sqrt{(1-\gamma^2)}} \left\{ \frac{x}{r} \int y (R) \partial t - \frac{y}{r} \int x (R) \partial t + \frac{2x}{r} \int y \partial t \int (\partial R) - \frac{2y}{r} \int x \partial t \int (\partial R) \right\}.$$

§. 165. La somme des équations I, II, III (§. 159.), multipliées respectivement par x, y, z, donne

$$(20) \ldots\ldots 0 = \frac{x \partial \partial x + y \partial \partial y + z \partial \partial z}{B \partial t^2} + \frac{\mu}{r} + (R).$$

Or $\partial \partial (r^2) = 2 (x \partial \partial x + y \partial \partial y + z \partial \partial z) + 2 (\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)$, ce qui change le premier terme de l'équation (20) en $\frac{\frac{1}{2} \partial \partial . r^2 - \partial s^2}{B \partial t^2}$. Mais si l'on nomme v la vraie longitude dans l'orbite invariable, comptée d'un point fixe quelconque, et $m' \delta v$ sa perturbation, on a $\partial s^2 = \partial r^2 + r^2 \partial v^2$, et $\frac{1}{2} \partial \partial . r^2 = r \partial \partial r + \partial r^2$, d'où il vient $\frac{1}{2} \partial \partial . r^2 - \partial s^2 = r \partial \partial r - r^2 \partial v^2$. En mettant donc $r + m' \delta r$ et $v + m' \delta v$ à la place de r et de v, l'équation (20) deviendra

$$0 = \frac{(r + m' \delta r) \partial \partial r + m' r \partial \partial \delta r - (r^2 + 2 m' r \delta r) \partial v^2 - 2 m' r^2 \partial v . \partial \delta v}{B \partial t^2} + \frac{\mu}{r} \left(1 - \frac{m' \delta r}{r} \right) + (R).$$

Les termes indépendans de m' expriment le mouvement elliptique: il faut donc que tous les termes, multipliés par m, soient nuls séparément; ce qui donne pour le mouvement troublé,

$$o = \frac{m'\delta r.\partial\partial r + m' r\partial\partial\delta r - 2m' r\delta r.\partial v^2 - 2m' r^2\partial v.\partial\delta v}{B\partial t^2} - \frac{m'\delta r}{r^2} + (R).$$

Si on substitue $r^2\partial v = A\partial t$ (§. 19. V.), $A = na^2\sqrt{(1-\gamma^2)}$, $B = n^2a^3$ (§. 164.), et $r\partial v^2 = \partial\partial r + \frac{u}{r^2}B\partial t^2$ (§. 19. IV.), la dernière équation deviendra

$$o = \frac{m' r\partial\partial\delta r - m'\delta r.\partial\partial r}{n^2a^3\partial t^2} - \frac{3m'\delta r}{r^2} - \frac{2m'\partial\delta v}{na\partial t}\sqrt{(1-\gamma^2)} + (R).$$

L'équation IV donne $-\frac{m'\delta r}{r^2} = \frac{m'\partial\partial(r\delta r)}{n^2a^3\partial t^2} + (R) + 2\int(\partial R)$, dont le premier terme est $\frac{m'\delta r.\partial\partial r + 2m'\partial r.\partial\delta r + m' r.\partial\partial\delta r}{n^2a^3\partial t^2}$: cette valeur changera l'équation précédente en

$$\frac{2m'\partial\delta v}{na\partial t}\sqrt{(1-\gamma^2)} = \frac{4m' r.\partial\partial\delta r + 6m'\partial r.\partial\delta r + 2m'\delta r.\partial\partial r}{n^2a^3\partial t^2} + 4(R) + 6\int(\partial R),$$

d'où l'on tirera en intégrant,

$$\text{VI. } m'\delta v.\sqrt{(1-\gamma^2)} = \frac{2m' r.\partial\delta r + m'\delta r.\partial r}{na^2\partial t} + 2na\int(R)\partial t + 3na\int\partial t\int(\partial R).$$

§. 166. Reprenons maintenant les équations (3) (f) (§. 159.),

$$\frac{x\partial y - y\partial x}{n^2a^3\partial t} = c = \int\partial t\left\{y\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - x\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\right\} + C,$$

$$\frac{x\partial z - z\partial x}{n^2a^3\partial t} = c' = \int\partial t\left\{z\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - x\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right\} + C',$$

$$\frac{y\partial z - z\partial y}{n^2a^3\partial t} = c'' = \int\partial t\left\{z\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - y\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right\} + C'',$$

C, C′, C″, étant les parties constantes de c, c', c'', ou des élémens qui déterminent le plan de l'orbite. Dans l'orbite non troublée, R étant nul, les quantités c, c', c'', elles-mêmes sont ces constantes, d'où il suit (§. 160. (6)), $\tan^2\eta = \frac{C'^2 + C''^2}{C^2}$, $\cos\eta = \frac{C}{\Pi}$, et $\Pi^2 = \frac{\mu e}{2n^2a^2} = \frac{\mu(1-\gamma^2)}{n^2a^2}$ (§. 161. (11)), donc $C = \frac{\cos\eta}{na}\sqrt{\mu(1-\gamma^2)}$. La première des équations précédentes donnera, en négligeant les produits des masses,

$$(21)\ldots\ldots \frac{n^2a^3\partial t}{x\partial y - y\partial x} = \frac{1}{C} - \frac{1}{C^2}\int\partial t\left\{y\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - x\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\right\};$$

et en ajoutant ensemble la seconde et la troisième, après les avoir multipliées respectivement par y et $-x$, on trouvera

$$\frac{z(x\partial y-y\partial x)}{n^2a^2\partial t}=C'y-C''x+yf\partial t\left\{z\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)-x\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right\}-xf\partial t\left\{z\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)-y\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right\};$$

d'où l'on tire au moyen de l'équation (21),

$$z=\frac{C'y-C''x}{C}-\frac{C'y-C''x}{C^2}f\partial t\left\{y\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)-x\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\right\}$$
$$+\frac{y}{C}f\partial t\left\{z\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)-x\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right\}-\frac{x}{C}f\partial t\left\{z\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)-y\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right\},$$

$\frac{C'y-C''x}{C}$ étant la valeur elliptique de l'ordonnée z, et les termes suivans sa perturbation $m'\delta z$. Il vient de là

$$(22)\ldots\ldots m'\delta z=\begin{cases}\frac{z}{C}f\partial t\left\{x\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)-y\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right\}\\+\frac{y}{C}f\partial t\left\{z\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)-x\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right\}\\+\frac{x}{C}f\partial t\left\{y\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)-z\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\right\}.\end{cases}$$

Maintenant si on nomme β la latitude, s son sinus, on aura $\operatorname{tang}\beta=\frac{z+m'\delta z}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, d'où il suit $m'\delta\operatorname{tg}\beta=\frac{m'\delta z}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{m'\delta z}{r\cos\beta}$, et la différentiation donne $\delta\operatorname{tg}\beta=\frac{\delta\beta}{\cos^2\beta}$, d'où il vient $m'\delta z=\frac{m'r\delta\beta}{\cos\beta}=\frac{m'r\delta s}{\cos^2\beta}=\frac{m'r\delta s}{1-s^2}$. Au moyen de ces valeurs et de $C=\frac{\cos\eta}{na}\sqrt{\mu(1-\gamma^2)}$, l'équation (22) deviendra, en faisant $\mu=1$,

$$\text{VII.}\quad\frac{m'\delta s\cos\eta\sqrt{(1-\gamma^2)}}{a(1-s^2)}=nsf\partial t\left\{x\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)-y\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right\}$$
$$+\frac{ny}{r}f\partial t\left\{z\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)-x\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right\}+\frac{nx}{r}f\partial t\left\{y\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)-z\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\right\}.$$

§. 167. Prenons maintenant l'orbite primitive pour le plan des x, y, comptons de l'aphélie les longitudes v, v', des planètes m, m', la ligne des apsides étant l'axe des x, et faisons $\sin\beta'=s'$: cela posé on aura

$$o=z=\beta=\eta=s,\quad x=r\cos v,\quad y=r\sin v,\quad x'=r'\cos v'\sqrt{(1-s'^2)},$$
$$y'=r'\sin v'\sqrt{(1-s'^2)},\quad z'=r's',$$

ce qui donne (§. 157. (1)),

$$\rho^2=r^2+r'^2-2rr'\cos(v'-v)\sqrt{(1-s'^2)},\text{ donc (§. 158. }(d))$$

$$(F) \ldots\ldots R = \left\{ \begin{array}{l} \frac{m' r \cos(v'-v)}{r'^2} \sqrt{(1-s'^2)} \\ -m' \{ r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v'-v)\sqrt{(1-s'^2}\}^{-\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

$$(R) = \frac{m'(xx'+yy')}{r'^3} - \frac{m'\{x(x'-x)+y(y'-y)\}}{\rho^3}, \text{ ou}$$

$$(F) \ldots\ldots (R) = \frac{m' r \cos(v'-v)}{r'^2} \sqrt{(1-s'^2)} + \frac{m'\{r^2 - rr' \cos(v'-v)\sqrt{(1-s'^2)}\}}{\{r^2+r'^2-2rr' \cos(v'-v)\sqrt{(1-s'^2)}\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$(G) \ldots\ldots \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial r = \frac{m'\partial r \cos(v'-v)}{r'^2}\sqrt{(1-s'^2)} + \frac{m'\partial r\{r - r'\cos(v'-v)\sqrt{(1-s'^2)}\}}{\{r^2+r'^2-2rr'\cos(v'-v)\sqrt{(1-s'^2)}\}^{\frac{3}{2}}};$$

d'où il suit $(R) = r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$. De là on conclura les équations suivantes (§. 164 165. 166.):

pour le *rayon vecteur*,

$$\text{IV.} \quad 0 = \frac{m'\partial\partial(r\delta r)}{\partial t^2} + \frac{m' n^2 a^3 \delta r}{r^3} + n^2 a^3 r \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) + 2n^2 a^3 \int(\partial R),$$

$$\text{V.} \quad \frac{m'\delta r}{a} = \frac{n}{\sqrt{(1-\gamma^2)}} \left\{ \begin{array}{l} \cos v . \int r^2 \sin v \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial t - \sin v . \int r^2 \cos v \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial t \\ + 2\cos v \int r \sin v . \partial t \int(\partial R) - 2 \sin v \int r \cos v . \partial t \int(\partial R) \end{array} \right\},$$

pour la *longitude*,

$$\text{VI.} \quad m'\delta v\sqrt{(1-\gamma^2)} = \frac{2m'r.\partial\delta r + m'\delta r.\partial r}{n a^2 \partial t} + 2na\int r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial t + 3na\int\partial t\int(\partial R),$$

et pour la *latitude*,

$$\text{VII.} \quad 0 = m'\delta s\sqrt{(1-\gamma^2)} + na \sin v . \int r \cos v \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\partial t - na \cos v . \int r \sin v \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\partial t.$$

§. 168. Les équations précédentes renferment toutes les inégalités périodiques et séculaires, et le principal objet de la suite de cet ouvrage est, de développer ces équations, et de les appliquer aux différentes combinaisons qui se présentent dans le système solaire. Je commencerai par la fonction R qui entre dans toutes les formules, et je me bornerai à développer les équations IV, VI, relatives au rayon vecteur et à la longitude, jusqu'à la troisième dimension des excentricités et des inclinaisons, et l'équation VII qui donne la latitude, jusqu'à leur première puissance. L'angle v' qui entre dans les équations précédentes, est la vraie longitude de la planète m', *réduite* ou projétée sur le plan de l'orbite de la planète m (§. 167.). En nommant donc v'' la longitude de m' dans son orbite, Π la longitude de son

noeud ascendant sur le plan de l'orbite de m, ν l'inclinaison de ces deux plans, et δ sa tangente, on aura

$$\sin\nu = \frac{\delta}{\sqrt{(1+\delta^2)}} = \delta(1-\tfrac{1}{2}\delta^2),\ \sin\beta' = s' = \delta(1-\tfrac{1}{2}\delta^2)\sin(v''-\Pi),\ \operatorname{tg}\beta' = \delta\sin(v'-\Pi).$$

Mais on a aussi $\operatorname{tg}\beta' = \frac{s'}{\sqrt{(1-s'^2)}}$, d'où l'on tire $\sqrt{(1-s'^2)} = (1-\tfrac{1}{2}\delta^2)\frac{\sin(v''-\Pi)}{\sin(v'-\Pi)}$,

$$\text{donc } \sin(v'-\Pi) = \frac{(1-\frac{1}{2}\delta^2)\sin(v''-\Pi)}{\{1-\delta^2\sin^2(v''-\Pi)\}^{\frac{1}{2}}},\ \text{et en développant,}$$

$$(a)\ldots\ldots\sin(v'-\Pi) = (1-\tfrac{1}{2}\delta^2)\{1+\tfrac{1}{2}\delta^2\sin^2(v''-\Pi)\}\sin(v''-\Pi).$$

Si δ est nul, il vient $\sin(v'-\Pi) = \sin(v''-\Pi)$, ou $v' = v''$: d'où il suit que $v''-v'$ est fonction de δ^2. Faisons donc $v' = v''-\varepsilon\delta^2$, ensorte que

$$\sin(v'-\Pi) = \sin(v''-\Pi) - \varepsilon\delta^2\cos(v''-\Pi).$$

La comparaison de cette valeur avec (a) donnera

$$\varepsilon\cos(v''-\Pi) = \tfrac{1}{2}\sin(v''-\Pi) - \tfrac{1}{2}\sin^3(v''-\Pi),\ \text{ou}$$
$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\sin(v''-\Pi)\cos(v''-\Pi) = \tfrac{1}{4}\sin 2(v''-\Pi).$$

On a donc $v' = v'' - \frac{\delta^2}{4}\sin 2(v''-\Pi)$, d'où l'on tirera

$$\cos(v'-v) = \cos(v''-v) + \frac{\delta^2}{4}\sin(v''-v)\sin 2(v''-\Pi).$$

Or $\sqrt{(1-s'^2)} = 1-\tfrac{1}{2}s'^2 = 1-\frac{\delta^2}{2}\sin^2(v''-\Pi) = 1-\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^2}{4}\cos 2(v''-\Pi)$, d'où il suit

$$\cos(v'-v)\sqrt{(1-s'^2)} = \cos(v''-v) - \frac{\delta^2}{4}\cos(v''-v) + \frac{\delta^2}{4}\cos(v''+v-2\Pi).$$

En substituant cette valeur dans R (E) (§. 167.), et faisant pour abréger,

$$(b)\ldots\ldots\begin{cases}\dfrac{r\cos(v''-v)}{r'^2} = \mathrm{P}, \quad \dfrac{r\{\cos(v''-v)-\cos(v''+v-2\Pi)\}}{4r'^2} = p,\\ r^2+r'^2-2rr'\cos(v''-v) = \mathrm{Q},\\ \dfrac{rr'}{2}\{\cos(v''-v)-\cos(v''+v-2\Pi)\} = q = 2r'^3p;\end{cases}$$

on trouvera

$$\mathrm{R} = m'\mathrm{P} - m'p\delta^2 - m'(\mathrm{Q}+\delta^2q)^{-\frac{1}{2}} = m'(\mathrm{P}-\mathrm{Q}^{-\frac{1}{2}}) + m'\delta^2(\tfrac{1}{2}\mathrm{Q}^{-\frac{3}{2}}q-p).$$

Faisons

$$(c)\ldots\ldots\mathrm{P}-\mathrm{Q}^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{S},\ \text{et}\ \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{Q}^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{r'^3}\right)q = \mathrm{S}',$$

ensorte que S′ renferme tous les termes dépendans de l'inclinaison, et nommément du carré de sa tangente. Cela posé nous aurons

$$(A) \ldots\ldots R = m' S + m' \delta^2 S'.$$

§. 169. La quantité S renferme les termes indépendans de l'excentricité, aussi bien que ceux qui en dépendent: désignons par B la première partie, ou ce que devient S dans les orbites circulaires, les excentricités étant nulles. En nommant donc, comme ci-dessus, a, a', les demi-axes des orbites, μ, μ' les longitudes moyennes, ϵ, ϵ' leurs époques, n, n' les moyens mouvemens, γ, γ' les excentricités, ϖ, ϖ' les longitudes des périhélies, r, r' les valeurs elliptiques des rayons vecteurs, v, v'' celles des longitudes, $m\,\delta r$, $m\,\delta v$ leurs perturbations, et faisant

$$\mu' - \mu = w, \quad r = a + \Delta r, \quad r = a' + \Delta r', \quad v = \mu + \Delta v, \quad v'' = \mu' + \Delta v',$$

ensorte que

$$(d) \ldots\ldots \mu = \epsilon + nt, \quad \mu' = \epsilon' + n't, \quad \partial\mu = n\partial t, \quad \partial\mu' = n'\partial t;$$

les lois de Kepler fournissent ces équations (II. §. 139.),

$$(e) \ldots\ldots \begin{cases} \frac{\Delta r}{a} = \frac{1}{2}\gamma^2 - \gamma\left(1 - \frac{3}{8}\gamma^2\right)\cos(\mu - \varpi) - \frac{1}{2}\gamma^2 \cos 2(\mu - \varpi) - \frac{3}{8}\gamma^3 \cos 3(\mu - \varpi), \\ \Delta v = \gamma\left(2 - \frac{1}{4}\gamma^2\right)\sin(\mu - \varpi) + \frac{5}{4}\gamma^2 \sin 2(\mu - \varpi) + \frac{13}{12}\gamma^3 \sin 3(\mu - \varpi); \end{cases}$$

et les mêmes équations donneront $\frac{\Delta r'}{a}$ et $\Delta v'$, en marquant d'un trait, γ, μ, ϖ. Si on fait $\gamma = \gamma' = 0$, ou qu'on mette a, a', μ, μ', à la place de r, r', v, v'', dans les équations (b), on aura par (c),

$$(B) \ldots\ldots B = \frac{a \cos w}{a'^2} - (a^2 + a'^2 - 2aa' \cos w)^{-\frac{1}{2}}.$$

Puisque S est une fonction des variables r, r', v, v'', qui devient $= B$, si $\gamma = \gamma' = 0$, on aura par la série connue de Taylor,

$$S = B + \Delta r \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \Delta r' \left(\frac{\partial S}{\partial r'}\right) + \Delta v \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right) + \Delta v' \left(\frac{\partial S}{\partial v''}\right) + \text{cet.}$$

où il faut substituer dans les différences partielles $\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial S}{\partial r'}\right)$, etc. $r = a$, $r' = a'$, $v = \mu$, $v'' = \mu'$, $v'' - v = w$; d'où il vient

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial B}{\partial a}\right), \quad \left(\frac{\partial S}{\partial r'}\right) = \left(\frac{\partial B}{\partial a'}\right), \quad \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial B}{\partial \mu}\right), \quad \left(\frac{\partial S}{\partial v''}\right) = \left(\frac{\partial B}{\partial \mu'}\right), \text{ etc.}$$

La série entière, jusqu'à la troisième dimension des excentricités, sera donc

$$
(C)\ldots S = \begin{cases}
B + \Delta r\left(\frac{\partial B}{\partial a}\right) + \Delta r'\left(\frac{\partial B}{\partial a'}\right) + \Delta v\left(\frac{\partial B}{\partial \mu}\right) + \Delta v\left(\frac{\partial B}{\partial \mu'}\right) + \frac{\Delta r^2}{2}\left(\frac{\partial\partial B}{\partial a^2}\right) + \frac{\Delta r'^2}{2}\left(\frac{\partial\partial B}{\partial a'^2}\right) \\
+ \frac{\Delta v^2}{2}\left(\frac{\partial\partial B}{\partial \mu^2}\right) + \frac{\Delta v''^2}{2}\left(\frac{\partial\partial B}{\partial \mu'^2}\right) + \Delta r \Delta r'\left(\frac{\partial\partial B}{\partial a\, \partial a'}\right) + \Delta r \Delta v\left(\frac{\partial\partial B}{\partial a\, \partial \mu}\right) \\
+ \Delta r \Delta v'\left(\frac{\partial\partial B}{\partial a\, \partial \mu'}\right) + \Delta r' \Delta v\left(\frac{\partial\partial B}{\partial a'\, \partial \mu}\right) + \Delta r' \Delta v'\left(\frac{\partial\partial B}{\partial a'\, \partial \mu'}\right) + \Delta v \Delta v'\left(\frac{\partial\partial B}{\partial \mu\, \partial \mu'}\right) \\
+ \frac{\Delta r^3}{6}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a^3}\right) + \frac{\Delta r'^3}{6}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a'^3}\right) + \frac{\Delta v^3}{6}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial \mu^3}\right) + \frac{\Delta v''^3}{6}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial \mu'^3}\right) + \frac{\Delta r^2 \Delta r'}{2}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a^2 \partial a'}\right) \\
+ \frac{\Delta r^2 \Delta v}{2}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a^2 \partial \mu}\right) + \frac{\Delta r^2 \Delta v'}{2}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a^2 \partial \mu'}\right) + \frac{\Delta r \Delta r'^2}{2}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a \partial a'^2}\right) + \frac{\Delta r \Delta v^2}{2}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a \partial \mu^2}\right) \\
+ \frac{\Delta r \Delta v'^2}{2}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a \partial \mu'^2}\right) + \frac{\Delta r'^2 \Delta v}{2}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a'^2 \partial \mu}\right) + \frac{\Delta r'^2 \Delta v''}{2}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a'^2 \partial \mu'}\right) + \frac{\Delta r' \Delta v^2}{2}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a' \partial \mu^2}\right) \\
+ \frac{\Delta r' \Delta v''^2}{2}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a' \partial \mu'^2}\right) + \frac{\Delta v^2 \Delta v''}{2}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial \mu^2 \partial \mu'}\right) + \frac{\Delta v \Delta v''^2}{2}\left(\frac{\partial^3 B}{\partial \mu \partial \mu'^2}\right) \\
+ \Delta r \Delta r' \Delta v\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a \partial a' \partial \mu}\right) + \Delta r \Delta r' \Delta v'\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a \partial a' \partial \mu'}\right) + \Delta r' \Delta v \Delta v''\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a \partial \mu \partial \mu'}\right) \\
+ \Delta r' \Delta v \Delta v''\left(\frac{\partial^3 B}{\partial a' \partial \mu \partial \mu'}\right).
\end{cases}
$$

Opérons de la même façon sur les fonctions Q et q, et faisons pour cela

$$(f)\ldots\ldots(a^2 + a'^2 - 2aa'\cos w)^{-\frac{3}{2}} = \mathfrak{B}, \quad \frac{aa'}{2}\{\cos(\mu' - \mu) - \cos(\mu' + \mu - 2\Pi\} = \mathfrak{b}.$$

Les fonctions Q et q étant déjà multipliées par δ^2 (§. 168. (A) (c)), elles ne seront développées ici que jusqu'à la première puissance des excentricités. Or puisque $Q^{-\frac{3}{2}}$ se change en $\mathfrak{B}$, et q en $\mathfrak{b}$, lorsque les excentricités sont nulles, on aura comme précédemment,

$$Q^{-\frac{3}{2}} = \mathfrak{B} + \Delta r\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial a}\right) + \text{cet.}; \quad q = \mathfrak{b} + \Delta r\left(\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial a}\right) + \text{cet.}; \quad \frac{1}{r'^3} = \frac{1}{a'^3} - \frac{3\Delta r'}{a'^4};$$

partant (§. 158. (c))

$$
(D)\ldots\ldots S' = \begin{cases}
\frac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{b} + \frac{1}{2}\mathfrak{b}\left\{\Delta r\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial a}\right) + \Delta r'\left(\frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial a'}\right) + \Delta v\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mu}\right) + \Delta v''\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mu'}\right)\right\} \\
\qquad + \frac{1}{2}\mathfrak{B}'\left\{\Delta r\left(\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial a}\right) + \Delta r'\left(\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial a'}\right) + \Delta v\left(\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \mu}\right) + \Delta v''\left(\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial \mu'}\right)\right\};
\end{cases}
$$

$$\mathfrak{B}' \text{ étant } = \mathfrak{B} - \frac{1}{a'^3}.$$

§. 170. Si l'on développe le trinome $(a^2 + a'^2 - 2aa'\cos w)^{-r}$ en une série ordonnée suivant les puissances de $\cos w$, et qu'on exprime chaque

puissance de $\cos w$ par les cosinus des angles multiples de w, on trouvera des séries de cette forme,

$$(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos w)^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{M} + \mathrm{N}^{(i)} \cos iw,$$

$$(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos w)^{-\frac{3}{2}} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}^{(i)} \cos iw,$$

i s'étendant à tous les nombres entiers positifs. Ainsi on aura (B) (f) (§. 169.)

$$(g) \ldots\ldots \mathrm{B} = \frac{a \cos w}{a'^2} - \mathrm{M} - \mathrm{N}^{(i)} \cos iw, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}^{(i)} \cos iw.$$

Si on veut étendre i à tous les nombres entiers, soit positifs soit négatifs, ce qui sera fort commode pour le calcul, on n'a qu'à diviser par 2 les coefficiens $\mathrm{N}^{(i)}$, $\mathfrak{N}^{(i)}$, donnés par le développement des puissances de $\cos w$, parce que $\cos(-iw) = \cos iw$. Supposons donc

$$(\mathrm{F}) \ldots\ldots \mathrm{B} = \tfrac{1}{2} \mathrm{A}^{(0)} + \tfrac{1}{2} \mathrm{A}^{(i)} \cos iw, \quad (\mathrm{F}) \ldots\ldots \mathfrak{B} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{A}^{(0)} + \tfrac{1}{2} \mathfrak{A}^{(i)} \cos iw,$$

i s'étendant à tous les nombres entiers, tant positifs que négatifs, excepté zéro, vu que le cas où $i = 0$, est représenté par les coefficiens $\mathrm{A}^{(0)}$ $\mathfrak{A}^{(0)}$. Il faut observer, que $\mathrm{A}^{(-i)} = \mathrm{A}^{(i)}$, $\mathfrak{A}^{(-i)} = \mathfrak{A}^{(i)}$, $\left(\frac{\partial \mathrm{A}^{(-i)}}{\partial a}\right) = \left(\frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a}\right)$, etc. et que le terme $\frac{a}{a'^2}$ doit être ajouté au coefficient $\mathrm{A}^{(1)}$, parce que $\mathrm{B} = \frac{a \cos w}{a'^2} - (a^2 + a'^2 - 2aa' \cos w)^{-\frac{1}{2}}$.

§. 171. Pour déterminer les coefficiens A, $\mathfrak{A}$, faisons

$(h) \ldots\ldots \frac{a}{a'} = \alpha$, $1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos w = \lambda$, $a^2 + a'^2 - 2aa' \cos w = \mathrm{L}$, et supposons

$$(i) \ldots\ldots \begin{cases} \lambda^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} b^{(0)} + b^{(1)} \cos w + \ldots\ldots + b^{(i)} \cos iw, \\ \lambda^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2} c^{(0)} + c^{(1)} \cos w + \ldots\ldots + c^{(i)} \cos iw; \end{cases}$$

i s'étendant seulement aux nombres positifs. Cela posé on aura

$$\mathrm{L} = a'^2 \lambda, \ \mathrm{L}^{-\frac{1}{2}} = \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{a'}, \ \ \mathrm{L}^{-\frac{3}{2}} = \frac{\lambda^{-\frac{3}{2}}}{a'^3}, \ \ \mathrm{B} = \frac{a \cos w}{a'^2} - \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{a'}, \ \ \mathfrak{B} = \frac{\lambda^{-\frac{3}{2}}}{a'^3}.$$

Or nous avons supposé $\mathrm{B} = \frac{1}{2} \mathrm{A}^{(0)} + \mathrm{A}^{(i)} \cos iw$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{2} \mathfrak{A}^{(0)} + \mathfrak{A}^{(i)} \cos iw$, si i ne s'étend qu'aux nombres positifs: d'où il suit $\mathrm{A}^{(0)} = -\frac{b^{(0)}}{a'}$, $\mathrm{A}^{(1)} = \frac{\alpha - b^{(1)}}{a'}$, $\mathrm{A}^{(i)} = -\frac{b^{(i)}}{a'}$, ou

$$(1) \ldots\ldots a'\mathrm{A}^{(0)} = -b^{(0)}, \ a'\mathrm{A}^{(1)} = \alpha - b^{(1)}, \ a'\mathrm{A}^{(i)} = -b^{(i)}, \ a'^3 \mathfrak{A}^{(0)} = c^{(0)}, \ a'^3 \mathfrak{A}^{(i)} = c^{(i)}.$$

Les coefficiens A, $\mathfrak{A}$, étant ainsi donnés par b, c, déterminons maintenant ces derniers. Supposons pour cela en général,

$$(k) \ldots\ldots \lambda^{-r} = p^{(0)} + p^{(1)} \cos w + \ldots\ldots + p^{(i)} \cos iw,$$

i s'étendant à tous les nombres entiers et positifs. On aura

$$-\frac{\partial . \lambda^{-r}}{\lambda^{-r} . \partial w} = \frac{2 r \alpha \sin w}{1 + \alpha^2 - 2 \alpha \cos w},$$

d'où l'on tirera, en différentiant la série (k) par rapport à w,

$$\frac{2 r \alpha \sin w}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos w} =$$

$$\frac{p^{(1)} \sin w + \ldots\ldots + (i-2) p^{(i-2)} \sin (i-2) w + (i-1) p^{(i-1)} \sin (i-1) w + i p^{(i)} \sin iw}{p^{(0)} + p^{(1)} \cos w + \ldots\ldots + p^{(i-2)} \cos (i-2) w + p^{(i-1)} \cos (i-1) w + p^{(i)} \cos iw}.$$

En multipliant en croix, on trouvera le coefficient de $\sin (i-1) w$ dans le premier membre $= r\alpha \{p^{(i-2)} - p^{(i)}\}$, et dans le second membre $= (i-1) \ (1+\alpha^2) p^{(i-1)} - (i-2) \alpha p^{(i-2)} - i\alpha p^{(i)}$. En égalant ces deux valeurs, on aura

$$(l) \ldots\ldots p^{(i)} = \frac{(i-1)(1+\alpha^2) p^{(i-1)} - (i-2+r) \alpha p^{(i-2)}}{(i-r)\alpha}.$$

Supposons que le développement de λ^{-r-1} donne la série

$$q^{(0)} + q^{(1)} \cos w + \ldots\ldots + q^{(i-1)} \cos (i-1) w + q^{(i)} \cos iw + q^{(i+1)} \cos (i+1) w;$$

et multiplions par $1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos w = \lambda$: il viendra

$$\lambda^{-r} = \ldots\ldots - \alpha q^{(i-1)} \{\cos (i-2) w + \cos iw\}$$

$$+ (1+\alpha^2) q^{(i)} \cos iw - \alpha q^{(i+1)} \{\cos iw + \cos (i+2) w\}:$$

le coefficient de $\cos iw$ est donc $= -\alpha q^{(i-1)} + (1+\alpha^2) q^{(i)} - \alpha q^{(i+1)}$.
Mais on a aussi, par (k), $\lambda^{-r} = \ldots\ldots + p^{(i)} \cos iw$, d'où l'on tirera

$$(m) \ldots\ldots p^{(i)} = -\alpha q^{(i-1)} + (1+\alpha^2) q^{(i)} - \alpha q^{(i+1)}.$$

La formule (l) a lieu, quelle que soit la valeur du nombre r: on peut donc y mettre $r+1$ à la place de r, ce qui changera λ^{-r} en λ^{-r-1}, et par conséquent p en q. Si l'on fait en même tems $i = i+1$, la formule (l) donnera

$$(n) \ldots\ldots \alpha q^{(i+1)} = \frac{i(1+\alpha^2) q^{(i)} - (i+r) \alpha q^{(i-1)}}{i-r},$$

ce qui étant substitué en (m), donnera

$$(o) \ldots\ldots p^{(i)} = \frac{2 r \alpha q^{(i-1)} - r(1+\alpha^2) q^{(i)}}{i-r},$$

et en changeant i en $i+1$,

$$p^{(i+1)} = \frac{2 r \alpha q^{(i)} - r(1+\alpha^2) q^{(i+1)}}{i+1-r}.$$

Si on met au lieu de $q^{(i+1)}$ sa valeur ( ) dans la dernière équation, elle deviendra $p^{(i+1)} = \frac{r(i+r)\alpha(1+\alpha^2)p^{(i-1)} - r(i+2r\alpha^2+i\alpha^4)q^{(i)}}{(i-r)(i+1-r)\alpha}$; d'où ils suit

$$\frac{2r\alpha}{1-r}q^{(i-1)} = \frac{2(i+1-r)\alpha}{(i+r)(1+\alpha^2)}p^{(i+1)} + \frac{2r(i+2r\alpha^2+i\alpha^4)}{(i+r)(i-r)(1+\alpha^2)}q^{(i)}.$$

Mais l'équation (o) donne $\frac{2r\alpha}{1-r}q^{(i-1)} = p^{(i)} + \frac{r(1+\alpha^2)}{i-r}q^{(i)}$: en comparent ces deux valeurs de $\frac{2r\alpha}{1-r}q^{(i-1)}$, on aura l'équation

$$(p)\ldots\ldots q^{(i)} = \frac{(i+r)(1+\alpha^2)p^{(i)} - 2(i+1-r)\alpha p^{(i+1)}}{r(1-\alpha^2)^2}.$$

Si l'on fait maintenant $r=\frac{1}{2}$, les coefficiens p, q, se changeront en b, c, et les équations (l) (p) donneront

$$(2)\ldots\ldots b^{(i)} = \frac{2(i-1)(1+\alpha^2)b^{(i-1)} - (2i-3)\alpha b^{(i-2)}}{(2i-1)\alpha},$$

$$(3)\ldots\ldots c^{(i)} = \frac{2i+1}{(1-\alpha^2)^2}\{(1+\alpha^2)b^{(i)} - 2\alpha b^{(i+1)}\}.$$

Au moyen de la formule (1) on trouvera chaque coefficient de la série $\lambda^{-\frac{1}{2}}$, par les deux termes précédens, ou par les deux premiers coefficiens $b^{(0)}$, $b^{(1)}$; et la formule (3) donnera tous les coefficiens de $\lambda^{-\frac{3}{2}}$, ceux de $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ étant connus. Tout se réduit donc à calculer les deux premiers coefficiens $b^{(0)}$, $b^{(1)}$.

§. 172. Soit $\lambda^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}h^{(0)} + h^{(i)}\cos iw + \text{cet.}$

et désignons par e le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Cela posé on aura, en faisant $w\sqrt{-1} = r$,

$2\cos w = e^r + e^{-r}$, partant $\lambda = (1-\alpha e^r)(1-\alpha e^{-r})$ (§. 171). d'où il viendra

$$\lambda^{\frac{1}{2}} = \left\{1 - \frac{\alpha}{2}e^r - \frac{\alpha^2}{2.4}e^{2r} - \frac{3\alpha^3}{2.4.6}e^{3r} - \ldots - \frac{3.5.7\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}\alpha^n e^{nr}\right\} \times$$

$$\left\{1 - \frac{\alpha}{2}e^{-r} - \frac{\alpha^2}{2.4}e^{-2r} - \ldots - \frac{3.5.7\ldots(2n-5)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\alpha^{n-1}e^{-(n-1)r} - \ldots\right\}.$$

En multipliant ensemble les termes analogues de ces deux séries, qui contiennent la même puissance de α, on aura le terme indépendant de r ou de w,

$$A = 1 + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^4}{(2.4)^2} + \frac{3^2.\alpha^6}{(2.4.6)^2} + \ldots + \frac{3^2.5^2.7^2\ldots(2n-3)^2}{(2.4.6\ldots 2n)^2}\alpha^{2n}.$$

Si l'on multiplie chaque terme par celui qui le précède dans l'autre série, on aura le terme qui dépend de r et de $-r$,

$$B = -\frac{\alpha}{2}\left\{e^{r}+e^{-r}\right\}\left\{1-\frac{\alpha^2}{2.4}-\frac{3\,\alpha^4}{2.4^2.6}-\ldots\ldots-\frac{3^2.5^2.7^2\ldots(2n-5)^2(2n-3)}{2.4^2.6^2\ldots.(2n-2)^2.2n}\alpha^{2n-2}\right\}=$$

$$-\alpha\cos w\left\{1-\frac{\alpha^2}{2.4}-\frac{3\,\alpha^4}{2.4^2.6}-\ldots\ldots-\frac{3^2.5^2.7^2\ldots..(2n-5)^2(2n-3)}{2.4^2.6^2\ldots..(2n-2)^2.2n}\alpha^{2n-2}\right\};$$

et $\lambda^{\frac{1}{2}} = A + B + \text{cet.}$ les termes suivans dépendant de $2r$, ou de $2w$, $3w$, etc. Mais on a aussi

$$\lambda^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}h^{(0)} + h^{(1)}\cos w + \text{cet.} \text{ d'où l'on tirera}$$

$$\frac{1}{2}h^{(0)} = A, \text{ et } h^{(1)} = -\alpha\left\{1-\frac{\alpha^2}{2.4}-\frac{3\,\alpha^4}{2.4^2.6}-\text{cet.}\right\}, \text{ ou}$$

$$(4)\ldots..\frac{1}{2}h^{(0)} = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha^2+\left(\frac{1}{2.4}\right)^2\alpha^4+\left(\frac{3}{2.4.6}\right)^2\alpha^6+\ldots\ldots+\left(\frac{3.5.7\ldots.(2n-3)}{2.4.6\ldots..2n}\right)^2\alpha^{2n},$$

$$(5)\ldots..h^{(1)} = -\alpha\left\{1-\frac{\alpha^2}{2.4}-\frac{3\,\alpha^4}{2.4^2.6}-\ldots\ldots-\frac{3^2.5^2.7^2\ldots..(2n-5)^2(2n-3)}{2.4^2.6^2\ldots..(2n-2)^2.2n}\alpha^{2n-2}\right\}\ (^1).$$

Pour tirer de là les valeurs de $b^{(0)}$, $b^{(1)}$, faisons dans l'équation (p) (§. 171.), $r = -\frac{1}{2}$: alors p deviendra le coefficient de $\lambda^{-r} = \lambda^{\frac{1}{2}}$, et q celui de $\lambda^{-r-1} = \lambda^{-\frac{1}{2}}$, donc $p = h$, $q = b$; ainsi la formule (p) donnera

$$b^{(i)} = \frac{(4i+6)\,\alpha\, h^{(i+1)} - (2i-1)(1+\alpha^2)\,h^{(i)}}{(1-\alpha^2)^2},$$

et en faisant $i = 0$ et $i = 1$,

$$b^{(0)} = \frac{6\,\alpha\, h^{(1)} + (1+\alpha^2)\,h^{(0)}}{(1-\alpha^2)^2}, \qquad b^{(1)} = \frac{10\,\alpha\, h^{(2)} - (1+\alpha^2)\,h^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2},$$

d'où il faut chasser $h^{(2)}$, ce qui se fera au moyen de la formule (l) (§. 171.), laquelle, en faisant $r = -\frac{1}{2}$, $i = 2$, devient

$$h^{(2)} = \frac{2(1+\alpha^2)\,h^{(1)} + \alpha\, h^{(0)}}{5\,\alpha}, \text{ ce qui étant substitué, donnera}$$

$$(5)\ldots..\ b^{(0)} = \frac{(1+\alpha^2)\,h^{(0)} + 6\,\alpha\, h^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2}, \quad b^{(1)} = \frac{2\,\alpha\, h^{(0)} + 3(1+\alpha^2)\,h^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

Au reste, il est aisé de voir qu'on peut toujours supposer α moindre que l'unité, pour que les séries précédentes soient convergentes, en prenant pour α le rapport $\frac{a}{a'}$ ou $\frac{a'}{a}$, selon que m est une planète inférieure ou supérieure; car on va voir (§. 174.), que dans le second cas, on n'a qu'à substituer $\frac{b^{(i)}}{\alpha}$ pour $b^{(i)}$.

(1) Voy. *Théorie des var. séc. des élém. des Plan.* dans les *Mém. de Berlin, Ann.* 1781. *pag.* 257. *etc.*

On trouvera pareillement, par la formule (3) (§. 171.),

$$(6) \ldots\ldots c^{(0)} = \frac{(1+\alpha^2)b^{(0)} - 2\alpha b^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2}, \quad c^{(1)} = \frac{3((1+\alpha^2)b^{(1)} - 2\alpha b^{(2)})}{(1-\alpha^2)^2} = \frac{2\alpha b^{(0)} - (1+\alpha^2)b^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

§. 173. Si on différentie l'équation (i) (§. 171.) par rapport à α, il viendra

$$-\frac{\lambda^{-\frac{3}{2}}}{2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \text{ ou } \lambda^{-\frac{3}{2}}(\cos w - \alpha) = \frac{1}{2}\frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} + \ldots\ldots + \frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha}\cos iw.$$

Mais $\cos w - \alpha = \frac{1-\alpha^2-\lambda}{2\alpha}$, d'où l'on conclura

$$\frac{(1-\alpha^2)\lambda^{-\frac{3}{2}}}{2\alpha} - \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{2\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha}\cos iw.$$

Si l'on substitue $\lambda^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}c^{(0)} + c^{(i)}\cos iw$, $\lambda^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}b^{(0)} + b^{(i)}\cos iw$, (i) (§. 171.), on aura

$$\frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha} = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}c^{(i)} - \frac{b^{(i)}}{2\alpha};$$ d'où l'on tirera, par l'équation (3) (§. 171.),

$$(7) \ldots\ldots \frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha} = \frac{i + (i+1)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)} b^{(i)} - \frac{2i+1}{1-\alpha^2} b^{(i+1)};$$ partant

$$\frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} = \frac{\alpha b^{(0)} - b^{(1)}}{1-\alpha^2}, \quad \frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha}, \text{ etc.}$$

Les différentiations successives donneront, en substituant (7),

$$(8) \ldots\ldots \frac{\partial\partial b^{(i)}}{\partial \alpha^2} = \frac{i(i-1) - 2i(i-1)\alpha^2 + (i+1)(i+2)\alpha^4}{\alpha^2(1-\alpha^2)^2} b^{(i)} + \frac{(2i+1)(1-3\alpha^2)}{\alpha(1-\alpha^2)^2} b^{(i+1)},$$

$$(9) \ldots\ldots \frac{\partial^3 b^{(i)}}{\partial \alpha^3} =$$

$$\frac{i(i-1)(i-2) - (i^3-12i^2+3i-1)\alpha^2 - (i^3+15i^2-6i-1)\alpha^4 + (i+1)(i+2)(i+3)\alpha^6}{\alpha^3(1-\alpha^2)^3} b^{(i)}$$

$$- \frac{(2i+1)[i^2+2-(2i^2+5)\alpha^2+(i^2+11)\alpha^4]}{\alpha^2(1-\alpha^2)^3} b^{(i+1)}.$$

Si on différentie l'équation (3) (§. 171.), et qu'on substitue les valeurs précédentes, on trouvera

$$(10) \ldots\ldots \frac{\partial c^{(i)}}{\partial \alpha} = \frac{2i+1}{\alpha(1-\alpha^2)^3}\left\{ [i - (2i-5)\alpha^2 + (i+3)\alpha^4] b^{(i)} - (1+7\alpha^2)\alpha b^{(i+1)} \right\},$$

$$(11) \ldots\ldots \frac{\partial\partial c^{(i)}}{\partial \alpha^2} = \frac{2i+1}{\alpha^2(1-\alpha^2)^4} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} i(i-1) + (4+9i-i^2)\alpha^2 - (i^2+15i-32)\alpha^4 \\ + (i+3)(i+4)\alpha^6 \end{array} \right\} b^{(i)} \\ - [2i-1+2(9-2i^2)\alpha^2+(2i+31)\alpha^4]\,\alpha b^{(i+1)} \end{array} \right\},$$

et ainsi du reste.

Les coefficiens $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, étant des fonctions de α, on peut exprimer le terme général par $b^{(i)} = \mathrm{R}\,\alpha^r$, ce qui donne $\frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha} = \mathrm{R}\,r\,\alpha^{r-1} = \mathrm{R}\,r\,\frac{a^{r-1}}{a'^{r-1}}$. Mais l'équation $b^{(i)} = \mathrm{R}\,\frac{a^r}{a'^r}$ donne $\frac{\partial b^{(i)}}{\partial a} = \mathrm{R}\,r\,\frac{a^{r-1}}{a'^r}$, d'où il résulte $\frac{\partial b^{(i)}}{\partial a} = \frac{1}{a'} \cdot \frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha}$. On trouvera de la même manière $\frac{\partial c^{(i)}}{\partial a} = \frac{1}{a'} \cdot \frac{\partial c^{(i)}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \partial b^{(i)}}{\partial a^2} = \frac{1}{a'^2} \cdot \frac{\partial \partial b^{(i)}}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^3 b^{(i)}}{\partial a^3} = \frac{1}{a'^3} \cdot \frac{\partial^3 b^{(i)}}{\partial \alpha^3}$, et ainsi du reste. Si l'on substitue ces valeurs dans les différentielles des équations (1) (§. 171.), on aura $a' \cdot \frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a} = -\frac{\partial b^{(i)}}{\partial a} = -\frac{1}{a'} \cdot \frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha}$, donc

$$
(12) \ldots\ldots \begin{cases}
a'^2 \cdot \frac{\partial \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a} = -\frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha}, \quad a'^2 \cdot \frac{\partial \mathrm{A}^{(1)}}{\partial a} = 1 - \frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha}, \quad a'^2 \cdot \frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a} = -\frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha}, \\
a'^3 \cdot \frac{\partial \partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a^2} = -\frac{\partial \partial b^{(i)}}{\partial \alpha^2}, \quad a'^4 \cdot \frac{\partial^3 \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a^3} = -\frac{\partial^3 b^{(i)}}{\partial \alpha^3}, \\
a'^4 \cdot \frac{\partial \mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a} = \frac{\partial c^{(i)}}{\partial \alpha}, \quad a'^5 \cdot \frac{\partial \partial \mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a^2} = \frac{\partial \partial c^{(i)}}{\partial \alpha^2}, \text{ etc.}
\end{cases}
$$

§. 174. Les formules précédentes, relatives à l'action de la planète m' sur m, serviront en même tems, avec de legers changemens, à déterminer les perturbations de m' par l'action de m. Si l'on nomme $'b^{(i)}$, $'c^{(i)}$, $'\mathrm{A}^{(i)}$, $'\mathfrak{A}^{(i)}$, ce que deviennent $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $\mathrm{A}^{(i)}$, $\mathfrak{A}^{(i)}$, relativement à la planète m', il est aisé de voir, que les deux derniers coefficiens n'éprouveront aucun changement, parceque le trinome $a^2 + a'^2 - 2aa'\cos w = \mathrm{L}$ reste le même, si l'on change a en a', a' en a, et w en $-w$. Il faut cependant excepter $\mathrm{A}^{(1)}$, dont le terme à ajouter (§. 170.) devient $\frac{a'}{a^2}$ au lieu de $\frac{a}{a'^2}$. Cela posé, les équations (1) (§. 171.) donnent

$$'b^{(i)} = -a\,\mathrm{A}^{(i)}, \qquad 'c^{(i)} = a^3\,\mathfrak{A}^{(i)}.$$

Ainsi le calcul qu'on a fait pour la planète m, s'appliquera à la planète m', à l'aide des formules suivantes:

$$
(r) \ldots\ldots 'b^{(i)} = \alpha\, b^{(i)}, \; 'c^{(i)} = \alpha^3 c^{(i)}, \; '\mathrm{A}^{(i)} = \mathrm{A}^{(i)}, \; '\mathfrak{A}^{(i)} = \mathfrak{A}^{(i)}, \; '\mathrm{A}^{(1)} = \frac{1}{\alpha\, a} - \frac{b^{(1)}}{a'},
$$

$$
a'\;'\mathrm{A}^{(i)} = -b^{(i)}, \quad a'\;'\mathrm{A}^{(1)} = \frac{1}{\alpha^2} - b^{(1)}, \quad a'^3\;'\mathfrak{A}^{(i)} = c^{(i)}.
$$

§. 175. Pour ce qui regarde les rapports différentiels, l'équation (B) (§. 169.) donnera

$$\frac{\partial B}{\partial a}=\frac{\cos w}{a'^2}+(a-a'\cos w)L^{-\frac{3}{2}},\quad \frac{\partial B}{\partial a'}=-\frac{2a\cos w}{a'^3}+(a'-a\cos w)L^{-\frac{3}{2}},$$

d'où il résulte

$$a.\frac{\partial B}{\partial a}+a'.\frac{\partial B}{\partial a'}=-\frac{a\cos w}{a'^2}+L^{-\frac{1}{2}}=-B, \text{ ou}$$

$$a'.\frac{\partial B}{\partial a'}=-B-a\frac{\partial B'}{\partial a};\ a'^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'}=b^{(i)}+a\frac{\partial b^{(i)}}{\partial a};\ a'^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a'}=\frac{1}{a^2}+b^{(1)}+a\frac{\partial b^{(1)}}{\partial a}.$$

Les différentiations successives donneront

$$a'.\frac{\partial\partial B}{\partial a\partial a'}=-2\frac{\partial B}{\partial a}-a.\frac{\partial\partial B}{\partial a^2},$$

$$\frac{\partial.a'\frac{\partial B}{\partial a'}}{\partial a'} \text{ ou } \frac{\partial B}{\partial a'}+a'\frac{\partial\partial B}{\partial a'^2}=-\frac{\partial B}{\partial a'}-a\frac{\partial\partial B}{\partial a\partial a'},\text{ donc } a'\frac{\partial\partial B}{\partial a'^2}=-2\frac{\partial B}{\partial a'}-a\frac{\partial\partial B}{\partial a\partial a'};$$

$$a'\frac{\partial^3 B}{\partial a^2\partial a'}=-3\frac{\partial\partial B}{\partial a^2}-a\frac{\partial^3 B}{\partial a^3};\quad a'.\frac{\partial^3 B}{\partial a\partial a'^2}=-3\frac{\partial\partial B}{\partial a\partial a'}-a\frac{\partial^3 B}{\partial a^2\partial a'};$$

$$\frac{\partial.a'\frac{\partial\partial B}{\partial a'^2}}{\partial a'} \text{ ou } \frac{\partial\partial B}{\partial a'^2}+a'\frac{\partial^3 B}{\partial a'^3}=-2\frac{\partial\partial B}{\partial a'^2}-a\frac{\partial^3 B}{\partial a\partial a'^2},\text{ donc}$$

$$a'\frac{\partial^3 B}{\partial a'^3}=-3\frac{\partial\partial B}{\partial a'^2}-a\frac{\partial^3 B}{\partial a\partial a'^2}.$$

Si l'on substitue successivement les valeurs qu'on aura trouvées, il viendra

$$(H)\ldots\ldots\begin{cases} a'\frac{\partial B}{\partial a'}=-B-a\frac{\partial B}{\partial a},\ aa'\frac{\partial\partial B}{\partial a\partial a'}=-2a\frac{\partial B}{\partial a}-a^2\frac{\partial\partial B}{\partial a^2}, \\ a'^2\frac{\partial\partial B}{\partial a'^2}=2B+4a\frac{\partial B}{\partial a}+a^2\frac{\partial\partial B}{\partial a^2},\ a^2a'\frac{\partial^3 B}{\partial a^2\partial a'}=-3a^2\frac{\partial\partial B}{\partial a^2}-a^3\frac{\partial^3 B}{\partial a^3}, \\ aa'^2\frac{\partial^3 B}{\partial a\partial a'^2}=6a\frac{\partial B}{\partial a}+6a^2\frac{\partial\partial B}{\partial a^2}+a^3\frac{\partial^3 B}{\partial a^3}, \\ a'^3\frac{\partial^3 B}{\partial a'^3}=-6B-18a\frac{\partial B}{\partial a}-9a^2\frac{\partial\partial B}{\partial a^2}-a^3\frac{\partial^3 B}{\partial a^3}, \\ a'^4\frac{\partial^4 B}{\partial a'^4}=24B+96a\frac{\partial B}{\partial a}+72a^2\frac{\partial\partial B}{\partial a^2}+16a^3\frac{\partial^3 B}{\partial a^3}+a^4\frac{\partial^4 B}{\partial a^4};\ \text{etc.} \end{cases}$$

En opérant de la même manière sur l'équation (f) (§. 169.), on trouvera

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial a}=-3(a-a'\cos w)L^{-\frac{5}{2}},\quad \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial a'}=-3(a'-a\cos w)L^{-\frac{5}{2}},\ \text{partant}$$

$$a\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial a}+a'\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial a'}=-3L^{-\frac{3}{2}}=-3\mathfrak{B},\ \text{d'où il viendra}$$

$$(J)\ldots\ldots\begin{cases} a'\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial a'}=-3\mathfrak{B}-a\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial a}, \quad a'^2\dfrac{\partial\partial\mathfrak{B}}{\partial a'^2}=12\,\mathfrak{B}+8a\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial a}+a^2\dfrac{\partial\partial\mathfrak{B}}{\partial a^2}, \\ a'\dfrac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial a'}=-3\mathfrak{B}'-a\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial a}; \quad a'\dfrac{\partial\mathfrak{b}}{\partial a'}=\mathfrak{b};\ aa'\dfrac{\partial\partial\mathfrak{b}}{\partial a\,\partial a'}=\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Il est aisé de voir, qu'en vertu des équations (F) (F) (§. 170.), les mêmes relations ont lieu, si l'on met $A^{(i)}$ à la place de B, et $\mathfrak{A}^{(i)}$ au lieu de $\mathfrak{B}$.

L'angle w étant $=\mu'-\mu$, les équations (B) (f) (§. 169.) donneront les relations suivantes:

$$(K)\ldots\ldots\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial\mu'}=-\dfrac{\partial B}{\partial\mu}, \quad \dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\mu'}=-\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\mu}, \quad \dfrac{\partial\partial B}{\partial\mu\,\partial\mu'}=-\dfrac{\partial\partial B}{\partial\mu^2}, \quad \dfrac{\partial\partial B}{\partial\mu'^2}=\dfrac{\partial\partial B}{\partial\mu^2}, \\ \dfrac{\partial^3 B}{\partial\mu^2\,\partial\mu'}=-\dfrac{\partial^3 B}{\partial\mu^3}, \quad \dfrac{\partial^3 B}{\partial\mu\,\partial\mu'^2}=\dfrac{\partial^3 B}{\partial\mu^3}, \\ \dfrac{\partial^3 B}{\partial\mu'^3}=-\dfrac{\partial^3 B}{\partial\mu^3}, \quad \dfrac{\partial\mathfrak{b}}{\partial\mu'}=\dfrac{\partial\mathfrak{b}}{\partial\mu}-aa'\sin w. \end{cases}$$

Au moyen des formules (H) (I) (K), on peut chasser les différentielles $\partial a'$, $\partial\mu'$, des équations (C) (D) (§. 169.); ce qui étant fait, il suffira pour développer ces équations, de connaître les différentielles de B, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$, par rapport à a et μ. Pour cela la différentiation des équations (E) (F) (f) donnera

$$(L)\ldots\ldots\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial a}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial A^{(0)}}{\partial a}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\cos iw, \quad \dfrac{\partial\partial B}{\partial a^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\cos iw;\ \text{etc.} \\ \dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial a}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathfrak{A}^{(0)}}{\partial a}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a}\cos iw, \quad a\dfrac{\partial\mathfrak{b}}{\partial a}=\mathfrak{b}; \quad \dfrac{\partial B}{\partial\mu}=\dfrac{i}{2}A^{(i)}\sin iw, \\ \dfrac{\partial\partial B}{\partial\mu^2}=-\dfrac{i^2}{2}A^{(i)}\cos iw; \quad \dfrac{\partial^3 B}{\partial\mu^3}=-\dfrac{i^3}{2}A^{(i)}\sin iw; \quad \dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\mu}=\dfrac{i}{2}\mathfrak{A}^{(i)}\sin iw, \\ \dfrac{\partial\mathfrak{b}}{\partial\mu}=\dfrac{aa'}{2}\{\sin w+\sin(\mu'+\mu-2\Pi)\}, \quad \dfrac{\partial\partial\mathfrak{b}}{\partial a^2}=0. \end{cases}$$

§. 176. Substituons maintenant les valeurs (H) (I) (K) (L) dans les équations (C) (D) §. 169.), et faisons pour abréger,

$$(s)\ldots\ldots\begin{cases} \dfrac{\Delta r}{a}-\dfrac{\Delta r'}{a'}=f,\ 1-\dfrac{\Delta r'}{a'}=f',\ 1-\dfrac{2\Delta r'}{a'}=f'',\ 1-\dfrac{3\Delta r'}{a'}=f''',\ 1+\left(\dfrac{\Delta r'}{a'}\right)^2=g, \\ f''+3\left(\dfrac{\Delta r'}{a'}\right)^2=h,\ \Delta v-\Delta v''=t,\ \Delta v+\Delta v''=t',\ g-\dfrac{i^2}{2}t^2=g', \\ h+g'-g=h',\ f+\left(\dfrac{\Delta r'}{a'}\right)^2-\dfrac{i^2}{6}t^2=g'';\ \mu'+\mu-2\Pi=\psi. \end{cases}$$

Cela fait, l'équation (C) deviendra

$$(M) \ldots\ldots S = \tfrac{1}{2} A^{(0)} f' g + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\partial A^{(0)}}{\partial \alpha} f h + \frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{\partial \partial A^{(0)}}{\partial \alpha^2} f^2 f''' + \frac{\alpha^3}{12} \cdot \frac{\partial^3 A^{(0)}}{\partial \alpha^3} f^3$$

$$+ \tfrac{1}{2} \cos iw \left\{ A^{(i)} f' g' + \alpha \,.\, \frac{\partial A^{(i)}}{\partial \alpha} \,.\, f h' + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{\partial \partial A^{(i)}}{\partial \alpha^2} f^2 f''' + \frac{\alpha^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial \alpha^3} \,.\, f^3 \right\}$$

$$+ \frac{i}{2} \theta \sin iw \left\{ A^{(i)} g'' + \alpha \frac{\partial A^{(i)}}{\partial \alpha} f f'' + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial \partial A^{(i)}}{\partial \alpha^2} f^2 \right\};$$

et l'équation (D) prendra la forme

$$(M') \ldots\ldots S' = \frac{\alpha \alpha'}{4} \left\{ \left(\tfrac{1}{2} \mathfrak{A}^{(0)} - \frac{1}{\alpha'^3} \right) (f + f') + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \mathfrak{A}^{(0)}}{\partial \alpha} f \right\} \{ \cos w - \cos \psi \}$$

$$+ \frac{\alpha \alpha'}{4} \left(\tfrac{1}{2} \mathfrak{A}^{(0)} - \frac{1}{\alpha'^3} + \tfrac{1}{2} \mathfrak{A}^{(i)} \cos iw \right) (\theta \sin w + \theta' \sin \psi)$$

$$+ \frac{\alpha \alpha'}{8} \left\{ \left(\mathfrak{A}^{(i)} (f + f') + \alpha \frac{\partial \mathfrak{A}^{(i)}}{\partial \alpha} f \right) \cos iw + i \mathfrak{A}^{(i)} \theta \sin iw \right\} \{ \cos w - \cos \psi \}.$$

Développons maintenant les fonctions (s) par le moyen des équations (e) (§. 169.), et observons que f, θ, sont de l'ordre des excentricités, et que par conséquent il serait inutile de développer h, h', g'', au delà de la seconde dimension des excentricités, et f'', f''', θ', au delà de la première, parce que dans l'équation (M), h, h', g'', sont partout multipliés par f ou θ, et f'', f''', par f^2 ou $f\theta$, et que θ' ne se trouve que dans l'équation (M'), et par conséquent multiplié par le carré de l'inclinaison. Cela posé on trouvera

$$f = \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \tfrac{1}{2}\gamma'^2 - \gamma(1 - \tfrac{3}{8}\gamma^2) \cos(\mu - \varpi) + \gamma'(1 - \tfrac{3}{8}\gamma'^2) \cos(\mu' - \varpi') - \tfrac{1}{2}\gamma^2 \cos 2(\mu - \varpi)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\gamma'^2 \cos 2(\mu' - \varpi') - \tfrac{3}{8}\gamma^3 \cos 3(\mu - \varpi) + \tfrac{3}{8}\gamma'^3 \cos 3(\mu' - \varpi'),$$

$$f' = 1 - \tfrac{1}{2}\gamma'^2 + \gamma'(1 - \tfrac{3}{8}\gamma'^2) \cos(\mu' - \varpi') + \tfrac{1}{2}\gamma'^2 \cos 2(\mu' - \varpi') + \tfrac{3}{8}\gamma'^3 \cos 3(\mu' - \varpi'),$$

$$f'' = 1 + 2\gamma' \cos(\mu' - \varpi), \qquad f''' = 1 + 3\gamma' \cos(\mu' - \varpi);$$

$$\theta = \gamma(2 - \tfrac{1}{4}\gamma^2) \sin(\mu - \varpi) - \gamma'(2 - \tfrac{1}{4}\gamma'^2) \sin(\mu' - \varpi') + \tfrac{5}{4}\gamma^2 \sin 2(\mu - \varpi)$$

$$- \tfrac{5}{4}\gamma'^2 \sin 2(\mu' - \varpi') + \tfrac{13}{12}\gamma^3 \sin 3(\mu - \varpi) - \tfrac{13}{12}\gamma'^3 \sin 3(\mu' - \varpi'),$$

$$\theta' = 2\gamma \sin(\mu - \varpi) + 2\gamma' \sin(\mu' - \varpi');$$

$$g = 1 + \tfrac{1}{2}\gamma' + \tfrac{1}{2}\gamma'^2 \cos 2(\mu' - \varpi') - \tfrac{1}{2}\gamma'^3 \cos(\mu' - \varpi') + \tfrac{1}{2}\gamma'^3 \cos 3(\mu' - \varpi'),$$

$$h = 1 + \tfrac{1}{2}\gamma'^2 + 2\gamma' \cos(\mu' - \varpi') + \tfrac{5}{2}\gamma'^2 \cos 2(\mu' - \varpi');$$

$$g' = 1 + \tfrac{1}{2}\gamma'^2 - i^2(\gamma^2 + \gamma'^2) + (i^2 + \tfrac{1}{2})\gamma'^2 \cos 2(\mu' - \varpi') + i^2\gamma^2 \cos 2(\mu - \varpi)$$

$$+ 2i^2\gamma\gamma' \{\cos(\mu' - \mu - \varpi' + \varpi) - \cos(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi)\}$$

$$- \tfrac{5}{4} i^2 \gamma^3 \{\cos(\mu - \varpi) - \cos 3(\mu - \varpi)\} - (\tfrac{5}{4} i^2 + \tfrac{1}{2})\gamma'^3 \{\cos(\mu' - \varpi') - \cos 3(\mu' - \varpi')\}$$

$$+\tfrac{5}{4}i^2\gamma^2\gamma'\{\cos(\mu'-2\mu-\varpi'+2\varpi)-\cos(\mu'+2\mu-\varpi'-2\varpi)\}$$
$$+\tfrac{5}{4}i^2\gamma\gamma'^2\{\cos(2\mu'-\mu-2\varpi'+\varpi)-\cos(2\mu'+\mu-2\varpi'-\varpi)\};$$
$$h'=1+\tfrac{1}{2}\gamma'^2-i^2(\gamma^2+\gamma'^2)+2\gamma'\cos(\mu'-\varpi')+(i^2+\tfrac{5}{2})\gamma'^2\cos 2(\mu'-\varpi')$$
$$+i^2\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)+2i^2\gamma\gamma'\{\cos(\mu'-\mu-\varpi'+\varpi)-\cos(\mu'+\mu-\varpi'-\varpi)\},$$
$$g''=1-\frac{i^2}{3}(\gamma^2+\gamma'^2)+\gamma'\cos(\mu'-\varpi')+\left(\frac{i^2}{3}+1\right)\gamma'^2\cos 2(\mu'-\varpi')+\frac{i^2}{3}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)$$
$$+\tfrac{2}{3}i^2\gamma\gamma'\{\cos(\mu'-\mu-\varpi'+\varpi)-\cos(\mu'+\mu-\varpi'-\varpi)\}.$$

Si l'on donne à l'équation (M) cette forme,

$$S=\Gamma.A^{(0)}+\Delta.a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}+\Theta.a^2\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}+\Lambda.a^3\frac{\partial^3 A^{(0)}}{\partial a^3}$$
$$+\left\{\Xi.A^{(i)}+\Sigma.a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}+\Theta.a^2\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}+\Lambda.a^3\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a^3}\right\}\cos iw$$
$$+\left\{\Phi.A^{(i)}+\Psi.a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}+\Omega.a^2\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right\}i\sin iw,$$

on aura, en développant les produits des cosinus en cosinus des angles multiples,

$$\Gamma=\tfrac{1}{2}f'g=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\gamma'(1-\tfrac{1}{8}\gamma'^2)\cos(\mu'-\varpi')+\tfrac{1}{2}\gamma'^2\cos 2(\mu'-\varpi')+\tfrac{9}{16}\gamma'^3\cos 3(\mu'-\varpi'),$$
$$\Delta=\tfrac{1}{2}fh=\tfrac{1}{4}(\gamma^2+\gamma'^2)-\tfrac{1}{2}\gamma(1-\tfrac{3}{8}\gamma^2+\tfrac{1}{2}\gamma'^2)\cos(\mu-\varpi)+\tfrac{1}{2}\gamma'(1+\gamma^2+\tfrac{7}{8}\gamma'^2)\cos(\mu'-\varpi')$$
$$-\tfrac{1}{4}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)+\tfrac{5}{4}\gamma'^2\cos 2(\mu'-\varpi')-\tfrac{1}{2}\gamma\gamma'\cos(\mu'-\mu-\varpi'+\varpi)$$
$$-\tfrac{1}{2}\gamma\gamma'\cos(\mu'+\mu-\varpi'-\varpi)-\tfrac{3}{16}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)+\tfrac{27}{16}\gamma'^3\cos 3(\mu'-\varpi')$$
$$-\tfrac{1}{4}\gamma^2\gamma'\cos(\mu'-2\mu-\varpi'+2\varpi)-\tfrac{1}{4}\gamma^2\gamma'\cos(\mu'+2\mu-\varpi'-2\varpi)$$
$$-\tfrac{5}{8}\gamma\gamma'^2\{\cos(2\mu'-\mu-2\varpi'+\varpi)+\cos(2\mu'+\mu-2\varpi'-\varpi)\},$$
$$\Theta=\tfrac{1}{4}f^2f''=\tfrac{1}{8}(\gamma^2+\gamma'^2)+\tfrac{1}{8}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)+\tfrac{1}{8}\gamma'^2\cos 2(\mu'-\varpi')$$
$$-\tfrac{1}{4}\gamma\gamma'\{\cos(\mu'-\mu-\varpi'+\varpi)+\cos(\mu'+\mu-\varpi'-\varpi)\}-\tfrac{1}{8}\gamma(\gamma^2+4\gamma'^2)\cos(\mu-\varpi)$$
$$+\tfrac{1}{16}\gamma'(10\gamma^2+7\gamma'^2)\cos(\mu'-\varpi')+\tfrac{1}{8}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)+\tfrac{5}{16}\gamma'^3\cos 3(\mu'-\varpi')$$
$$+\tfrac{1}{16}\gamma^2\gamma\{\cos(\mu'-2\mu-\varpi+2\varpi)+\cos(\mu'+2\mu-\varpi-2\varpi)\}$$
$$-\tfrac{1}{8}\gamma\gamma'^2\{\cos(2\mu'-\mu-2\varpi'+\varpi)+\cos(2\mu'+\mu-2\varpi'-\varpi)\},$$

$$\begin{aligned}
\Lambda = \tfrac{1}{12} f^3 = & -\tfrac{1}{16}\gamma(\gamma^2 + 2\gamma'^2)\cos(\mu - \varpi) + \tfrac{1}{16}\gamma'(2\gamma^2 + \gamma'^2)\cos(\mu' - \varpi') \\
& - \tfrac{1}{48}\gamma^3 \cos 3(\mu - \varpi) + \tfrac{1}{48}\gamma'^3 \cos 3(\mu' - \varpi') \\
& + \tfrac{1}{16}\gamma^2\gamma' \{\cos(\mu' - 2\mu - \varpi' + 2\varpi) + \cos(\mu' + 2\mu - \varpi' - 2\varpi)\} \\
& - \tfrac{1}{16}\gamma\gamma'^2 \{\cos(2\mu' - \mu - 2\varpi' + \varpi) + \cos(2\mu' + \mu - 2\varpi' - \varpi)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Xi = \tfrac{1}{2} f' g' = & \tfrac{1}{2} - \tfrac{i^2}{2}(\gamma^2 + \gamma'^2) + \tfrac{i^2}{2}\gamma^2 \cos 2(\mu - \varpi) + \tfrac{i^2+1}{2}\gamma'^2 \cos 2(\mu' - \varpi') \\
& + i^2 \gamma\gamma' \cos(\mu' - \mu - \varpi' + \varpi) - i^2 \gamma\gamma' \cos(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi) \\
& - \tfrac{5}{8} i^2 \gamma^3 \{\cos(\mu - \varpi) - \cos 3(\mu - \varpi)\} + \tfrac{1}{2}\gamma'\left(1 - i^2\gamma^2 - \tfrac{14 i^2 + 1}{8}\gamma'^2\right)\cos(\mu' - \varpi') \\
& + \tfrac{14 i^2 + 9}{16}\gamma'^3 \cos 3(\mu' - \varpi') \\
& + \tfrac{i^2}{8}\gamma^2\gamma' \{7\cos(\mu' - 2\mu - \varpi' + 2\varpi) - 3\cos(\mu' + 2\mu - \varpi' - 2\varpi)\} \\
& + \tfrac{9 i^2}{8}\gamma\gamma'^2 \{\cos(2\mu' - \mu - 2\varpi' + \varpi) - \cos(2\mu' + \mu - 2\varpi' - \varpi)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma = \tfrac{1}{2} f h' = & \tfrac{1}{4}(\gamma^2 + \gamma'^2) - \tfrac{1}{2}\gamma\left(1 - \tfrac{4 i^2 + 3}{8}\gamma^2 - \tfrac{2 i^2 - 1}{2}\gamma'^2\right)\cos(\mu - \varpi) \\
& + \tfrac{1}{2}\gamma'\left(1 - (i^2 - 1)\gamma^2 - \tfrac{4 i^2 - 7}{8}\gamma'^2\right)\cos(\mu' - \varpi') - \tfrac{1}{4}\gamma^2 \cos 2(\mu - \varpi) \\
& + \tfrac{3}{4}\gamma'^2 \cos 2(\mu' - \varpi') - \tfrac{1}{2}\gamma\gamma' \{\cos(\mu' - \mu - \varpi' + \varpi) + \cos(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi)\} \\
& - \tfrac{4 i^2 + 3}{16}\gamma^3 \cos 3(\mu - \varpi) + \tfrac{4 i^2 + 17}{16}\gamma'^3 \cos 3(\mu' - \varpi') \\
& - \tfrac{i^2 + 1}{4}\gamma^2\gamma' \cos(\mu' - 2\mu - \varpi' + 2\varpi) + \tfrac{3 i^2 - 1}{4}\gamma^2\gamma' \cos(\mu' + 2\mu - \varpi' - 2\varpi) \\
& + \tfrac{2 i^2 - 5}{8}\gamma\gamma'^2 \cos(2\mu' - \mu - 2\varpi' + \varpi) - \tfrac{6 i^2 + 5}{8}\gamma\gamma'^2 \cos(2\mu' + \mu - 2\varpi' - \varpi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi = \tfrac{1}{2}\theta g'' = & \gamma\left(1 - \tfrac{4 i^2 + 1}{8}\gamma^2 - i^2\gamma'^2\right)\sin(\mu - \varpi) - \gamma'\left(1 - i^2\gamma^2 - \tfrac{8 i^2 + 5}{16}\gamma'^2\right)\sin(\mu' - \varpi') \\
& + \tfrac{5}{8}\gamma^2 \sin 2(\mu - \varpi) - \tfrac{9}{8}\gamma'^2 \sin 2(\mu' - \varpi') \\
& + \tfrac{1}{2}\gamma\gamma' \{\sin(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi) - \sin(\mu' - \mu - \varpi' + \varpi)\} \\
& + \tfrac{4 i^2 + 13}{24}\gamma^3 \sin 3(\mu - \varpi) - \tfrac{8 i^2 + 65}{48}\gamma'^3 \sin 3(\mu' - \varpi') \\
& - \tfrac{1}{16}\gamma^2\gamma' \{(8i^2 + 5)\sin(\mu' - 2\mu - \varpi' + 2\varpi) + (8i^2 - 5)\sin(\mu' + 2\mu - \varpi' - 2\varpi)\} \\
& + \tfrac{i^2 + 1}{2}\gamma\gamma'^2 \{\sin(2\mu' + \mu - 2\varpi' - \varpi) - \sin(2\mu' - \mu - 2\varpi' + \varpi)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi = \tfrac{1}{2}\theta f f'' = & -\tfrac{1}{2}\gamma^2 \sin 2(\mu - \varpi) - \tfrac{1}{2}\gamma'^2 \sin 2(\mu' - \varpi') + \gamma\gamma' \sin(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi) \\
& + \tfrac{1}{16}\gamma(7\gamma^2 + 8\gamma'^2)\sin(\mu - \varpi) - \tfrac{1}{16}\gamma'(8\gamma^2 + \gamma'^2)\sin(\mu' - \varpi') - \tfrac{9}{16}\gamma^3 \sin 3(\mu - \varpi)
\end{aligned}$$

$$-\frac{17}{16}\gamma'^3\sin 3(\mu'-\varpi')+\frac{1}{16}\gamma^2\gamma'\{7\sin(\mu'-2\mu-\varpi'+2\varpi)+\sin(\mu'+2\mu-\varpi'-2\varpi)\},$$

$$+\frac{1}{16}\gamma\gamma'^2\{25\sin(2\mu'+\mu-2\varpi'-\varpi)+\sin(2\mu'-\mu-2\varpi'+\varpi)\},$$

$$\Omega=\frac{1}{4}ef^2=\frac{1}{8}\gamma(\gamma^2+2\gamma'^2)\sin(\mu-\varpi)-\frac{1}{8}\gamma'(2\gamma^2+\gamma'^2)\sin(\mu'-\varpi')$$

$$+\frac{1}{8}\gamma^3\sin 3(\mu-\varpi)-\frac{1}{8}\gamma'^3\sin 3(\mu'-\varpi')$$

$$+\frac{1}{8}\gamma^2\gamma'\{\sin(\mu'-2\mu-\varpi'+2\varpi)-3\sin(\mu'+2\mu-\varpi'-2\varpi)\}$$

$$+\frac{1}{8}\gamma\gamma'^2\{\sin(2\mu'-\mu-2\varpi'+\varpi)+3\sin(2\mu'+\mu-2\varpi'-\varpi)\}.$$

§. 177. Les coefficiens Ξ, Σ, Θ, Λ, contiennent, outre un terme constant, les cosinus des différens angles qui résultent de la combinaison des deux anomalies, $\mu-\varpi$, $\mu'-\varpi'$; et Φ, Ψ, Ω, renferment les sinus de ces angles. En désignant donc chacun de ces angles par η, η étant $=0$ dans le terme constant de Ξ, etc. et substituant $\Xi'\cos\eta$, $\Sigma'\cos\eta$, $\Theta'\cos\eta$, $\Lambda'\cos\eta$, $\Phi'\sin\eta$, $\Psi'\sin\eta$, $\Omega'\sin\eta$, au lieu de Ξ, Σ, etc. l'équation précédente (§. 176.) prendra la forme:

$$S=\Gamma\,.\,A^{(0)}+\Delta\,.\,a\,\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}+\Theta\,.\,a^2\,\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}+\Lambda\,.\,a^3\,\frac{\partial^3 A^{(0)}}{\partial a^3}$$

$$+\left\{\Xi'.A^{(i)}+\Sigma'.\,a\,\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}+\Theta'.\,a^2\,\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}+\Lambda'.\,a^3\,\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a^3}\right\}\cos iw\cos\eta$$

$$+\left\{\Phi'.A^{(i)}+\Psi'.\,a\,\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}+\Omega'.\,a^2\,\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right\}i\sin iw\sin\eta;$$

où il faut mettre successivement à la place de Ξ', etc. le coefficient de chaque terme de Ξ, etc. qui est fonction des excentricités, γ, γ', et à la place de η celui des angles η, auquel appartient le coefficient Ξ'.

Comme i s'étend indifféremment aux nombres positifs et négatifs, et que $\cos(-iw)=\cos iw$, $\sin(-iw)=-\sin iw$, $(-i)\sin(-iw)=i\sin iw$, on aura généralement, en désignant par i' les valeurs positives de i,

$$\cos iw\cos\eta=2\cos i'w\cos\eta=\cos(\eta+i'w)+\cos(\eta-i'w),$$

$$\cos iw\sin\eta=2\cos i'w\sin\eta=\sin(\eta+i'w)+\sin(\eta-i'w),$$

$$i\sin iw\cos\eta=2i'\sin i'w\cos\eta=i'\sin(\eta+i'w)-i'\sin(\eta-i'w),$$

$$i\sin iw\sin\eta=2i'\sin i'w\sin\eta=-i'\cos(\eta+i'w)+i'\cos(\eta-i'w).$$

Dans le second membre des quatre équations précédentes, le premier terme se change dans le second, si l'on donne à i' une valeur négative: par con-

séquent, si l'on fait i en même tems positif et négatif, ce qui doit se faire (§. 170.), le second terme sera déjà renfermé dans le premier, et il ne resteta que ce dernier: ainsi les quatre équations précédentes deviendront:

$$(l) \dots \left\{ \begin{array}{ll} \cos iw \cos \eta = \cos (iw + \eta), & \cos iw \sin \eta = \sin (iw + \eta), \\ i \sin iw \cos \eta = i \sin (iw + \eta), & i \sin iw \sin \eta = -i \cos (iw + \eta). \end{array} \right.$$

La première et la dernière des formules (l) donneront à l'équation précédente cette forme:

$$(\mathrm{N}) \dots \mathrm{S} = \Gamma . \mathrm{A}^{(0)} + \Delta . a \frac{\partial \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a} + \Theta . a^2 \frac{\partial \partial \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a^2} + \Lambda . a^3 \frac{\partial^3 \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a^3}$$

$$+ \cos (iw + \eta) \left\{ \begin{array}{l} (\Xi' - i\Phi') \mathrm{A}^{(i)} + (\Sigma' - i\Psi') a \frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a} \\ + (\Theta' - i\Omega') a^2 \frac{\partial \partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a^2} + \Lambda' a^3 \frac{\partial^3 \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a^3} \end{array} \right\}.$$

Opérons de la même manièro sur l'équation (M') (§. 176.), qui ne doit être développée que jusqu'à la première puissance des excentricités. En faisant donc pour abréger,

$$\mathfrak{F} = \cos (\mu' - \mu) - \cos (\mu' + \mu - 2\Pi) - \frac{3}{2} \gamma \cos (\mu' - \varpi) + \frac{1}{2} \gamma \cos (\mu' - 2\mu + \varpi)$$
$$+ 2\gamma' \cos (2\mu' - \mu - \varpi') + \frac{3}{2} \gamma \cos (\mu' + \varpi - 2\Pi)$$
$$- \frac{1}{2} \gamma \cos (\mu' + 2\mu - \varpi - 2\Pi) - 2\gamma' \cos (2\mu' + \mu - \varpi' - 2\Pi),$$

$$\mathfrak{G} = - \frac{1}{2} \gamma \cos(\mu' - \varpi) + \frac{1}{2} \gamma' \cos(\mu - \varpi') - \frac{1}{2} \gamma \cos(\mu' - 2\mu + \varpi) + \frac{1}{2} \gamma' \cos (2\mu' - \mu - \varpi')$$
$$+ \frac{1}{2} \gamma \cos (\mu' + \varpi - 2\Pi) - \frac{1}{2} \gamma' \cos (\mu + \varpi' - 2\Pi)$$
$$+ \frac{1}{2} \gamma \cos (\mu' + 2\mu - \varpi - 2\Pi) - \frac{1}{2} \gamma' \cos (2\mu' + \mu - \varpi' - 2\Pi),$$

$$\mathfrak{H} = \gamma \sin (\mu' - \varpi) - \gamma' \sin (\mu - \varpi') - \gamma \sin (\mu' - 2\mu + \varpi) - \gamma' \sin (2\mu' - \mu - \varpi')$$
$$+ \gamma \sin (\mu' + \varpi - 2\Pi) - \gamma' \sin (\mu + \varpi' - 2\Pi)$$
$$- \gamma \sin (\mu' + 2\mu - \varpi - 2\Pi) + \gamma' \sin (2\mu' + \mu - \varpi' - 2\Pi),$$

l'équation (M') prendra la forme:

$$\mathrm{S}' = \frac{a a'}{4} \left\{ \mathfrak{F} \left(\frac{1}{2} \mathfrak{A}^{(0)} - \frac{1}{a'^3} \right) + \frac{1}{2} \mathfrak{G} . a \frac{\partial \mathfrak{A}^{(0)}}{\partial a} \right\} + \frac{a a'}{8} \cos iw \left\{ \mathfrak{F} . \mathfrak{A}^{(i)} + \mathfrak{G} . a \frac{\partial \mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a} \right\}$$
$$+ \frac{i}{8} a a' \sin iw . \mathfrak{H} . \mathfrak{A}^{(i)};$$

d'où l'on conclura, comme ci-dessus, en employant la même notation dont nous nous sommes servis relativement à S,

$$(N')\ldots\ldots S' = \frac{aa'}{4}\left\{\mathfrak{F}\left(\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^{(0)} - \frac{1}{a'^2}\right) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}\cdot a\frac{\partial \mathfrak{A}^{(0)}}{\partial a}\right\}$$
$$+ \frac{aa'}{8}\cos(iw + \eta')\left\{\left(\mathfrak{F}' - i\mathfrak{H}'\right)\mathfrak{A}^{(i)} + \mathfrak{G}'\cdot a\frac{\partial \mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a}\right\};$$

$\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$, étant les coefficiens, et η' les argumens, des différens termes de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, qui seront successivement substitués.

§. 178. Il faut maintenant développer le terme $r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = m'r\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + m'\delta^2 r\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right)$ (§. 168. (A)). Sa première partie devient $m'a\left(\frac{\partial B}{\partial a}\right)$, si les excentricités sont nulles (§. 169.): on trouvera donc sa véritable valeur, en substituant dans l'équation (C) (§. 169.), $r\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)$ au lieu de S, et $a\left(\frac{\partial B}{\partial a}\right)$ au lieu de B. Cela posé, il est aisé de voir par les équations (H) (I) (K) (L) (§. 175.), qu'il faut mettre

$$a\frac{\partial B}{\partial a} \text{ au lieu de } B, \qquad \frac{\partial B}{\partial a} + a\frac{\partial\partial B}{\partial a^2} \text{ au lieu de } \frac{\partial B}{\partial a},$$

$$\frac{2\partial\partial B}{\partial a^2} + a\frac{\partial^3 B}{\partial a^3} \text{ au lieu de } \frac{\partial\partial B}{\partial a^2}, \qquad \frac{3\partial^3 B}{\partial a^3} + a\frac{\partial^4 B}{\partial a^4} \text{ au lieu de } \frac{\partial^3 B}{\partial a^3},$$

$$a\frac{\partial\partial B}{\partial a\partial a'} \text{ au lieu de } \frac{\partial B}{\partial a'}, \qquad \frac{\partial\partial B}{\partial a\partial a'} + a\frac{\partial^3 B}{\partial a^2\partial a'} \text{ au lieu de } \frac{\partial\partial B}{\partial a\partial a'},$$

$$a\frac{\partial^3 B}{\partial a\partial a'^2} \text{ au lieu de } \frac{\partial\partial B}{\partial a'^2}, \qquad \frac{\partial^3 B}{\partial a\partial a'^2} + a\frac{\partial^4 B}{\partial a^2\partial a'^2} \text{ ou}$$

$$\frac{6}{a'^2}\cdot\frac{\partial B}{\partial a} + \frac{18a}{a'^2}\cdot\frac{\partial\partial B}{\partial a^2} + \frac{9a^2}{a'^2}\cdot\frac{\partial^3 B}{\partial a^3} + \frac{a^3}{a'^2}\cdot\frac{\partial^4 B}{\partial a^4} \text{ au lieu de } \frac{\partial^3 B}{\partial a\partial a'^2},$$

$$\frac{2\partial^3 B}{\partial a^2\partial a'} + a\frac{\partial^4 B}{\partial a^3\partial a'} \text{ ou } -\frac{6}{a'}\cdot\frac{\partial\partial B}{\partial a^2} - \frac{6a}{a'}\cdot\frac{\partial^3 B}{\partial a^3} - \frac{a^2}{a'}\cdot\frac{\partial^4 B}{\partial a^4} \text{ au lieu de } \frac{\partial^3 B}{\partial a^2\partial a'},$$

$$a\frac{\partial^4 B}{\partial a\partial a'^3} \text{ ou } -\frac{24}{a'^3}a\frac{\partial B}{\partial a} - \frac{36}{a'^3}a^2\frac{\partial\partial B}{\partial a^2} - \frac{12}{a'^3}a^3\frac{\partial^3 B}{\partial a^3} - \frac{a^4}{a'^3}\cdot\frac{\partial^4 B}{\partial a^4} \text{ au lieu de } \frac{\partial^3 B}{\partial a'^3},$$

$$a\frac{\partial\partial B}{\partial a\partial \mu} \text{ ou } \frac{i}{2}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\sin iw \text{ au lieu de } \frac{\partial B}{\partial \mu} \text{ et de } -\frac{\partial B}{\partial \mu'},$$

$$-\frac{i^2}{2}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\cos iw \text{ au lieu de } \frac{\partial\partial B}{\partial \mu^2}, \text{ de } \frac{\partial\partial B}{\partial \mu'^2}, \text{ et de } -\frac{\partial\partial B}{\partial \mu\partial \mu'},$$

$$-\frac{i^3}{2}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\sin iw \text{ au lieu de } \frac{\partial^3 B}{\partial \mu^3}, \text{ de } -\frac{\partial^3 B}{\partial \mu^2\partial \mu'}, \text{ de } \frac{\partial^3 B}{\partial \mu\partial \mu'^2}, \text{ et de } -\frac{\partial^3 B}{\partial \mu'^3}.$$

Au moyen de ces substitutions l'équation ( ) donnera

$$r\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)=\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\left\{h\left(1+\frac{\Delta r}{a}\right)-4\left(\frac{\Delta r'}{a'}\right)^3\right\}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\left\{f'''\left(1+\frac{\Delta r}{a}\right)+6\left(\frac{\Delta r'}{a'}\right)^2\right\}f$$

$$+\frac{a^3}{4}\cdot\frac{\partial^3 A^{(0)}}{\partial a^3}(f+f''')f^2+\frac{a^4}{12}\cdot\frac{\partial^4 A^{(0)}}{\partial a^4}\cdot f^3$$

$$+\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\left\{\begin{array}{l}\left[h\left(1+\frac{\Delta r}{a}\right)-4\left(\frac{\Delta r'}{a'}\right)^3-\frac{i^2}{2}(f+f')\,\theta^2\right]\cos iw\\+\left[h+\frac{\Delta r}{a}f''-\frac{i^2}{6}\theta^2\right]i\sin iw\end{array}\right\}$$

$$+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\cdot f\left\{(h'+ff''')\cos iw+\theta(f+f'')\,i\sin iw\right\}$$

$$+\frac{a^3}{4}\cdot\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a^3}\left\{(f+f''')\cos iw+\theta i\sin iw\right\}f^2+\frac{a^4}{12}\cdot\frac{\partial^4 A^{(i)}}{\partial a^4}\cdot f^3\cos iw.$$

Faisons pour abréger,

$$\frac{h}{a}\left(1+\frac{\Delta r}{a}\right)-2\left(\frac{\Delta r'}{a'}\right)^3='\mathrm{T},$$

$$\frac{f}{2}\left\{f'''\left(1+\frac{\Delta r}{a}\right)+6\left(\frac{\Delta r'}{a'}\right)^2\right\}='\Delta,\quad \frac{f^2}{4}(f+f''')='\Theta,$$

$$'\mathrm{T}-\frac{i^2}{4}(f+f')\,\theta^2='\Xi,\quad \frac{f}{a}(h'+ff''')='\Sigma,$$

$$\frac{\theta}{2}\left(h+\frac{\Delta r}{a}f''-\frac{i^2}{6}\theta^2\right)='\Phi,\ \frac{f}{a}\theta(f+f'')='\Psi,\ \text{ou}$$

$$'\mathrm{T}=\frac{1}{4}(2+\gamma^2+\gamma'^2)-\frac{1}{2}\gamma\left(1-\frac{3}{8}\gamma^2+\frac{1}{a}\gamma'^2\right)\cos(\mu-\varpi)$$
$$+\gamma'\left(1+\frac{1}{a}\gamma^2+\frac{3}{8}\gamma'^2\right)\cos(\mu'-\varpi')-\frac{1}{4}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)+\frac{5}{4}\gamma'^2\cos 2(\mu'-\varpi')$$
$$-\frac{1}{2}\gamma\gamma'\left\{\cos(\mu'-\mu-\varpi'+\varpi)+\cos(\mu'+\mu-\varpi'-\varpi)\right\}-\frac{3}{16}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)$$
$$+\frac{13}{8}\gamma'^3\cos 3(\mu'-\varpi')-\frac{1}{4}\gamma^2\gamma'\cos(\mu'-2\mu-\varpi'+2\varpi)-\frac{1}{4}\gamma^2\gamma'\cos(\mu'+2\mu-\varpi'-2\varpi)$$
$$-\frac{5}{8}\gamma\gamma'^2\left\{\cos(2\mu'-\mu-2\varpi'+\varpi)+\cos(2\mu'+\mu-2\varpi'-\varpi)\right\},$$

$$'\Delta=\frac{1}{2}(\gamma^2+\gamma'^2)-\frac{1}{2}\gamma\left(1+\frac{1}{8}\gamma^2+\frac{5}{2}\gamma'^2\right)\cos(\mu-\varpi)+\frac{1}{2}\gamma'\left(1+\frac{7}{2}\gamma^2+\frac{21}{8}\gamma'^2\right)\cos(\mu'-\varpi')$$
$$+\gamma'^2\cos 2(\mu'-\varpi')-\gamma\gamma'\left\{\cos(\mu'-\mu-\varpi'+\varpi)+\cos(\mu'+\mu-\varpi'-\varpi)\right\}$$
$$+\frac{1}{16}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)+\frac{27}{16}\gamma'^3\cos 3(\mu'-\varpi')-\frac{1}{8}\gamma^2\gamma'\cos(\mu'-2\mu-\varpi'+2\varpi)$$
$$-\frac{1}{8}\gamma^2\gamma'\cos(\mu'+2\mu-\varpi'-2\varpi)-\frac{13}{8}\gamma\gamma'^2\left\{\cos(2\mu'-\mu-2\varpi'+\varpi)+\cos(2\mu'+\mu-2\varpi'-\varpi)\right\},$$

$${}'\Theta = \frac{1}{8}(\gamma^2 + \gamma'^2) + \frac{1}{8}\gamma^2 \cos 2(\mu - \varpi) + \frac{1}{8}\gamma'^2 \cos 2(\mu' - \varpi')$$
$$- \frac{1}{4}\gamma\gamma' \{\cos(\mu' - \mu - \varpi' + \varpi) + \cos(\mu' + \mu - \varpi - \varpi')\}$$
$$- \frac{1}{16}\gamma(5\gamma^2 + 14\gamma'^2)\cos(\mu - \varpi) + \frac{1}{8}\gamma'(8\gamma^2 + 5\gamma'^2)\cos(\mu' - \varpi') + \frac{1}{16}\gamma^3\cos 3(\mu - \varpi)$$
$$+ \frac{3}{8}\gamma'^3 \cos 3(\mu' - \varpi') + \frac{1}{4}\gamma^2\gamma'\{\cos(\mu' - 2\mu - \varpi' + 2\varpi) + \cos(\mu' + 2\mu - \varpi' - 2\varpi)\}$$
$$- \frac{21}{16}\gamma\gamma'^2\{\cos(2\mu' - \mu - 2\varpi' + \varpi) + \cos(2\mu' + \mu - 2\varpi' - \varpi)\},$$

$${}'\Xi = \frac{1}{4}\{2 - (2i^2 - 1)(\gamma^2 + \gamma'^2)\} - \frac{1}{8}\gamma\{4 + (2i^2 - 1)(3\gamma^2 - 4\gamma'^2)\}\cos(\mu - \varpi)$$
$$+ \gamma'\left\{1 - \frac{2i^2 - 1}{2}\gamma^2 - \frac{3(3i^2 - 2)}{8}\gamma'^2\right\}\cos(\mu' - \varpi') + \frac{2i^2 - 1}{4}\gamma^2\cos 2(\mu - \varpi)$$
$$+ \frac{2i^2 + 5}{4}\gamma'^2\cos 2(\mu' - \varpi') + \left(i^2 - \frac{1}{2}\right)\gamma\gamma'\cos(\mu' - \mu - \varpi' + \varpi)$$
$$- \left(i^2 + \frac{1}{2}\right)\gamma\gamma'\cos(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi) + \frac{3(2i^2 - 1)}{16}\gamma^3\cos 3(\mu - \varpi)$$
$$+ \frac{9i^2 + 13}{8}\gamma'^3\cos 3(\mu' - \varpi') + \frac{1}{8}\gamma^2\gamma'\left\{\begin{array}{l}(5i^2 - 2)\cos(\mu' - 2\mu - \varpi' + 2\varpi)\\ + (3i^2 - 2)\cos(\mu' + 2\mu - \varpi' - 2\varpi)\end{array}\right\}$$
$$+ \frac{1}{8}\gamma\gamma'^2\{(11i^2 - 5)\cos(2\mu' - \mu - 2\varpi' + \varpi) - 5(3i^2 + 1)\cos(2\mu' + \mu - 2\varpi' - \varpi)\},$$

$${}'\Sigma = \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma'^2) - \frac{3}{2}\gamma\left\{1 - \frac{4i^2 - 1}{8}\gamma^2 - \frac{2i^2 - 5}{2}\gamma'^2\right\}\cos(\mu - \varpi)$$
$$+ \frac{1}{2}\gamma'\left\{1 - \frac{2i^2 - 7}{2}\gamma^2 - \frac{4i^2 - 21}{8}\gamma'^2\right\}\cos(\mu' - \varpi') + \gamma'^2\cos 2(\mu' - \varpi')$$
$$- \gamma\gamma'\{\cos(\mu' - \mu - \varpi' + \varpi) + \cos(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi)\} - \frac{4i^2 - 1}{16}\gamma^3\cos 3(\mu - \varpi)$$
$$+ \frac{4i^2 + 27}{16}\gamma'^3\cos 3(\mu' - \varpi') + \frac{1}{8}\gamma^2\gamma'\left\{\begin{array}{l}(6i^2 - 1)\cos(\mu' + 2\mu - \varpi' - 2\varpi)\\ - (2i^2 + 1)\cos(\mu' - 2\mu - \varpi' + 2\varpi)\end{array}\right\}$$
$$+ \frac{1}{8}\gamma\gamma'^2\{(2i^2 - 13)\cos(2\mu' - \mu - 2\varpi' + \varpi) - (6i^2 + 13)\cos(2\mu' + \mu - 2\varpi' - \varpi)\},$$

$${}'\Phi = \gamma\left\{1 - \frac{8i^2 - 5}{16}\gamma^2 - \frac{2i^2 - 1}{2}\gamma'^2\right\}\sin(\mu - \varpi) - \gamma'\left\{1 - \frac{2i^2 - 1}{2}\gamma^2 - \frac{2i^2 + 1}{4}\gamma'^2\right\}\sin(\mu' - \varpi')$$
$$+ \frac{1}{8}\gamma^2\sin 2(\mu - \varpi) - \frac{13}{8}\gamma'^2\sin 2(\mu' - \varpi') + \frac{1}{2}\gamma\gamma'\{3\sin(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi) - \sin(\mu' - \mu - \varpi' + \varpi)\}$$
$$+ \frac{8i^2 - 1}{48}\gamma^3\sin 3(\mu - \varpi) - \frac{2i^2 + 29}{12}\gamma'^3\sin 3(\mu' - \varpi')$$
$$- \frac{1}{8}\gamma^2\gamma'\{(4i^2 - 1)\sin(\mu' - 2\mu - \varpi' + 2\varpi) + (4i^2 - 3)\sin(\mu' + 2\mu - \varpi' - 2\varpi)\}$$
$$+ \frac{1}{16}\gamma\gamma'^2\{(8i^2 + 33)\sin(2\mu' + \mu - 2\varpi' - \varpi) - (8i^2 + 7)\sin(2\mu' - \mu - 2\varpi' + \varpi)\},$$

$${}'\Psi = -\frac{1}{2}\gamma^2\sin 2(\mu - \varpi) - \frac{3}{2}\gamma'^2\sin 2(\mu' - \varpi') + \gamma\gamma'\sin(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi)$$
$$+ \frac{1}{16}\gamma(11\gamma^2 + 16\gamma'^2)\sin(\mu - \varpi) - \frac{1}{16}\gamma'(16\gamma^2 + 5\gamma'^2)\sin(\mu' - \varpi') - \frac{5}{16}\gamma^3\sin 3(\mu - \varpi)$$

$$r\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)=\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\left\{h\left(1+\frac{\Delta r}{a}\right)-4\left(\frac{\Delta r'}{a'}\right)^3\right\}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\left\{f'''\left(1+\frac{\Delta r}{a}\right)+6\left(\frac{\Delta r'}{a'}\right)^2\right\}f$$

$$+\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\partial^3 A^{(0)}}{\partial a^3}(f+f'')f^2+\frac{a^4}{12}\cdot\frac{\partial^4 A^{(0)}}{\partial a^4}\cdot f^3$$

$$+\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\left\{\begin{array}{l}\left[h\left(1+\frac{\Delta r}{a}\right)-4\left(\frac{\Delta r'}{a'}\right)^3-\frac{i^2}{2}(f+f')\theta^2\right]\cos iw\\+\left[h+\frac{\Delta r}{a}f''-\frac{i^2}{6}\theta^2\right]i\sin iw\end{array}\right\}$$

$$+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\cdot f\left\{(h'+ff''')\cos iw+\theta(f+f'')\,i\sin iw\right\}$$

$$+\frac{a^3}{4}\cdot\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a^3}\left\{(f+f''')\cos iw+\theta i\sin iw\right\}f^2+\frac{a^4}{12}\cdot\frac{\partial^4 A^{(i)}}{\partial a^4}\cdot f^3\cos iw.$$

Faisons pour abréger,

$$\frac{h}{a}\left(1+\frac{\Delta r}{a}\right)-2\left(\frac{\Delta r'}{a'}\right)^3='\mathrm{T},$$

$$\frac{f}{2}\left\{f'''\left(1+\frac{\Delta r}{a}\right)+6\left(\frac{\Delta r'}{a'}\right)^2\right\}='\Delta,\quad \frac{f^2}{4}(f+f'')='\Theta,$$

$$'\mathrm{T}-\frac{i^2}{4}(f+f')\theta^2='\Xi,\quad \frac{f}{2}(h'+ff''')='\Sigma,$$

$$\frac{\theta}{2}\left(h+\frac{\Delta r}{a}f''-\frac{i^2}{6}\theta^2\right)='\Phi,\quad \frac{f}{2}\theta(f+f'')='\Psi,\ \text{on}$$

$$\begin{aligned}'\mathrm{T}=&\tfrac{1}{4}(2+\gamma^2+\gamma'^2)-\tfrac{1}{2}\gamma\left(1-\tfrac{3}{8}\gamma^2+\tfrac{1}{2}\gamma'^2\right)\cos(\mu-\varpi)\\&+\gamma'\left(1+\tfrac{1}{2}\gamma^2+\tfrac{3}{8}\gamma'^2\right)\cos(\mu'-\varpi')-\tfrac{1}{4}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)+\tfrac{5}{4}\gamma'^2\cos 2(\mu'-\varpi')\\&-\tfrac{1}{2}\gamma\gamma'\{\cos(\mu'-\mu-\varpi'+\varpi)+\cos(\mu'+\mu-\varpi'-\varpi)\}-\tfrac{3}{16}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)\\&+\tfrac{13}{8}\gamma'^3\cos 3(\mu'-\varpi')-\tfrac{1}{4}\gamma^2\gamma'\cos(\mu'-2\mu-\varpi'+2\varpi)-\tfrac{1}{4}\gamma^2\gamma'\cos(\mu'+2\mu-\varpi'-2\varpi)\\&-\tfrac{5}{8}\gamma\gamma'^2\{\cos(2\mu'-\mu-2\varpi'+\varpi)+\cos(2\mu'+\mu-2\varpi'-\varpi)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}'\Delta=&\tfrac{1}{2}(\gamma^2+\gamma'^2)-\tfrac{1}{2}\gamma\left(1+\tfrac{1}{8}\gamma^2+\tfrac{5}{2}\gamma'^2\right)\cos(\mu-\varpi)+\tfrac{1}{2}\gamma'\left(1+\tfrac{7}{2}\gamma^2+\tfrac{21}{8}\gamma'^2\right)\cos(\mu'-\varpi')\\&+\gamma'^2\cos 2(\mu'-\varpi')-\gamma\gamma'\{\cos(\mu'-\mu-\varpi'+\varpi)+\cos(\mu'+\mu-\varpi'-\varpi)\}\\&+\tfrac{1}{16}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)+\tfrac{27}{16}\gamma'^3\cos 3(\mu'-\varpi')-\tfrac{1}{8}\gamma^2\gamma'\cos(\mu'-2\mu-\varpi'+2\varpi)\\&-\tfrac{1}{8}\gamma^2\gamma'\cos(\mu'+2\mu-\varpi'-2\varpi)-\tfrac{15}{8}\gamma\gamma'^2\{\cos(2\mu'-\mu-2\varpi'+\varpi)+\cos(2\mu'+\mu-2\varpi'-\varpi)\},\end{aligned}$$

$$
{}''\Theta = \frac{1}{8}(\gamma^2 + \gamma'^2) + \frac{1}{8}\gamma^2 \cos 2(\mu - \varpi) + \frac{1}{8}\gamma'^2 \cos 2(\mu' - \varpi')
$$

$$
- \frac{1}{4}\gamma\gamma' \{\cos(\mu' - \mu - \varpi' + \varpi) + \cos(\mu' + \mu - \varpi - \varpi')\}
$$

$$
- \frac{1}{16}\gamma(5\gamma^2 + 14\gamma'^2)\cos(\mu - \varpi) + \frac{1}{8}\gamma'(8\gamma^2 + 5\gamma'^2)\cos(\mu' - \varpi') + \frac{1}{16}\gamma^3 \cos 3(\mu - \varpi)
$$

$$
+ \frac{3}{8}\gamma'^3 \cos 3(\mu' - \varpi') + \frac{1}{4}\gamma^2\gamma' \{\cos(\mu' - 2\mu - \varpi' + 2\varpi) + \cos(\mu' + 2\mu - \varpi' - 2\varpi)\}
$$

$$
- \frac{11}{16}\gamma\gamma'^2 \{\cos(2\mu' - \mu - 2\varpi' + \varpi) + \cos(2\mu' + \mu - 2\varpi' - \varpi)\},
$$

$$
{}'\Xi = \frac{1}{4}\{2 - (2i^2 - 1)(\gamma^2 + \gamma'^2)\} - \frac{1}{8}\gamma\{4 + (2i^2 - 1)(3\gamma^2 - 4\gamma'^2)\}\cos(\mu - \varpi)
$$

$$
+ \gamma' \left\{1 - \frac{2i^2 - 1}{2}\gamma^2 - \frac{3(3i^2 - 1)}{8}\gamma'^2\right\}\cos(\mu' - \varpi') + \frac{2i^2 - 1}{4}\gamma^2 \cos 2(\mu - \varpi)
$$

$$
+ \frac{2i^2 + 5}{4}\gamma'^2 \cos 2(\mu' - \varpi') + \left(i^2 - \frac{1}{2}\right)\gamma\gamma' \cos(\mu' - \mu - \varpi' + \varpi)
$$

$$
- \left(i^2 + \frac{1}{2}\right)\gamma\gamma' \cos(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi) + \frac{3(2i^2 - 1)}{16}\gamma^3 \cos 3(\mu - \varpi)
$$

$$
+ \frac{9i^2 + 13}{8}\gamma'^3 \cos 3(\mu' - \varpi') + \frac{1}{8}\gamma^2\gamma' \left\{\begin{array}{l}(5i^2 - 2)\cos(\mu' - 2\mu - \varpi' + 2\varpi) \\ + (3i^2 - 2)\cos(\mu' + 2\mu - \varpi' - 2\varpi)\end{array}\right\}
$$

$$
+ \frac{1}{8}\gamma\gamma'^2 \{(11i^2 - 5)\cos(2\mu' - \mu - 2\varpi' + \varpi) - 5(3i^2 + 1)\cos(2\mu' + \mu - 2\varpi' - \varpi)\},
$$

$$
{}'\Sigma = \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma'^2) - \frac{3}{2}\gamma\left\{1 - \frac{4i^2 - 1}{6}\gamma^2 - \frac{2i^2 - 5}{2}\gamma'^2\right\}\cos(\mu - \varpi)
$$

$$
+ \frac{1}{2}\gamma'\left\{1 - \frac{2i^2 - 7}{2}\gamma^2 - \frac{4i^2 - 21}{8}\gamma'^2\right\}\cos(\mu' - \varpi') + \gamma'^2 \cos 2(\mu' - \varpi')
$$

$$
- \gamma\gamma' \{\cos(\mu' - \mu - \varpi' + \varpi) + \cos(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi)\} - \frac{4i^2 - 1}{16}\gamma^3 \cos 3(\mu - \varpi)
$$

$$
+ \frac{4i^2 + 27}{16}\gamma'^3 \cos 3(\mu' - \varpi') + \frac{1}{8}\gamma^2\gamma' \left\{\begin{array}{l}(6i^2 - 1)\cos(\mu' + 2\mu - \varpi' - 2\varpi) \\ - (2i^2 + 1)\cos(\mu' - 2\mu - \varpi' + 2\varpi)\end{array}\right\}
$$

$$
+ \frac{1}{8}\gamma\gamma'^2 \{(2i^2 - 13)\cos(2\mu' - \mu - 2\varpi' + \varpi) - (6i^2 + 13)\cos(2\mu' + \mu - 2\varpi' - \varpi)\},
$$

$$
{}'\Phi = \gamma\left\{1 - \frac{8i^2 - 5}{16}\gamma^2 - \frac{2i^2 - 1}{2}\gamma'^2\right\}\sin(\mu - \varpi) - \gamma'\left\{1 - \frac{2i^2 - 1}{2}\gamma^2 - \frac{2i^2 + 1}{4}\gamma'^2\right\}\sin(\mu' - \varpi')
$$

$$
+ \frac{1}{8}\gamma^2 \sin 2(\mu - \varpi) - \frac{13}{8}\gamma'^2 \sin 2(\mu' - \varpi') + \frac{1}{2}\gamma\gamma'\{3\sin(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi) - \sin(\mu' - \mu - \varpi' + \varpi)\}
$$

$$
+ \frac{8i^2 - 1}{48}\gamma^3 \sin 3(\mu - \varpi) - \frac{2i^2 + 29}{12}\gamma'^3 \sin 3(\mu' - \varpi')
$$

$$
- \frac{1}{8}\gamma^2\gamma'\{(4i^2 - 1)\sin(\mu' - 2\mu - \varpi' + 2\varpi) + (4i^2 - 3)\sin(\mu' + 2\mu - \varpi' - 2\varpi)\}
$$

$$
+ \frac{1}{16}\gamma\gamma'^2\{(8i^2 + 33)\sin(2\mu' + \mu - 2\varpi' - \varpi) - (8i^2 + 7)\sin(2\mu' - \mu - 2\varpi' + \varpi)\},
$$

$$
{}''\Psi = - \frac{1}{2}\gamma^2 \sin 2(\mu - \varpi) - \frac{3}{2}\gamma'^2 \sin 2(\mu' - \varpi') + \gamma\gamma' \sin(\mu' + \mu - \varpi' - \varpi)
$$

$$
+ \frac{1}{16}\gamma(11\gamma^2 + 16\gamma'^2)\sin(\mu - \varpi) - \frac{1}{16}\gamma'(16\gamma^2 + 5\gamma'^2)\sin(\mu' - \varpi') - \frac{5}{16}\gamma^3 \sin 3(\mu - \varpi)
$$

$$-\frac{21}{16}\gamma^3 \sin 3(\mu'-\varpi') - \frac{21}{16}\gamma^2\gamma' \sin(\mu'-2\mu-\varpi'+2\varpi) - \frac{21}{16}\gamma^2\gamma' \sin(\mu'+2\mu-\varpi'-2\varpi)$$

$$+\frac{1}{16}\gamma\gamma'^2 \{5\sin(2\mu'-\mu-2\varpi'+\varpi)+37\sin(2\mu'+\mu-2\varpi'-\varpi)\}.$$

En employant la même notation que ci-dessus, ensorte que $'T = 'T' \cos\eta'$, $'\Phi = '\Phi \sin\eta'$, etc. on aura par les formules (t) (§ 177.),

$$(P) \ldots\ldots r\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) = T.a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + '\Delta.a^2\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2} + '\Theta.a^3\frac{\partial^3 A^{(0)}}{\partial a^3} + \Lambda.a^4\frac{\partial^4 A^{(0)}}{\partial a^4}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}('\Xi'-i'\Phi')a\frac{\partial A^{(t)}}{\partial a}+('\Sigma'-i'\Psi')a^2\frac{\partial\partial A^{(t)}}{\partial a^2} \\ +('\Theta'+i\Omega')a^3\frac{\partial^3 A^{(t)}}{\partial a^3}+\Lambda'.a^4\frac{\partial^4 A^{(t}}{\partial a^4}\end{array}\right\}\cos(iw+\eta),$$

Λ et Ω ayant les mêmes valeurs que ci-dessus (§. 176.).

La fonction S' (§. 169. (D)) devient $\frac{1}{2}\mathfrak{B}'\mathfrak{b}$, si les excentricités sont nulles: on aura donc dans le même cas

$$r\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right) = \frac{a}{2}\left(\mathfrak{B}'.\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial a}+\mathfrak{b}\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial a}\right) = C,$$

d'où l'on conclura la valeur générale,

$$r\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right) = C + \Delta r\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right) + \Delta r'\left(\frac{\partial C}{\partial a'}\right) + \Delta v\left(\frac{\partial C}{\partial \mu}\right) + \Delta v''\left(\frac{\partial C}{\partial \mu'}\right);$$ et l'on a

$$\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right) = \frac{1}{2}\mathfrak{B}'.\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial a} + a.\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial a}.\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial a} + \frac{a}{2}\mathfrak{B}'.\frac{\partial\partial\mathfrak{b}}{\partial a^2} + \frac{1}{2}\mathfrak{b}.\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial a} + \frac{a}{2}\mathfrak{b}.\frac{\partial\partial\mathfrak{B}'}{\partial a^2},$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial a'}\right) = \frac{a}{2}.\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial a'}.\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial a} + \frac{a}{2}\mathfrak{B}'.\frac{\partial\partial\mathfrak{b}}{\partial a\partial a'} + \frac{a}{2}.\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial a}.\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial a'} + \frac{a}{2}\mathfrak{b}.\frac{\partial\partial\mathfrak{B}'}{\partial a\partial a'},$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \mu}\right) = \frac{a}{2}.\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial \mu}.\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial a} + \frac{a}{2}\mathfrak{B}'.\frac{\partial\partial\mathfrak{b}}{\partial a\partial \mu} + \frac{a}{2}.\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial a}.\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial \mu} + \frac{a}{2}\mathfrak{b}.\frac{\partial\partial\mathfrak{B}'}{\partial a\partial \mu},$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \mu'}\right) = \frac{a}{2}.\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial \mu'}.\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial a} + \frac{a}{2}\mathfrak{B}'.\frac{\partial\partial\mathfrak{b}}{\partial a\partial \mu'} + \frac{a}{2}.\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial a}.\frac{\partial\mathfrak{b}}{\partial \mu'} + \frac{a}{2}\mathfrak{b}.\frac{\partial\partial\mathfrak{B}'}{\partial a\partial \mu'}.$$

Si on substitue dans ces formules les valeurs (H) (I) (K) (L) (§. 175.), il viendra

$$r\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right) = \frac{aa'}{4}(\cos w - \cos\psi)\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{A}^{(0)} - \frac{1}{a'^3} + \frac{1}{2}\mathfrak{A}^{(i)}\cos iw\right)(f+f') \\ +\frac{1}{2}\left(a\frac{\partial\mathfrak{A}^{(0)}}{\partial a} + a\frac{\partial\mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a}\cos iw\right)(3f+f') \\ +\frac{1}{2}f\left(a^2\frac{\partial\partial\mathfrak{A}^{(0)}}{\partial a^2} + a^2\frac{\partial\partial\mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a^2}\cos iw\right) \\ +\frac{i}{2}\sin iw\left(\mathfrak{A}^{(i)} + a\frac{\partial\mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a}\right)\theta\end{array}\right\}$$

$$+\frac{aa'}{8}\left\{\mathfrak{A}^{(0)}-\frac{a}{a'^2}+a\frac{\partial\mathfrak{A}^{(0)}}{\partial a}+\left(\mathfrak{A}^{(i)}+a\frac{\partial\mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a}\right)\cos iw\right\}\{\theta\sin w+\theta'\sin\psi\},$$

w étant $=\mu'-\mu$, et $\psi=\mu'+\mu-2\Pi$. En mettant à la place de f, f', θ, θ', leurs valeurs (§. 176.), développées jusqu'à la première puissance des excentricités, employant les mêmes dénotistions que précédemment, et faisant pour abréger,

$$
\begin{aligned}
'\mathfrak{F}=\tfrac{1}{8}\cos w-\tfrac{1}{8}\cos\psi-\tfrac{3}{16}\gamma\{&\cos(\mu'-\varpi)-\cos(\mu'+\varpi-2\Pi)\}\\
+\tfrac{1}{16}\gamma\{&\cos(\mu'-2\mu+\varpi)-\cos(\mu'+2\mu-\varpi-2\Pi)\}\\
+\tfrac{1}{4}\gamma'\{&\cos(2\mu'-\mu-\varpi')-\cos(2\mu'+\mu-\varpi'-2\Pi)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
'\mathfrak{G}=\tfrac{1}{8}\gamma\{&\cos(\mu'+\varpi-2\Pi)+\cos(\mu'+2\mu-\varpi-2\Pi)-\cos(\mu'-\varpi)-\cos(\mu'-2\mu+\varpi)\}\\
+\tfrac{1}{8}\gamma'\{&\cos(\mu-\varpi')+\cos(2\mu'-\mu-\varpi')-\cos(\mu+\varpi'-2\Pi)-\cos(2\mu'+\mu-\varpi'-2\Pi)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
'\mathfrak{H}=\tfrac{1}{8}\gamma\{&\sin(\mu'-\varpi)-\sin(\mu'-2\mu+\varpi)-\sin(\mu'+2\mu-\varpi-2\Pi)+\sin(\mu'+\varpi-2\Pi)\}\\
+\tfrac{1}{8}\gamma'\{&\sin(2\mu'+\mu-\varpi'-2\Pi)-\sin(\mu+\varpi'-2\Pi)-\sin(\mu-\varpi')-\sin(2\mu'-\mu-\varpi')\},
\end{aligned}
$$

on trouvera l'équation suivante,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P}')\ldots\ldots r\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right)=\,&'\mathfrak{F}\left\{aa'\mathfrak{A}^{(0)}-\frac{2a}{a'^2}+a^2a'\frac{\partial\mathfrak{A}^{(0)}}{\partial a}\right\}+'\mathfrak{G}a^2a'\left\{\frac{\partial\mathfrak{A}^{(0)}}{\partial a}+\frac{a}{2}\cdot\frac{\partial\partial\mathfrak{A}^{(0)}}{\partial a^2}\right\}\\
&+aa'\left\{('\mathfrak{F}'-i'\mathfrak{H}')\left(\mathfrak{A}^{(i)}+a\frac{\partial\mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a}\right)+'\mathfrak{G}'\left(a\frac{\partial\mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\partial\partial\mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a^2}\right)\right\}\cos(iw+\eta),
\end{aligned}
$$

$'\mathfrak{F}'$, $'\mathfrak{G}'$, étant les coefficiens du cosinus, et $'\mathfrak{H}'$ ceux du sinus de chaque angle η qui entre dans les fonctions $'\mathfrak{F}$, $'\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$.

§. 179. Les équations (N) (N') (P) (P') sont un répertoire, où l'on trouvera toutes les inégalités qu'on se propose de calculer. En effet ces équations donneront, par la différentiation vulgaire, la fonction (∂R), et par une intégration facile, les autres quantités qui entrent dans les équations IV—VII (§. 167.), lesquelles renferment toutes les inégalités du rayon vecteur, de la longitude, et de la latitude. Comme la dernière ne sera pas développée ici au delà de la première puissance des excentricités et des inclinaisons, nous commencerons par l'équation VII, dans laquelle il faut mettre l'unité à la place de $1-\gamma^2$, $1-s^2$, et $\cos v$. Cela posé l'équation VII deviendra

$$o = m'\delta s + na \sin v \int r \cos v \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) \partial t - na \cos v \int r \sin v \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) \partial t,$$

$\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)$ étant $\frac{m' z'}{r'^3} + \frac{m'}{\rho^3}\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = \frac{m' z'}{r'^3} - \frac{m'(z'-z)}{\rho^3}$ (§. 158. 157. (*d*) (1)). Tous les termes de l'équation précédente étant multipliés par z', nous ferons $r = a$, $r' = a'$, $v = \mu$, $v' = \mu'$, μ et μ' étant les longitudes sur l'orbite de la planète m. On aura donc, à cause de $z = o$ (§. 167.),

$\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) = m'\left(\frac{z'}{a'^3} - \frac{z'}{\rho^3}\right)$, et $\frac{1}{\rho^3} = (a^2 + a'^2 - 2aa' \cos w)^{-\frac{3}{2}} = \mathfrak{B}$ (§. 167. 169. (*f*)). partant

$\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) = -m' z' \mathfrak{B}'$; ce qui change l'équation précédente en

VII. $o = \delta s - na^2 \sin \mu \int z' \mathfrak{B}' \partial t \cos \mu + na^2 \cos \mu \int z' \mathfrak{B}' \partial t \sin \mu$,

z' étant $= a's'$ (§. 167.).

Soit (*Fig.* 41.) ♈IE l'écliptique, IA le plan de l'orbite de m, iNS celui de l'orbite de la planète m', supposée en S: abaissons les perpendiculaires SA, Sas, sur les plans IA et IE. Cela posé on a $z' = a' \sin SA$, ou $s' = a \cdot SA$, et dans le triangle SaA, sin SA $=$ sin SaA sin Sa. En nommant θ, θ', les inclinaisons des orbites m et m', relativement à l'écliptique, ou leurs tangentes, le triangle Ias fournit l'équation cos SaA $= \theta \cos$ Is, d'où il suit sin SaA $= 1$, et SA $=$ Sa: nous avons donc $z' = a'$ (Ss — as). Les triangles Ias et iSs donnent les relations, tg as ou $as = \theta \sin$ Is et S$s = \theta' \sin is$, d'où l'on tire $z' = a'(\theta' \sin is - \theta \sin Is)$. En nommant donc J, J', les longitudes des noeuds ascendans des orbites m, m', sur l'écliptique, et mettant à la place de μ, μ', les longitudes sur l'écliptique, vu que leur différence est de la seconde dimension des inclinaisons, on aura

$$z' = a'\{\theta' \sin(\mu' - J') - \theta \sin(\mu' - J)\} = a'\{(q' - q)\sin \mu' - (p' - p)\cos \mu'\},$$

en faisant pour abréger, $\theta \sin J = p$, $\theta \cos J = q$, $\theta' \sin J' = p'$, $\theta' \cos J' = q'$.

En différentiant l'équation VII, on trouvera, à cause de $\partial \mu = n \partial t$,

$$o = \frac{\partial . \delta s}{\partial t} - n^2 a^2 \cos \mu \int z' \mathfrak{B}' \partial t \cos \mu - n^2 a^2 \sin \mu \int z' \mathfrak{B}' \partial t \sin \mu,$$

et la seconde différentielle donnera

$$o = \frac{\partial\partial . \delta s}{\partial t^2} + n^3 a^2 \sin \mu \int z' \mathfrak{B}' \partial t \cos \mu - n^3 a^2 \cos \mu \int z' \mathfrak{B}' \partial t \sin \mu - n^2 a^2 z' \mathfrak{B}'.$$

Si on substitue la valeur de δs, tirée de l'équation VII, il viendra

$$o = \frac{\partial\partial\delta s}{\partial t^2} + n^2\delta s - n^2 a^2 z' \mathfrak{B}'.$$

Substituons maintenant

$z' = a'\{(q'-q)\sin\mu' - (p'-p)\cos\mu'\}$, $\mathfrak{B}' = \frac{1}{2}\mathfrak{A}^{(0)} - \frac{1}{a'^3} + \frac{1}{2}\mathfrak{A}^{(i)}\cos iw$ (§. 170. (F));

et nous aurons, par les formules (t) (§. 177.),

$$\text{VII.}\quad o = \frac{\partial\partial\delta s}{\partial t^2} + n^2\delta s - n^2 a^2 a'\left\{\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^{(0)} - \frac{1}{a'^3}\right\}\{(q'-q)\sin\mu' - (p'-p)\cos\mu'\}$$
$$-\frac{n^2}{2}a^2 a'\mathfrak{A}^{(i)}\{(q'-q)\sin(iw+\mu') - (p'-p)\cos(iw+\mu')\}.$$

§ 180. Les équations IV et VI (§. 167.) renferment encore les fonctions $\frac{\partial\partial.r\delta r}{\partial t^2}$, $\frac{\delta r}{r^2}$, $\frac{r.\partial\delta r}{\partial t\sqrt{(1-\gamma^2)}}$, $\frac{\delta r.\partial r}{\partial t\sqrt{(1-\gamma^2)}}$. Pour les développer jusqu'à la troisième dimension des excentricités, donnons aux perturbations du rayon vecteur et de la longitude (§. 165.) cette forme,

$(u)\ldots\ldots m'\delta r = m'a(u + u' + u'' + u''')$, $\quad m'\delta v = m'(U + U' + U'' + U''')$,

le nombre des traits indiquant l'exposant de la puissance des excentricités, par laquelle l'inégalité est multipliée. Il suit de là, en substituant $r = a + \Delta r$ (§. 169.), et faisant $\frac{\Delta r}{a} = \rho$, $\frac{\Delta r'}{a'} = \rho'$,

$$\frac{a\delta r}{r^2} = (u+u'+u''+u''')(1+\rho)^{-2} = (u+u'+u''+u''')(1-2\rho+3\rho^2-4\rho^3).$$

Or l'équation (e) (§. 169.) donne

$$\rho = \frac{1}{2}\gamma^2 - \gamma\left(1 - \frac{3}{8}\gamma^2\right)\cos(\mu-\varpi) - \frac{1}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi) - \frac{3}{8}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi),$$

$$\rho^2 = \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi) - \frac{1}{2}\gamma^3\{\cos(\mu-\varpi) - \cos 3(\mu-\varpi)\},$$

$$\rho^3 = -\frac{3}{4}\gamma^3\cos(\mu-\varpi) - \frac{1}{4}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi),\ \text{partant}$$

$$(1+\rho)^{-2} = 1 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \gamma\left(2+\frac{3}{4}\gamma^2\right)\cos(\mu-\varpi) + \frac{5}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi) + \frac{13}{4}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi),$$

d'où il résulte

$$[1]\ldots\ldots \frac{a\delta r}{r^2} = u\left\{1+\frac{1}{2}\gamma^2+\gamma\left(2+\frac{3}{4}\gamma^2\right)\cos(\mu-\varpi)+\frac{5}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)+\frac{13}{4}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)\right\}$$
$$+u'\left\{1+\frac{1}{2}\gamma^2+2\gamma\cos(\mu-\varpi)+\frac{5}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)\right\}+u''\{1+2\gamma\cos(\mu-\varpi)\}+u'''.$$

On trouvera de la même manière

$$r\delta r = a(1+\rho)\delta r = a^2(u+u'+u''+u''') + a^2(u+u'+u'')\rho,\ \text{donc}$$

$$\frac{\partial\partial.r\delta r}{a^2} = (1+\rho)(\partial\partial u+\partial\partial u'+\partial\partial u'')+\partial\partial u'''+2(\partial u+\partial u'+\partial u'')\partial\rho+(u+u'+u'')\partial\partial\rho.$$

Or $\frac{\partial\rho}{n\partial t} = \gamma\left(1-\frac{3}{8}\gamma^2\right)\sin(\mu-\varpi)+\gamma^2\sin 2(\mu-\varpi)+\frac{9}{8}\gamma^3\sin 3(\mu-\varpi)$,

$$\frac{\partial\partial\rho}{n^2\partial t^2} = \gamma\left(1-\frac{3}{8}\gamma^2\right)\cos(\mu-\varpi)+2\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)+\frac{27}{8}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi);$$

d'où l'on tirera

$$[2]\ldots\ldots\frac{\partial\partial.r\delta r}{n^2a^2\partial t^2} = \frac{\partial\partial u}{n^2\partial t^2}\left\{\begin{array}{l}1+\frac{1}{2}\gamma^2-\gamma\left(1-\frac{3}{8}\gamma^2\right)\cos(\mu-\varpi)\\ -\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)-\frac{3}{8}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{\partial\partial u'}{n^2\partial t^2}\left\{1+\frac{1}{2}\gamma^2-\gamma\cos(\mu-\varpi)-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)\right\}+\frac{\partial\partial u''}{n^2\partial t^2}\left\{1-\gamma\cos(\mu-\varpi)\right\}+\frac{\partial\partial u'''}{n^2\partial t^2}$$

$$+\frac{2\partial u}{n\partial t}\left\{\gamma\left(1-\frac{3}{8}\gamma^2\right)\sin(\mu-\varpi)+\gamma^2\sin 2(\mu-\varpi)+\frac{9}{8}\gamma^3\sin 3(\mu-\varpi)\right\}$$

$$+\frac{2\partial u'}{n\partial t}\left\{\gamma\sin(\mu-\varpi)+\gamma^2\sin 2(\mu-\varpi)\right\}+\frac{2\partial u''}{n\partial t}\gamma\sin(\mu-\varpi)$$

$$+u\left\{\gamma\left(1-\frac{3}{8}\gamma^2\right)\cos(\mu-\varpi)+2\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)+\frac{27}{8}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)\right\}$$

$$+u'\left\{\gamma\cos(\mu-\varpi)+2\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)\right\}+u''.\gamma\cos(\mu-\varpi).$$

On trouvera par le même procédé,

$$\frac{r.\partial\delta r}{a^2} = (1+\rho)(\partial u+\partial u'+\partial u'')+\partial u''',$$

$$\frac{\delta r.\partial r}{a^2} = (u+u'+u'')\partial\rho,\quad \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)}} = 1+\frac{1}{2}\gamma^2,\ \text{donc}$$

$$\frac{2}{\sqrt{(1-\gamma^2)}}\cdot\frac{r\partial\delta r}{na^2\partial t} = \frac{2+\gamma^2}{n\partial t}(\partial u+\partial u')+\frac{2(\partial u''+\partial u''')}{n\partial t}+\frac{(2+\gamma^2)\partial u}{n\partial t}\rho+\frac{2(\partial u'+\partial u'')}{n\partial t}\rho,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)}}\cdot\frac{\delta r.\partial r}{na^2\partial t} = \left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\right)\frac{u\partial\rho}{n\partial t}+(u'+u'')\frac{\partial\rho}{n\partial t};$$

et si on substitue les valeurs précédentes de ρ et de $\frac{\partial\rho}{n\partial t}$,

$$[3]\ldots\ldots\frac{2}{\sqrt{(1-\gamma^2)}}\cdot\frac{r\partial\delta r}{na^2\partial t} = \frac{\partial u}{n\partial t}\left\{\begin{array}{l}2(1+\gamma^2)-\gamma\left(2+\frac{1}{4}\gamma^2\right)\cos(\mu-\varpi)\\ -\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)-\frac{3}{4}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{\partial u'}{n\partial t}\left\{2(1+\gamma^2)-2\gamma\cos(\mu-\varpi)-\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)\right\}+\frac{2\partial u''}{n\partial t}\left\{1-\gamma\cos(\mu-\varpi)\right\}+\frac{2\partial u'''}{n\partial t};$$

$$[4]\ldots\ldots\frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)}}\cdot\frac{\delta r\,\partial r}{na^2\partial t} = u\gamma\left\{\left(1+\frac{1}{8}\gamma^2\right)\sin(\mu-\varpi)+\gamma\sin 2(\mu-\varpi)+\frac{9}{8}\gamma^2\sin 3(\mu-\varpi)\right\}$$

$$+u'\gamma\left\{\sin(\mu-\varpi)+\gamma\sin 2(\mu-\varpi)\right\}+u''\gamma\sin(\mu-\varpi).$$

Substituons maintenant les valeurs [1], [2], [3], [4], dans les équations IV, VI (§. 167.), qui prendront cette forme:

IV. $0 = \frac{m'\partial\partial u}{n^2\partial t^2}\{1+\frac{1}{2}\gamma^2-\gamma(1-\frac{3}{8}\gamma^2)\cos(\mu-\varpi)-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)-\frac{3}{8}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)\}$

$+\frac{m'\partial\partial u'}{n^2\partial t^2}\{1+\frac{1}{2}\gamma^2-\gamma\cos(\mu-\varpi)-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)\}+\frac{m'\partial\partial u''}{n^2\partial t^2}\{1-\gamma\cos(\mu-\varpi)\}+\frac{m'\partial\partial u'''}{n^2\partial t^2}$

$+\frac{2m'\partial u}{n\partial t}\{\gamma(1-\frac{3}{8}\gamma^2)\sin(\mu-\varpi)+\gamma^2\sin 2(\mu-\varpi)+\frac{9}{8}\gamma^3\sin 3(\mu-\varpi)\}$

$+\frac{2m'\partial u'}{n\partial t}\{\gamma\sin(\mu-\varpi)+\gamma^2\sin 2(\mu-\varpi)\}+\frac{2m'\partial u''}{n\partial t}\gamma\sin(\mu-\varpi)$

$+m'u\{1+\frac{1}{2}\gamma^2+3\gamma(1+\frac{1}{8}\gamma^2)\cos(\mu-\varpi)+\frac{9}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)+\frac{53}{8}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)\}$

$+m'u'\{1+\frac{1}{2}\gamma^2+3\gamma\cos(\mu-\varpi)+\frac{9}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)\}+m'u''\{1+3\gamma\cos(\mu-\varpi)\}+m'u'''$

$+ar\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)+2a\int(\partial R);$

VI. $m'(U+U'+U''+U''')=$

$m'u\{\gamma(1+\frac{1}{8}\gamma^2)\sin(\mu-\varpi)+\gamma^2\sin 2(\mu-\varpi)+\frac{9}{8}\gamma^3\sin 3(\mu-\varpi)\}$

$+m'u'\{\gamma\sin(\mu-\varpi)+\gamma^2\sin 2(\mu-\varpi)\}+m'u''\gamma\sin(\mu-\varpi)$

$+\frac{2m'\partial u}{n\partial t}\{1+\gamma^2-\gamma(+\frac{1}{8}\gamma^2)\cos(\mu-\varpi)-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)-\frac{3}{8}\gamma^3\cos 3(\mu-\varpi)\}$

$+\frac{2m'\partial u'}{n\partial t}\{1+\gamma^2-\gamma\cos(\mu-\varpi)-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2(\mu-\varpi)\}+\frac{2m'\partial u''}{n\partial t}\{1-\gamma\cos(\mu-\varpi)\}+\frac{2m'\partial u'''}{n\partial t}$

$+2na(1+\frac{1}{2}\gamma^2)\int r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial t+3na(1+\frac{1}{2}\gamma^2)\int\partial t\int(\partial R).$

CHAPITRE III.

Inégalités indépendantes des excentricités et des inclinaisons, et celles qui dépendent de leur première puissance.

§. 181. Reprenons l'équation VII (§. 179.), et observons qu'elle renferme la différentielle $n \partial t = \partial \mu$, sans celle $n' \partial t = \partial \mu'$. Son intégration sera donc plus facile, si l'on y introduit l'angle μ au lieu de μ', ce qui est aisé par la méthode suivante, dont nous nous servirons aussi pour simplifier les équations IV et VI. Faisons pour abréger,

$$n^2 a^2 a' \left\{ \frac{1}{2} \mathfrak{A}^{(0)} - \frac{1}{a'^3} \right\} \{(q' - q) \sin \mu' - (p' - p) \cos \mu'\} = \mathrm{Y},$$

$$\frac{n^2}{2} a^2 a' \mathfrak{A}^{(i)} \{(q' - q) \sin (iw + \mu') - (p' - p) \cos (iw + \mu')\} = \mathrm{Z},$$

$$\text{VII.} \quad 0 = \frac{\partial \partial \delta s}{\partial t^2} + n^2 \delta s - \mathrm{Y} - \mathrm{Z}.$$

Comme la valeur de i, dans le terme Z, s'étend à tous les nombres entiers, positifs et négatifs, excepté zéro qui est renfermé dans le terme Y, il est visible qu'en mettant $i - 1$ à la place de i, Z se changera en

$$\mathrm{Z}' = \frac{n^2}{2} a^2 a' \mathfrak{A}^{(i-1)} \{(q' - q) \sin (iw + \mu) - (p' - p) \cos (iw + \mu)\},$$

parce qu'alors $iw + \mu'$ devient $(i - 1)(\mu' - \mu) + \mu' = i(\mu' - \mu) + \mu$. Ce nouveau terme Z' n'est pas moins général que Z, puisque $i - 1$ s'étend, aussi bien que i, à tous les nombres entiers. Il faut cependant excepter le cas où $i = -1$, qui ne saurait être représenté par $i - 1$ qu'en faisant $i = 0$, ce qui est exclu des valeurs de i. On doit donc ajouter un nouveau terme Y' qui exprimera ce que devient Z dans le cas de $i = -1$, d'où il vient

$$\mathrm{Y}' = \frac{n^2}{2} a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)} \{(q' - q) \sin \mu - (p' - p) \cos \mu\}.$$

On observera encore, que le terme Y doit être exclu, parcequ'il est déjà renfermé dans Z'. En effet, si l'on fait $i=1$, et qu'on observe la règle de mettre $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^{(0)}-\frac{1}{a'^3}$ à la place de $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^{(i-1)}$, Z' se changera en Y. Ainsi nous sommes parvenus à cette équation,

$$o=\frac{\partial\partial\,\delta s}{\partial t^2}+n^2\,\delta s-Y'-Z'=\frac{\partial\partial\,\delta s}{\partial t^2}+n^2\,\delta s$$
$$-\frac{n^2}{2}\,a^2a'\,\mathfrak{A}^{(1)}\,\{(q'-q)\sin\mu-(p'-p)\cos\mu\}$$
$$-\frac{n^2}{2}\,a^2a'\,\mathfrak{A}^{(i-1)}\,\{(q'-q)\sin(iw+\mu)-(p'-p)\cos(iw+\mu)\}.$$

Il est aisé de voir que l'intégrale de cette équation ne peut avoir que la forme,

$$\delta s=t\,(A\sin\mu+A'\cos\mu)+B\sin(iw+\mu)+B'\cos(iw+\mu).$$

En effet il en résulte

$$\frac{\partial\partial\,\delta s}{\partial t^2}=2n\,(A\cos\mu-A'\sin\mu)-n^2t\,(A\sin\mu+A'\cos\mu)$$
$$-\{i(n'-n)+n\}^2\,\{B\sin(iw+\mu)+B'\cos(iw+\mu)\}.$$

En substituant ces valeurs de δs et de $\frac{\partial\partial\,\delta s}{\partial t^2}$ dans l'équation précédente, et égalant à zéro le coefficient de chaque argument, on trouvera que le terme multiplié par t est identiquement nul, et que

$$A=\frac{n}{4}\,a^2a'\,\mathfrak{A}^{(1)}\,(p-p'),\quad A'=\frac{n}{4}\,a^2a'\,\mathfrak{A}^{(1)}\,(q-q'),$$

$$B=\frac{n^2a^2a'}{2\{(i(n'-n)+n)^2-n^2\}}\,\mathfrak{A}^{(i-1)}(q-q'),\quad B'=\frac{n^2a^2a'}{2\{(i(n'-n)+n)^2-n^2\}}\,\mathfrak{A}^{(i-1)}(p'-p);$$

d'où l'on conclura

$$\text{VIII.}\quad\delta s=\frac{n}{4}\,a^2a'\,\mathfrak{A}^{(1)}\,\{(p-p')\sin\mu+(q-q')\cos\mu\}\,t$$
$$+\frac{n^2}{2}\cdot\frac{a^2a'\,\mathfrak{A}^{(i-1)}}{i\,(n-n')(i(n-n')-2n)}\,\{(q-q')\sin(iw+\mu)+(p'-p)\cos(iw+\mu)\}.$$

Le premier terme, étant proportionnel au tems t, croît à l'infini: il fournit donc à la vérité, aussi bien que le dernier terme, une équation périodique dont la période est donnée par l'angle μ, ou par la révolution de la planète m; mais la valeur de cette équation, ou de son coefficient $\frac{nt}{4}\,a^2a'\,\mathfrak{A}^{(1)}$, augmente indéfiniment d'une période à l'autre. C'est une suite

nécessaire de la variation des élémens p, q, p', q', ou des inégalités séculaires, qui produisent une équation de la latitude, proportionnelle au tems, et donnée par le premier terme qui, par conséquent, nous servira à déterminer les inégalités *séculaires* des élémens p, q, p', q'. Ce terme est

$$(\pi) \ldots\ldots \delta s = \frac{n}{4} a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)} \{(p - p') \sin \mu' + (q - q') \cos \mu\} t,$$

et la véritable inégalité *périodique* de la latitude deviendra, après avoir substitué (§. 179.) $p = \theta \sin J$, $q = \theta \cos J$, $p' = \theta' \sin J'$, $q' = \theta' \cos J'$,

$$\text{IX.}\quad \delta s = \frac{n^2 a^2 a' \mathfrak{A}^{(i-1)}}{2i(n-n')(i(n-n')-2n)} \{\theta \sin (iw + \mu - J) - \theta' \sin (iw + \mu - J')\}.$$

Il faut se rappeler que, dans le cas où $i = 1$, on a

$$\delta s = \frac{n^2 a^2 a'}{(n-n')(n+n')} \left\{\frac{1}{2} \mathfrak{A}^{(0)} - \frac{1}{a'^3}\right\} \{\theta' \sin (\mu' - J') - \theta \sin (\mu' - J)\}.$$

§. 182. La solution des équations IV et VI, consiste en peu de mots, à intégrer la première, et à substituer dans l'équation VI, les valeurs de u, u', u'', et de leurs différentielles, données par cette intégration, ainsi que les valeurs de R et de $r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$, développées plus haut. Nous ferons ces opérations successivement par rapport aux quantités u, u', u'', u''', et nous commencerons par u.

Si on exclut des équations IV et VI (§. 180.) tous les termes multipliés par γ ou γ', elles deviendront

$$o = \frac{m' \partial \partial u}{\partial t^2} + m' n^2 u + n^2 a r \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) + 2 n^2 a \int (\partial R),$$

$$m' U = \frac{2 m' \partial u}{n \partial t} + 2 n a \int r \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) \partial t + 3 n a \int \partial t \int (\partial R);$$

et l'on a dans le même cas (§. 163.), $S' = o$ et $r\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right) = o$. l'un et l'autre étant de l'ordre de δ^2; d'où il suit $R = m' S$ (§. 168. (A)) et $r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = m' r \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)$. On a de plus (§. 176. 178.) $\Gamma = \frac{1}{2}$, $\Xi = \frac{1}{2}$, $'\Gamma = \frac{1}{2}$, $'\Xi = \frac{1}{2}$, et tous les autres coefficiens sont nuls, ainsi que l'argument η de Ξ et de $'\Xi$. Les équations (N) (P) (§. 177. 178.) donneront donc

$$R = \frac{m'}{2} A^{(0)} + \frac{m'}{2} A^{(i)} \cos iw, \quad \text{et} \quad r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{m'}{2} a \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{m'}{2} a \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} \cos iw.$$

Or $\partial . iw = i(n' - n) \partial t$, d'où l'on tirera

$$(\partial R) = \frac{m'}{2}\, in\, A^{(i)}\, \partial t \sin iw, \quad \int(\partial R) = \frac{m'n}{2(n-n')}\, A^{(i)} \cos iw + m'C,$$

C étant une constante arbitraire. Il s'en suit

$$\int \partial t \int (\partial R) = m\, Ct - \frac{m' n\, A^{(i)}}{2i(n-n')^2} \sin iw,$$

$$\int r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial t = \frac{m'}{2}\, at\, \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} - \frac{m'a}{2i(n-n')}\, \frac{\partial A^{i}}{\partial a} \sin iw,$$

$$o = \frac{\partial\partial u}{\partial t^2} + n^2 u + n^2 a\left(2C + \frac{a}{2}\, \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\right) + n^2 a\left(\frac{n\, A^{(i)}}{n-n'} + \frac{a}{2}\, \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right) \cos iw,$$

$$U = \frac{2\partial u}{n\partial t} + nat\left(3C + a\, \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\right) - \frac{na}{i(n-n')}\left(\frac{3n\, A^{(i)}}{2(n-n')} + a\, \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right) \sin iw.$$

Le second terme de la dernière équation, étant proportionnel au tems, donnerait une partie du moyen mouvement: on le fera disparaître, en déterminant l'arbitraire C ensorte que $3C + a\, \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}$ soit nul. Si on substitue cette valeur, $C = -\frac{a}{3}\, \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}$, les deux équations précédentes deviendront

$$o = \frac{\partial\partial u}{\partial t^2} + n^2 u - \frac{n^2}{6}\, a^2\, \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + n^2\left(\frac{n}{n-n'}\, a A^{(i)} + \frac{a^2}{2}\, \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right) \cos iw,$$

$$U = \frac{2\partial u}{n\partial t} - \frac{n}{i(n-n')}\left(\frac{3na\, A^{(i)}}{2(n-n')} + a^2\, \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right) \sin iw.$$

L'intégrale de la première ne peut avoir que cette forme,

$$(a) \ldots\ldots u = A + B^{(i)} \cos iw, \text{ d'où il suit}$$

$$(b) \ldots\ldots \frac{\partial u}{\partial t} = i(n-n')\, B^{(i)} \sin iw, \quad \frac{\partial\partial u}{\partial t^2} = -i^2 (n-n')^2\, B^{(i)} \cos iw,$$

ce qui doit être identique avec

$$-n^2\left(A - \frac{a^2}{6}\, \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\right) - n^2\left(B^{(i)} + \frac{na}{n-n'}\, A^{(i)} + \frac{a^2}{2}\, \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right) \cos iw.$$

Il en résulte

$$(c) \ldots\ldots A = \frac{a^2}{6}\, \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}, \quad B^{(i)} = \frac{n^2}{i^2(n-n')^2 - n^2}\left(\frac{na\, A^{(i)}}{n-n'} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right);$$

d'où l'on conclura les inégalités, indépendantes des excentricités,

$$m' a u = m' a A + m' a B^{(i)} \cos iw,$$

$$m' U = m' \left\{\frac{2i(n-n')}{n}\, B^{(i)} - \frac{n}{i(n-n')}\left(\frac{3na\, A^{(i)}}{2(n-n')} + a^2\, \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\right\} \sin iw.$$

Si on substitue les valeurs de A et de $B^{(i)}$ que nous venons de trouver, on aura

$$\text{X}.\ m'\delta r = \frac{m'}{6}a^3\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{m'n^2\cos iw}{(i(n-n')+n)(i(n-n')-n)}\left(\frac{na^2A^{(i)}}{n-n'} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right),$$

$$\text{XI}.\ m'U = \frac{m'n^2\sin iw}{i(n-n')(i(n-n')+n)(i(n-n')-n)}\left(\frac{i^2(n-n')^2+3n^2}{2(n-n')}aA^{(i)} + na^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right).$$

L'équation (B) (§. 169.) nous apprend que B, et par conséquent $A^{(0)}$ et $A^{(i)}$ (§. 170. (E)) sont des fonctions des lignes a, a', de la dimension -1, d'où il suit que $aA^{(i)}$, $a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}$, $a^3\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}$, sont des nombres. Il est donc visible que l'équation XI exprime la longitude en nombres, tandis que l'équation X donne le rayon vecteur en parties de la distance moyenne a qui, suivant l'usage adopté dans les tables astronomiques, sera exprimé en parties du rayon de l'orbite de la terre. Ainsi, pour avoir les inégalités de la longitude en secondes d'un degré, il faut diviser U par sin 1″, ou ce qui revient au même, il faut ajouter 5,3144251 au logarithme de U, donné par l'équation XI. Il en est de même des autres inégalités u', U', etc. Au reste il est aisé de voir, que les équations X et XI restent les mêmes, soit qu'on donne à i des valeurs positives ou négatives; d'où il suit qu'après les avoir multipliées par 2, on ne doit étendre la valeur de i qu'aux nombres positifs.

§. 183. Considérons maintenant les inégalités de l'ordre des excentricités, et tirons pour cet effet, des équations IV, VI (§. 180.), tous les termes multipliés par la première puissance de γ ou γ. Relativement à ces termes, les équations (§. 176. 178.) donneront

$$\Gamma = \Xi = \tfrac{1}{2}\gamma'\cos(\mu'-\varpi'),\quad \Delta = \Sigma = {}'\Delta = {}'\Sigma = \tfrac{1}{2}\gamma'\cos(\mu'-\varpi') - \tfrac{1}{2}\gamma\cos(\mu-\varpi),$$

$$\Phi = {}'\Phi = \gamma\sin(\mu-\varpi) - \gamma'\sin(\mu'-\varpi'),\quad {}'\Gamma = {}'\Xi = \gamma'\cos(\mu'-\varpi') - \tfrac{1}{2}\gamma\cos(\mu-\varpi),$$

tous les autres coefficiens étant nuls. On a donc par les équations (N) (P) (§. 177. 178.),

$$R = m'S = \frac{m'}{2}\left(A^{(0)} + a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\right)\gamma'\cos(\mu'-\varpi') - \frac{m'}{2}a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\gamma\cos(\mu-\varpi)$$
$$-m'\left(iA^{(i)} + \frac{a}{2}\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\gamma\cos(iw+\mu-\varpi) + \frac{m'}{2}\left\{(2i+1)A^{(i)} + a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right\}\gamma'\cos(iw+\mu'-\varpi'),$$

$$r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = m'r\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) = -\frac{m'}{2}\left(a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + a^2\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right)\gamma\cos(\mu-\varpi)$$
$$+m'\left(a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right)\gamma'\cos(\mu'-\varpi') - \frac{m'}{2}\left\{(2i+1)a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + a^2\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right\}\gamma\cos(iw+\mu-\varpi)$$
$$+m'\left\{(i+1)a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right\}\gamma'\cos(iw+\mu'-\varpi').$$

Il suit de là

$$(\partial R) = \frac{m'n}{2} a \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} \gamma \partial t \sin(\mu - \varpi) - (i-1) m'n \left(iA^{(i)} + \frac{a}{2} \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right) \gamma \partial t \sin(iw + \mu - \varpi)$$
$$+ \frac{i}{2} m'n \left\{ (2i+1) A^{(i)} + a \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} \right\} \gamma' \partial t \sin(iw + \mu' - \varpi'),$$

$$\text{IV.}\quad o = m' \frac{\partial \partial u'}{\partial t^2} + m' n^2 u' - m' \frac{\partial \partial u}{\partial t^2} \gamma \cos(\mu - \varpi) + 2 m' n \frac{\partial u}{\partial t} \gamma \sin(\mu - \varpi)$$
$$+ 3 m' n^2 u \gamma \cos(\mu - \varpi) + n^2 a r \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) + 2 n^2 a \textstyle\int (\partial R),$$

$$\text{VI.}\quad m' U' = m' u \gamma \sin(\mu - \varpi) - \frac{2m'}{n} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \gamma \cos(\mu - \varpi) + \frac{2m'}{n} \cdot \frac{\partial u'}{\partial t}$$
$$+ 2 n a \textstyle\int r \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) \partial t + 3 n a \int \partial t \int (\partial R).$$

Maintenant la méthode employée dans le §. 181. nous servira à chasser l'angle μ' des quantités (∂R) et $r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$, pour en faciliter l'intégration. Faisons

$$\frac{m'}{2} a \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} + \frac{m'}{2} a^2 \frac{\partial \partial A^{(1)}}{\partial a^2} = W, \qquad m' a \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{m'}{2} a^2 \frac{\partial \partial A^{(0)}}{\partial a^2} = W',$$

$$\frac{m'}{2} \left\{ (2i+1) a \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial \partial A^{(i)}}{\partial a^2} \right\} = X, \quad m' \left\{ (i+1) a \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial \partial A^{(i)}}{\partial a^2} \right\} = X',$$

$$\frac{m'}{2} n a \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} = Y, \quad (i-1) m' n \left(i A^{(i)} + \frac{a}{2} \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right) = Z, \quad \frac{i}{2} m' n \left\{ (2i+1) A^{(i)} + a \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} \right\} = Z',$$

de sorte que

$$r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = -W\gamma \cos(\mu - \varpi) + W'\gamma' \cos(\mu' - \varpi') - X\gamma \cos(iw + \mu - \varpi) + X'\gamma' \cos(iw + \mu' - \varpi'),$$
$$(\partial R) = Y\gamma \partial t \sin(\mu - \varpi) - Z\gamma \partial t \sin(iw + \mu - \varpi) + Z'\gamma' \partial t \sin(iw + \mu' - \varpi').$$

Il est visible qu'en mettant $i - 1$ à la place de i, X' se changera en

$$X'' = m' i a \frac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a} + \frac{m'}{2} a^2 \frac{\partial \partial A^{(i-1)}}{\partial a^2}, \text{ et } iw + \mu' - \varpi' \text{ en } iw + \mu - \varpi'.$$

Si l'on fait $i = -1$, X' se changera en

$$X''' = \frac{m'}{2} a^2 \frac{\partial \partial A^{(1)}}{\partial a^2}, \text{ et } iw + \mu' - \varpi' \text{ en } \mu - \varpi'.$$

On peut donc substituer $X'' + X'''$ au lieu de X'; mais il faut observer que, dans le cas de $i = 1$, X'' sera identique avec W', de sorte que le terme W' devient superflu. Cela posé on aura

$$(a) \ldots\ldots r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = -\frac{m'}{2}\left(a \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial \partial A^{(1)}}{\partial a^2}\right)\gamma \cos(\mu - \varpi) + \frac{m'}{2} a^2 \frac{\partial \partial A^{(1)}}{\partial a^2} \gamma' \cos(\mu - \varpi')$$
$$- \frac{m'}{2} \left\{ (2i+1) a \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + a^2 \frac{\partial \partial A^{(i)}}{\partial a^2} \right\} \gamma \cos(iw + \mu - \varpi)$$
$$+ m' \left(i a \frac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\partial \partial A^{(i-1)}}{\partial a^2} \right) \gamma' \cos(iw + \mu - \varpi').$$

Par le même procédé on trouvera que Z' devient $\frac{i-1}{2}m'n\left\{(2i-1)A^{(i-1)}+a\frac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a}\right\}$, si on met $i-1$ à la place de i, et que dans le cas de $i=-1$, Z' devient $\frac{m'}{2}n\left(A^{(1)}-a\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}\right)$. En substituant ces deux termes au lieu de Z', on aura

$$(e)\ldots\ldots(\partial R)=\frac{m'}{2}na\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\gamma\partial t\sin(\mu-\varpi)+\frac{m'}{2}n\left(A^{(1)}-a\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}\right)\gamma'\partial t\sin(\mu-\varpi')$$

$$-(i-1)m'n\left(iA^{(i)}+\frac{a}{2}\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\gamma\partial t\sin(iw+\mu-\varpi)$$

$$+\frac{i-1}{2}m'n\left\{(2i-1)A^{(i-1)}+a\frac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a}\right\}\gamma'\partial t\sin(iw+\mu-\varpi').$$

Si l'on fait $i=1$, le dernier terme devient nul, comme cela doit être, parceque l'expression primitive de (∂R) ne renferme point l'argument $\mu-\varpi'$. On conclura des équations (e) et (d),

$$(f)\ldots\ldots\int(\partial R)=-\frac{m'}{2}a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\gamma\cos(\mu-\varpi)-\frac{m'}{2}\left(A^{(1)}-a\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}\right)\gamma'\cos(\mu-\varpi')$$

$$-\frac{(i-1)m'n}{i(n-n')-n}\left\{\begin{array}{l}\left(iA^{(i)}+\frac{a}{2}\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\gamma\cos(iw+\mu-\varpi)\\-\left(\frac{2i-1}{2}A^{(i-1)}+\frac{a}{2}\frac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a}\right)\gamma'\cos(iw+\mu-\varpi')\end{array}\right\},$$

$$(g)\ldots\ldots\int\partial t\int(\partial R)=-\frac{m'}{2n}a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\gamma\sin(\mu-\varpi)-\frac{m'}{2n}\left(A^{(1)}-a\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}\right)\gamma'\sin(\mu-\varpi')$$

$$+\frac{(i-1)m'n}{(i(n-n')-n)^2}\left\{\begin{array}{l}\left(iA^{(i)}+\frac{a}{2}\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\gamma\sin(iw+\mu-\varpi)\\-\left(\frac{2i-1}{2}A^{(i-1)}+\frac{a}{2}\frac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a}\right)\gamma'\sin(iw+\mu-\varpi')\end{array}\right\},$$

$$(h)\ldots\ldots\int r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial t=-\frac{m'}{2n}\left(a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}+a^2\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right)\gamma\sin(\mu-\varpi)+\frac{m'}{2n}a\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}\gamma'\sin(\mu-\varpi')$$

$$+\frac{m'}{i(n-n')-n}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2i+1}{2}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}+\frac{a^2}{2}\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right)\gamma\sin(iw+\mu-\varpi)\\-\left(ia\frac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a}-\frac{a^2}{2}\frac{\partial\partial A^{(i-1)}}{\partial a^2}\right)\gamma'\sin(iw+\mu-\varpi')\end{array}\right\}.$$

Les valeurs précédentes (a) (b) (§. 162.) donneront, conformément aux formules (t) (§. 177.),

$$(i)\ldots\ldots\begin{cases} u\cos(\mu-\varpi) = \mathrm{A}\cos(\mu-\varpi) + \mathrm{B}^{(i)}\cos(iw+\mu-\varpi), \\ u\sin(\mu-\varpi) = \mathrm{A}\sin(\mu-\varpi) + \mathrm{B}^{(i)}\sin(iw+\mu-\varpi), \\ \frac{\partial u}{\partial t}\sin(\mu-\varpi) = -i(n-n')\,\mathrm{B}^{(i)}\cos(iw+\mu-\varpi), \\ \frac{\partial u}{\partial t}\cos(\mu-\varpi) = i(n-n')\,\mathrm{B}^{(i)}\sin(iw+\mu-\varpi), \\ \frac{\partial\partial u}{\partial t^2}\cos(\mu-\varpi) = -i^2(n-n')^2\,\mathrm{B}^{(i)}\cos(iw+\mu-\varpi). \end{cases}$$

Si l'on substitue ces valeurs, ainsi que (d) (f), dans l'équation IV, et qu'on fasse pour abréger,

$$\mathrm{D} = n^2\left(a^2\,\frac{\partial\,\mathrm{A}^{(0)}}{\partial a} + \frac{a^3}{2}\,\frac{\partial\partial\,\mathrm{A}^{(0)}}{\partial a^2}\right), \qquad \mathrm{D}' = n^2\left(a\,\mathrm{A}^{(1)} - a^2\,\frac{\partial\,\mathrm{A}^{(1)}}{\partial a} - \frac{a^3}{2}\,\frac{\partial\partial\,\mathrm{A}^{(1)}}{\partial a^2}\right),$$

$$\mathrm{E}^{(i)} = \frac{2i^3(n-n')^2 + i^2(n-n')(3n'-n) - 3n^2}{(n-n')\,(i^2(n-n')^2 - n^2)}\,n^3\,a\,\mathrm{A}^{(i)}$$

$$+ \frac{i^2(n-n')^2 + i^2 n(n-n') - 3n^2}{i^2(n-n')^2 - n^2}\,n^2\,a^2\,\frac{\partial\,\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a} + \frac{n^2}{2}\,a^3\,\frac{\partial\partial\,\mathrm{A}^{(i)}}{\partial a^2},$$

$$\mathrm{E}^{(i-1)} = \frac{(i-1)(2i-1)}{i(n-n')-n}\,n^3 a\mathrm{A}^{(i-1)} + \frac{i^2(n-n')-n}{i(n-n')-n}\,n^2 a^2\,\frac{\partial\mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a} + \frac{n^2}{2}\,a^3\,\frac{\partial\partial\mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a^2},$$

l'équation IV. deviendra

$$\mathrm{o} = \frac{\partial\partial u'}{\partial t^2} + n^2 u' - \mathrm{D}\gamma\cos(\mu-\varpi) - \mathrm{D}'\gamma'\cos(\mu-\varpi')$$

$$- \mathrm{E}^{(i)}\gamma\cos(iw+\mu-\varpi) + \mathrm{E}^{(i-1)}\gamma'\cos(iw+\mu-\varpi').$$

Il est visible que l'intégrale par rapport à u' doit avoir la forme suivante,

$$(k)\ldots\ldots u' = f\gamma\cos(\mu-\varpi) + f'\gamma'\cos(\mu-\varpi') + gt\gamma\sin(\mu-\varpi) + g't\gamma'\sin(\mu-\varpi')$$

$$+ h\gamma\cos(iw+\mu-\varpi) + h'\gamma'\cos(iw+\mu-\varpi'),$$

d'où l'on tirera

$$(l)\ldots\ldots \frac{\partial u'}{\partial t} = (g-nf)\gamma\sin(\mu-\varpi) + (g'-nf')\gamma'\sin(\mu-\varpi') + gnt\gamma\cos(\mu-\varpi) + g'nt\gamma'\cos(\mu-\varpi')$$

$$+ \{i(n-n')-n\}\{h\gamma\sin(iw+\mu-\varpi) + h'\gamma'\sin(iw+\mu-\varpi')\},$$

$$(m)\ldots\ldots \frac{\partial\partial u'}{\partial t^2} = n(2g-nf)\,\gamma\cos(\mu-\varpi) + n(2g'-nf')\,\gamma'\cos(\mu-\varpi')$$

$$- n^2 t\,\{g\gamma\sin(\mu-\varpi) + g'\gamma'\sin(\mu-\varpi')\}$$

$$- \{i(n-n')-n\}^2\,\{h\gamma\cos(iw+\mu-\varpi) + h'\gamma'\cos(iw+\mu-\varpi')\}.$$

En substituant ces valenrs dans l'équation IV, et égalant séparément à zéro le coefficient de chaque argument, on trouvera que f, f', disparaissent du calcul, et que ce sont, par conséquent, deux constantes arbitraires. Les autres coefficiens seront

$$(n)\ldots. g = \frac{D}{2n},\; g' = \frac{D'}{2n},\; h = -\frac{E^{(i)}}{i(n-n')(i(n-n')-2n)},\; h' = \frac{E^{(i-1)}}{i(n-n')(i(n-n')-2n}.$$

Les valeurs (g) (h) (i) (l) donneront à l'équation VI la forme suivante,

$$U' = \left(A + \frac{D}{n^2} - 2f - \frac{5}{2}a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} - a^3\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right)\gamma\sin(\mu-\varpi) + \frac{D}{n}t\gamma\cos(\mu-\varpi)$$

$$+\left(\frac{D'}{n^2} - 2f' - \frac{5}{2}aA^{(1)} + \frac{3}{2}a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} + a^3\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}\right)\gamma'\sin(\mu-\varpi') + \frac{D'}{n}t\gamma'\cos(\mu-\varpi')$$

$$+\left\{\begin{array}{l} B^{(i)} - \frac{2i(n-n')}{n}B^{(i)} + \frac{2(i(n-n')-n)}{n}h \\ + \frac{3(i-1)n^2a}{(i(n-n')-n)^2}\left(iA^{(i)} + \frac{a}{2}\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right) \\ + \frac{n}{i(n-n')-n}\left((2i+1)a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + a^3\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right) \end{array}\right\}\gamma\sin(iw+\mu-\varpi)$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \frac{2(i(n-n')-n)}{n}h' - \frac{3(i-1)n^2a}{2(i(n-n')-n)^2}\left((2i-1)A^{(i-1)} + a\frac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a}\right) \\ - \frac{2na^2}{i(n-n')-n}\left(i\frac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a} + \frac{a}{2}\frac{\partial\partial A^{(i-1)}}{\partial a^2}\right) \end{array}\right\}\gamma'\sin(iw+\mu-\varpi').$$

On fera bien de déterminer les quantités arbitraires f, f', ensorte que le premier et le troisième termes, qui donneraient une partie de l'équation du centre, disparaissent: d'où l'on tirera, en substituant les valeurs précédentes de D, D', et $A = \frac{a^2}{6}\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}$ (§. 182.),

$$f = -\frac{2}{3}a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} - \frac{a^3}{4}\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2},\; f' = -\frac{a}{4}\left(A^{(1)} - a\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} - a^2\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}\right).$$

Le second et le quatrième terme, savoir

$$(y)\ldots\ldots m'U' = \frac{m'}{n}t\{D\gamma\cos(\mu-\varpi) + D'\gamma'\cos(\mu-\varpi')\},$$

nous serviront à déterminer les inégalités séculaires des élémens γ, ϖ. Il ne reste donc que les deux derniers termes. En substituant au lieu de $B^{(i)}$, D, D', h, h', leurs valeurs (c) (§. 182.) et (n), et faisant

$$\mathfrak{R}^{(i)} = \frac{\left\{\begin{array}{c} i^4(n-n')^4 - i^4(n-n')^3(2n-n') + 2i^2n(n-n')^2(2n-n') \\ - i^2n(n-n')(7n-11n') + 10in^3(n-n') - 6n^4 \end{array}\right\}}{i(n-n')^2(i(n-n')+n)(i(n-n')-n)^2(i(n-n')-2n)}n^2aA^{(i)}$$

$$+\frac{i^4(n-n')^3 + 3i^3n(n-n')^2 - 2i^2n(n-n')(2n-3n') + 12in^3(n-n') - 12n^3}{2i(n-n')(i(n-n')+n) + (i(n-n')-n)^2(i(n-n')-2n)}n^2a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}$$

$$+\frac{n^3a^3}{i(n-n')(i(n-n')-n)(i(n-n')-2n)}\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2},$$

$$\mathfrak{N}^{(i)} = \frac{(i-1)(2i-1)\{i^2(n-n')^2 - 2in(n-n') + 4n^2\}}{2i(n-n')(i(n-n')-n)^2(i(n-n')-2n)}\, n^2 a \mathrm{A}^{(i-1)}$$

$$+ \frac{i^2(n-n')^2 + i^2(n-n')(n+n') + 2in(n-n') - 4n^2}{2i(n-n')(i(n-n')-n)^2(i(n-n')-2n)}\, n^2 a^2 \frac{\partial \mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a}$$

$$+ \frac{n^2 a^3}{i(n-n')(i(n-n')-n)(i(n-n')-2n)} \frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a^2};$$

l'équation précédente deviendra

$$\text{XIII.}\quad m'\mathrm{U}' = -m'\mathfrak{M}^{(i)}\gamma \sin(i(\mu'-\mu)+\mu-\varpi) + m'\mathfrak{N}^{(i)}\gamma' \sin(i(\mu'-\mu)+\mu-\varpi').$$

Si l'on substitue dans l'équation (k) les valeurs précédentes de f, f', g, g', h, h', en excluant l'inégalité séculaire, renfermée dans les termes gt, $g't$, et qu'on fasse pour abréger

$$\mathrm{M}^{(i)} = -h = \frac{2i^2(n-n')^2 + i^2(n-n')(3n'-n) - 3n^2}{i(n-n')^2(i^2(n-n')^2-n^2)(i(n-n')-2n)}\, n^3 a \mathrm{A}^{(i)}$$

$$+ \frac{i^2(n-n')^2 + i^2 n(n-n') - 3n^2}{i(n-n')(i^2(n-n')^2-n^2)(i(n-n')-2n)}\, n^2 a^2 \frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a} + \frac{n^2 a^3}{2i(n-n')(i(n-n')-2n)} \frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a^2}.$$

$$\mathrm{N}^{(i)} = h' = \frac{(i-1)(2i-1)n^3}{i(n-n')(i(n-n')-n)(i(n-n')-2n)}\, a \mathrm{A}^{(i-1)}$$

$$+ \frac{i(i^2(n-n')-n)\, n^2 a^2}{i(n-n')(i(n-n')-n)(i(n-n')-2n)} \frac{\partial \mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a} + \frac{n^2 a^3}{2i(n-n')(i(n-n')-2n)} \frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(i-1)}}{\partial a^2},$$

on aura l'inégalité périodique du rayon vecteur,

$$\text{XII.}\quad m'\delta r = m' a u' = -m' a^3 \left(\frac{2}{3}\frac{\partial \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a} + \frac{a}{4}\frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a^2}\right) \gamma \cos(\mu-\varpi)$$

$$- m' \frac{a^2}{4}\left(\mathrm{A}^{(1)} - a\frac{\partial \mathrm{A}^{(1)}}{\partial a} - a^2 \frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(1)}}{\partial a^2}\right) \gamma' \cos(\mu-\varpi')$$

$$- m'\mathrm{M}^{(i)} a\gamma \cos(i(\mu'-\mu)+\mu-\varpi) + m'\mathrm{N}^{(i)} a\gamma' \cos(i(\mu'-\mu)+\mu-\varpi').$$

CHAPITRE IV.

Inégalités séculaires.

§. 184. Déterminons maintenant les inégalités *séculaires*, ou les variations des élémens des orbites, et commençons par celle du moyen mouvement ou du grand axe. Avant d'enter en matière, il ne sera pas inutile de dire quelques mots, pour fixer le véritable sens de cette variation, parcequ'un moyen mouvement variable pourrait paraitre une absurdité. Le moyen mouvement est celui qui tient le milieu entre le plus rapide et le plus lent des mouvemens vrais, et il est trouvé par des observations qui embrassent un long intervalle de tems, en supposant le mouvement uniforme pendant ce tems. Il est donc évident que la valeur du moyen mouvement doit toujours être censée se rapporter seulement à la période, à laquelle s'étendent les observations qui ont servi à déterminer cette valeur. Le moyen mouvement sera donc variable, si des observations, faites dans une autre période, donnent une valeur différente. Dans un pareil cas le moyen mouvement changera d'une période à l'autre, et rigoureusement parlant, il ne pourra être supposé constant pendant une seule période, attendu que ce qui arrive en passant d'une période à l'autre, doit également avoir lieu entre les différentes parties de la même période: ainsi la valeur du moyen mouvement, déterminé par observation, n'est qu'approximative, et ne pourra être regardée comme constante, que relativement à une période qui est assés courte, pour que la variation du moyen mouvement pendant cet intervalle soit insensible; ainsi qu'on l'a vu dans la théorie de la lune. Cette variation du moyen mouvement est ce qu'on appelle proprement *équation séculaire*.

Reprenons l'équation (19) (§. 163.)

$$v = nt = \frac{3}{1+m} \int\int an\partial t(\partial R), \text{ et } \delta v = \delta n\partial t.$$

On a vu (§. 176. 177.), que les fonctions Γ, Δ, Θ, Λ, ℑ, 𝔊, ne renferment, outre des termes constans, que les cosinus des angles η, lesquels sont la somme ou la différence des multiples de μ μ', plus un angle constant, de sorte qu'elles pourront être exprimées généralement par $F\cos(i'n't - int + A)$, attendu que $\mu = \varepsilon + nt$, $\mu' = \varepsilon' + n't$. Les coefficiens partiels Γ′, T′, etc. sont fonctions des excentricités, dont les variations sont de l'ordre des masses perturbatrices m', et qui par conséquent, dans la fonction R qui est déjà multipliée par m', doivent être regardées comme constantes, si l'on néglige les carrés des masses. Ainsi ces coefficiens, après avoir été multipliés par $\cos(i.\mu' - \mu) + \eta$, auront pareillement la forme $F\cos(i'n't - int + A)$. Il suit delà, par les équations (N) (N′) (§. 177.), que chaque terme de R est de la même forme, de sorte que $R = m'k\cos(i'v' - iv + A)$. Or nous avons vu (§. 160.), qu'en différentiant par rapport à t, il faut regarder les élémens de l'orbite comme constans, d'où il suit $(\partial R) = m'ik\partial v \sin(i'v' - iv + A)$; donc en substituant $\partial v = n\partial t$, et faisant pour abréger, $i'v' - iv + A = \Phi$,

$$(\partial R) = m'ikn\partial t \sin\Phi,\ \int(\partial R) = m'ikn\int\partial t \sin\Phi = -\frac{m'ikn}{i'n' - in}\cos\Phi.$$

Si on substitue l'unité au lieu de $1 + m$, dans l'expression précédente de v et dans l'équation (18) (§. 162.), il viendra

$$v = 3an\int\partial t(\partial R),\ \frac{1}{a} = 2\int(\partial R),\ \text{donc } \frac{1}{a} = -\frac{2m'ikn}{i'n' - in}\cos\Phi \text{ et } v = -\frac{3m'ikan^2}{(i'n' - in)^2}\sin\Phi.$$

Il suit delà que, si l'angle Φ n'est pas constant, les quantités a et v ne sont assujèties qu'à des inégalités périodiques: ainsi le moyen mouvement n'aura aucune équation séculaire, à moins que $i'n' - in$ ne soit nul, ou que les moyens mouvemens n, n', ne soient commensurables; ce qui n'est pas le cas dans le système planétaire. C'est d'ailleurs infiniment peu vraisemblable, parceque, n, n', étant des constantes arbitraires, leur commensurabilité supposerait un cas unique parmi une infinité de cas également possibles. Nous n'avons considéré ici que l'action d'une seule planète m'; mais R est proprement fonction des actions de toutes les planètes m', m'', etc. ainsi Φ aura

la forme $(in + i'n' + i''n'' + \text{cet.})\,t + A$, et une équation séculaire du moyen mouvement suppose $in + i'n' + i''n'' + \text{cet.} = 0$, co qui est encore moins probable: l'équation séculaire qui aurait lieu, si les révolutions de deux planètes étaient commensurables, sera détruite par l'action des autres planètes, à moins que les moyens mouvemens de toutes les planètes ne soient commensurables. Si on donne à i une valeur négative, on aura l'équation de condition $in + i'n' = 0$; cela suppose également, que les deux moyens mouvemens sont commensurables, et que l'un est rétrograde, ce qui n'existe pas dans le système planétaire. Il suit de ce qui précède, que les grands axes, les moyens mouvemens, ou les durées moyennes des révolutions de toutes les planètes de notre système, ne sont assujètis à aucune équation séculaire, et que ces élémens n'éprouvent que des oscillations, ou des inégalités périodiques qui dépendent de la configuration des planètes. Mais il en suit en même tems, que cela n'est pas d'une nécessité absolue, qu'au contraire l'invariabilité du moyen mouvement, sur laquelle est fondée la stabilité du système solaire, est due à l'arrangement particulier de ce système, et au rapport des distances des planètes, que l'auteur de la nature a choisi. Il est vrai que ce résultat remarquable, que MM. Lagrange et Laplace ont trouvé par des méthodes différentes (1), suppose qu'on néglige les carrés des masses, et les puissances des excentricités, plus élevées que la troisième; ainsi que nous l'avons fait dans toute cette analyse. Mais M. Poisson a démontré le premier, que les quantités du second ordre des forces perturbatrices ne peuvent non plus produire aucune inégalité séculaire du moyen mouvement, et qu'en général la stabilité du système planétaire n'est point altérée, en ayant égard au carré des masses et à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons (2). Cette vérité importante fut prouvée dans la même année par MM. Laplace (3) et Lagrange (4).

---

(1) *Théor. des var. sécul. des élém. des Plan.* par *M. de la Grange* (dans les *Mém. de Berlin, Ann.* 1781.). *Théor. de Jupiter et de Saturne* par M. *de la Place* (dans les *Mém. de Paris*, Ann. 1785.). *Mécan. cél. Tom. I. Liv. II*, nº. 54. 65.

(2) *Sur les inégal. sécul. des moyens mouv. des plan.* (*Journal de l'école polytechn. Cah. XV.*).

(3) *Supplém. à la Mécan. céleste.*

(4) *Sur la théor. des var. des élém. des plan. etc.* (*Mém. de l'Instit. de France, Ann.* 1808.).

§. 185. Puisque les latitudes et et longitudes des planètes dépendent de leurs noeuds, inclinaisons, anomalies, etc. les variations de ces élémens doivent nécessairement altérer le lieu de la planète, d'où résulteront de nouvelles équations des latitudes et des longitudes: et ce sont justement les termes (x) (y) que nous avons séparés des équations périodiques (§. 181. 183.). Ayant donc déterminé l'effet des inégalités séculaires sur les équations périodiques du lieu de la planète, ces nouvelles équations, comparées aux termes (x) (y), nous serviront à déterminer les inégalités séculaires. Mais ces dernières étant l'effet des perturbations, et par conséquent multipliées par la masse perturbatrice, leur influence sur les perturbations périodiques doit être de l'ordre du carré des masses, que nous négligeons ici: il faudra donc se borner à l'effet qu'elles ont sur les inégalités indépendantes des perturbations, ou sur les équations elliptiques. Conformément aux notations adoptées dans le §. 179, la tangente de la latitude ou s est égale à $\theta \sin(v - J)$, où l'on peut substituer μ au lieu de v: on a donc

$$s = q \sin \mu - p \cos \mu.$$

Or si l'action de m' fait éprouver aux élémens p, q, dans le tems t, les inégalités séculaires $m' t \delta p$, $m' t \delta q$, il en naîtra en même tems une équation de la latitude, $m' \delta s$, de sorte qu'on aura

$s + m \delta s = (q + m' t \delta q) \sin \mu - (p + m' t \delta p) \cos \mu$, partant $\delta s = t(\delta q \sin \mu - \delta p \cos \mu)$.
Si on compare cette équation avec (x) (§. 181.), il en résulte

$$\delta p = \frac{n}{4} a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)} (q' - q), \quad \delta q = \frac{n}{4} a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)} (p - p').$$

La différentiation des équations

$$p = \theta \sin J, \quad q = \theta \cos J, \quad p' = \theta' \sin J', \quad q' = \theta' \cos J', \text{ donne}$$

$$\delta p = \delta \theta . \sin J + \theta \delta J . \cos J, \quad \delta q = \delta \theta . \cos J - \theta \delta J . \sin J,$$

d'où l'on tirera

$$\delta \theta = \delta p \sin J + \delta q \cos J, \quad \theta \delta J = \delta p \cos J - \delta q \sin J,$$

et en substituant les valeurs précédentes de δp, δq,

$$\delta \theta = \frac{n}{4} a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)} \{(q' - q) \sin J + (p - p') \cos J\},$$

$$\theta \delta J = \frac{n}{4} a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)} \{(q' - q) \cos J + (p' - p) \sin J\},$$

les variations des inclinaisons et des noeuds dans un tems quelconque t étant $m' t \delta \theta$ et $m' t \delta J$. Si l'on substitue maintenant les valeurs de p, q, et qu'on désigne par N le moyen mouvement annuel de la planète m, on trouvera *l'accroissement de l'inclinaison*, et la *précession des noeuds* par rapport aux étoiles fixes, dans le nombre d'années t,

$$\text{XIV.} \quad m' t \delta \theta = \frac{N}{4} m' t a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)} \theta' \sin (J - J'),$$

$$\text{XV.} \quad m' t \delta J = \frac{N}{4} m' t a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)} \left(\frac{\theta'}{\theta} \cos (J - J') - 1 \right).$$

Ces équations nous apprennent, 1) que l'action des autres planètes peut imprimer aux noeuds d'une planète un mouvement direct ou rétrograde, selon que $\cos (J - J')$ est plus ou moins grand que $\frac{\theta}{\theta'}$, mais que les noeuds reculeront toujours, si la distance entre les noeuds ascendans des deux planètes qui agissent l'une sur l'autre, est plus grande que 90 degrés; 2) que l'inclinaison va en croissant ou en décroissant, selon que $J' - J$ est plus ou moins grand que la demi-circonférence, et que cette variation est d'autant plus considérable, que l'inclinaison de l'orbite de la planète perturbatrice est plus grande, et que la distance entre les deux noeuds approche d'avantage de 90 degrés.

Si la planète perturbatrice m' est la terre, θ' est nul: on a donc $\delta \theta = 0$, et $\delta J = -\frac{N}{4} a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)}$. Comme on peut substituer à la terre toute autre planète, on en conclura cette vérité importante, que

l'angle, formé par les plans de deux orbites planétaires, n'est point altéré par leur attraction mutuelle,

malgré les variations continuelles, auxquelles est assujètie la position de ces deux plans, ainsi que leur inclinaison relativement à l'écliptique ou à un autre plan quelconque. Il en suit de plus, que la commune section des deux plans aura, en vertu de leur attraction mutuelle, un mouvement *rétrograde*, quoique leurs noeuds relativement à l'écliptique puissent avoir un mouvement direct.

§. 186. On peut trouver immédiatement le même résultat, à l'aide des fonctions c, c', c''. La différentielle des équations $p = \frac{c''}{c}$, $q = \frac{c'}{c}$ (§. 160. (6)), est

$$\partial p = \frac{\partial c''}{c} - \frac{c''\partial c}{c^2}, \quad \partial q = \frac{\partial c'}{c} - \frac{c'\partial c}{c^2}, \text{ d'où il suit (§. 185.)}$$

$$\partial \theta = \frac{1}{c}(\partial c'' \sin J + \partial c' \cos J - \theta \partial c), \quad \theta \partial J = \frac{1}{c}(\partial c'' \cos J - \partial c' \sin J).$$

Puisque les quantités c', c'', sont de l'ordre θ, leurs carrés doivent être négligés ici: ainsi l'équation (h) (§. 161.) donne $c = \Pi = V\frac{e}{2B}$ (§. 161. (11)). Si on substitue $B = n^2a^3$ (§. 163.) et $e = 2a(1-\gamma^2) = 2a$, on aura $c = \frac{1}{na}$. En mettant à la place de ∂c, $\partial c'$, $\partial c''$, leurs valeurs (f) (§. 159.), et observant que $z = 0$ (§. 167.), les équations précédentes deviendront

$$\partial \theta = -na\partial t \left\{ y\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) \sin J + x\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) \cos J + y\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\theta - x\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\theta \right\},$$

$$\theta \partial J = na\partial t \left\{ x\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) \sin J - y\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) \cos J \right\};$$

d'où l'on tirera, en substituant $x = a\cos v$, $y = a\sin v$, $x' = a'\cos v'$, $y' = a'\sin v'$ (§. 167.),

$$\partial \theta = -na^2\partial t \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) \cos(v-J) + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\theta \sin v - \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\theta \cos v \right\},$$

$$\theta \partial J = -na^2\partial t \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) \sin(v-J).$$

Substituons maintenant (§. 158. (b) (c)),

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = m'x'\left(\frac{1}{a'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + \frac{m'x}{\rho^3}, \quad \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = m'y'\left(\frac{1}{a'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) + \frac{m'y}{\rho^3},$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) = m'z'\left(\frac{1}{a'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right), \quad \frac{1}{\rho^3} = (a^2 + a'^2 - 2aa'\cos w)^{-\frac{3}{2}} \text{ (§. 167.)}$$

$$= \mathfrak{B} \text{ (§ 169. } (f)) = \mathfrak{A}^{(0)} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^{(i)} \cos iw \text{ (§. 170. (F))},$$

dans les dernières équations qui deviendront:

$$\partial \theta = m'na^2\partial t \left\{ \mathfrak{A}^{(0)} - \frac{1}{a'^3} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^{(i)} \cos iw \right\} \{ z' \cos(v-J) - a'\theta \sin iw \},$$

$$\theta \partial J = m'na^2z'\partial t \left\{ \mathfrak{A}^{(0)} - \frac{1}{a'^3} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^{(i)} \cos iw \right\} \sin(v-J).$$

Or $z' = a'\{(q'-q)\sin \mu' + (p-p')\cos \mu'\}$ (§. 179.), d'où il est aisé de voir, que le produit de $\mathfrak{A}^{(0)} - \frac{1}{a'^3}$ par $z'\sin(v-J)$, par $z'\cos(v-J)$, et par $\theta \sin w$, ne pourra donner que des termes périodiques; il en est de même du produit $\cos iw \sin w = \sin(i+1)w$, qui est périodique ou nul. Il ne restera donc pour les inégalités séculaires, que les termes

$$\partial \theta = \frac{m'}{2}\, n a^2 a' \mathfrak{A}^{(i)} \partial t \cos i w \{(q'-q)\sin\mu' + (p-p')\cos\mu'\}\cos(v-J),$$

$$\theta \partial J = \frac{m'}{2}\, n a^2 a' \mathfrak{A}^{(i)} \partial t \cos i w \{(q'-q)\sin\mu' + (p-p')\cos\mu'\}\sin(v-J).$$

Si l'on développe les produits des sinus et cosinus suivant les formules (t) (§. 177.), on aura les argumens $(i+1)\mu' - (i-1)\mu - J$ et $(i+1)w + J$; et il est aisé de voir que le premier ne peut pas devenir constant, quelque valeur qu'on donne au nombre entier i, à moins qu'on ne suppose $(i+1)\mu' - (i-1)\mu = 0$, ou la commensurabilité des moyens mouvemens μ, μ', qui n'existe pas dans le système planétaire. Il ne restera donc que l'argument $(i+1)w + J$, qui se change en J, si l'on fait $i = -1$: d'où il viendra

$$\partial \theta = \frac{m'}{4}\, n a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)} \partial t \{(q'-q)\sin J + (p-p')\cos J\},$$

$$\theta \partial J = \frac{m'}{4}\, n a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)} \partial t \{(q'-q)\cos J + (p'-p)\sin J\}.$$

Substituant $p = \theta \sin J$, $q = \theta \cos J$, $p' = \theta' \sin J'$, $q' = \theta' \cos J'$ (§. 179.), on trouvera les équations XIV, XV.

§. 187. Le même procédé donnera les inégalités séculaires des excentricités et des apsides. La différentielle de Δv (§. 169. (e)) par rapport à γ et ϖ est

$$\partial . \Delta v = 2\partial\gamma \sin(\mu - \varpi) - 2\gamma\partial\varpi \cos(\mu - \varpi),$$

ou en mettant à la place de $\partial\gamma$, $\partial\varpi$, les variations séculaires $m't\delta\gamma$, $m't\delta\varpi$,

$$m'\delta\Delta v = 2m't\{\delta\gamma\sin(\mu-\varpi) - \gamma\delta\varpi\cos(\mu-\varpi)\};$$

ce qui étant comparé avec l'équation (y) (§. 183.), donnera

$$\left(\delta\varpi + \frac{D}{2n}\right)\gamma\cos(\mu-\varpi) = \delta\gamma\sin(\mu-\varpi) - \frac{D'}{2n}\gamma'\cos(\mu-\varpi').$$

Si l'on fait pour abréger,

$(a)\ldots\ldots \gamma\sin\varpi = h,\ \gamma\cos\varpi = l,\ \gamma'\sin\varpi' = h',\ \gamma'\cos\varpi' = l',$

et qu'on multiplie la dernière équation par γ, elle deviendra

$$0 = \sin\mu\left\{h\gamma\delta\varpi + \frac{Dh + D'h'}{2n}\gamma - l\delta\gamma\right\} + \cos\mu\left\{l\gamma\delta\varpi + \frac{Dl + D'l'}{2n}\gamma + h\delta\gamma\right\},$$

d'où l'on tirera, en égalant séparément à zéro chaque terme,

$$0 = h\gamma\delta\varpi + \frac{Dh + D'h'}{2n}\gamma - l\delta\gamma, \quad 0 = l\gamma\delta\varpi + \frac{Dl + D'l'}{2n}\gamma + h\delta\gamma,$$

et éliminant successivement $\delta\varpi$ et $\delta\gamma$,

$$(h^2+l^2)\,\delta\gamma = \frac{D'(h'l-l'h)}{2n}\,\gamma, \quad (h^2+l^2)\,\delta\varpi = -\frac{D(h^2+l^2)+D'(l'l+h'h)}{2n}.$$

Mais $h^2+l^2=\gamma^2$, $h'l-l'h=\gamma\gamma'\sin(\varpi'-\varpi)$, $l'l+h'h=\gamma\gamma'\cos(\varpi'-\varpi)$, parlant

$$\delta\gamma = \frac{D'}{2n}\,\gamma'\sin(\varpi'-\varpi), \qquad \delta\varpi = -\frac{D}{2n} - \frac{D'}{2n}\cdot\frac{\gamma'}{\gamma}\cos(\varpi'-\varpi).$$

Substituant les valeurs de D, D′ (§. 183.), on aura

l'accroissement de l'excentricité, et la *précession des apsides* par rapport aux étoiles fixes, dans le nombre d'années t,

$$\text{XVI.}\ m'\,\delta\gamma = \frac{N}{4}\,m'a\gamma't\left(2A^{(1)} - 2a\,\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} - a^2\,\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}\right)\sin(\varpi'-\varpi),$$

$$\text{XVII.}\ m'\,\delta\varpi = -\frac{N}{4}\,m'at\left\{\begin{array}{l} 2a\,\dfrac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + a^2\,\dfrac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2} \\ +\left(2A^{(1)} - 2a\,\dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial a} - a^2\,\dfrac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}\right)\dfrac{\gamma'}{\gamma}\cos(\varpi'-\varpi) \end{array}\right\}.$$

On peut vérifier les valeurs précédentes à l'aide des fonctions f, f'. Comme le plan des x, y, est ici l'orbite de m, on a (§. 161. 160. 159. (3) (f))

$$f=-l,\ f'=-h,\ f''=0,\ c'=0,\ c''=0\ (\S.\ 160.),$$

$$Bc\,\partial t = x\,\partial y - y\,\partial x, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = y\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - x\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right),$$

d'où l'on tirera (§. 159. (g))

$$-\partial f' = \partial h = (x\partial y - y\partial x)\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + \partial x\left\{x\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - y\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right\},$$

$$-\partial f = \partial l = -(x\partial y - y\partial x)\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \partial y\left\{x\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - y\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right\}.$$

Mais on a (§. 167.)

$$x=r\cos v,\ \ y=r\sin v,\ \ x'=r'\cos v',\ \ y'=r'\sin v',$$

$$\partial x = \partial r\cos v - r\,\partial v\sin v,\ \partial y = \partial r\sin v + r\,\partial v\cos v,\ x\partial y - y\partial x = r^2\,\partial v,$$

ce qui donne aux équations précédentes la forme

$$\partial h = r^2\,\partial v\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + r\,(\partial r\cos v - r\,\partial v\sin v)\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos v - \frac{\partial R}{\partial x}\sin v\right),$$

$$\partial l = -r^2\,\partial v\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - r\,(\partial r\sin v + r\,\partial v\cos v)\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos v - \frac{\partial R}{\partial x}\sin v\right).$$

On a de plus (§. 158. (e) (h))

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = \frac{m'\cos v'}{r'^2} - \frac{m'r'\cos v'}{\rho^3} + \frac{m'r\cos v}{\rho^3},\ \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \frac{m'\sin v'}{r'^2} - \frac{m'r'\sin v'}{\rho^3} + \frac{m'r\sin v}{\rho^3},$$

et en différentiant l'équation (E) (§. 167.),

$$\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{m' \cos(v'-v)}{r'^2} + \frac{m'r}{\rho^3} - \frac{m' r' \cos(v'-v)}{\rho^3},$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right) = \frac{m' r \sin(v'-v)}{r'^2} - \frac{m' r r' \sin(v'-v)}{\rho^3}, \text{ partant}$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) \cos v - \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right) \frac{\sin v}{r},$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) \sin v + \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right) \frac{\cos v}{r},\ x\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - y\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right).$$

En substituant ces valeurs dans les équations précédentes, et observant que $\partial h \sin \varpi + \partial l \cos \varpi = \partial \gamma$, $\partial h \cos \varpi - \partial l \sin \varpi = \gamma \partial \varpi$, on trouvera

$$\partial \gamma = -r^2 \partial v \sin(v-\varpi)\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) - \{\partial r \sin(v-\varpi) + 2r\partial v \cos(v-\varpi)\}\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right),$$

$$\gamma \partial \varpi = r^2 \partial v \cos(v-\varpi)\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \{\partial r \cos(v-\varpi) - 2r\partial v \sin(v-\varpi)\}\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right).$$

Substituons maintenant (§. 169. (*e*)), en négligeant le carré des excentricités,

$$r = a\{1 - \gamma \cos(\mu - \varpi)\}, \quad v = \mu + 2\gamma \sin(\mu - \varpi),$$

$$\partial r = an\partial t . \gamma \sin(\mu - \varpi) \quad \partial v = n\partial t\{1 + 2\gamma \cos(\mu - \varpi)\},$$

$$r\partial v = an\partial t\{1 + \gamma\cos(\mu - \varpi)\},\ \sin(v-\varpi) = \sin(\mu - \varpi) + \gamma \sin 2(\mu - \varpi),$$

$$\cos(v-\varpi) = \cos(\mu-\varpi) - \gamma + \gamma \cos 2(\mu - \varpi).$$

Cela donnera, en faisant pour abréger, $\mu - \varpi = \Phi$, $\mu' - \varpi' = \Phi'$,

$$\partial\gamma = -an\partial t(\sin\Phi + \tfrac{3}{2}\gamma\sin 2\Phi)r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) - an\partial t(2\cos\Phi - \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{5}{2}\gamma\cos 2\Phi)\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right),$$

$$\gamma\partial\varpi = an\partial t(\cos\Phi - \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{3}{2}\gamma\cos 2\Phi)r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) - an\partial t(2\sin\Phi + \tfrac{5}{2}\gamma\sin 2\Phi)\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right).$$

L'équation (P) (§. 178.) donnera

$$\frac{r}{m'}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{a}{2}\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} - \frac{a}{2}\left(\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + a\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right)\gamma\cos\Phi$$

$$+ a\left(\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{a}{2}\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right)\gamma'\cos\Phi' + \frac{a}{2}\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\cos iw$$

$$-\frac{a}{2}\left\{(2i+1)\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + a\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right\}\gamma\cos(iw+\Phi) + a\left\{(i+1)\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{a}{2}\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right\}\gamma'\cos(iw+\Phi').$$

On a d'ailleurs $\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right) = m'\left(\frac{\partial B}{\partial \mu}\right)$, si l'excentricité est nulle, d'où il suit

$$\frac{1}{m'}\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial B}{\partial \mu}\right) + \frac{\Delta r}{a}.a\left(\frac{\partial\partial B}{\partial a\partial\mu}\right) + \frac{\Delta r'}{a'}a'\left(\frac{\partial\partial B}{\partial a'\partial\mu}\right) + \Delta v\left(\frac{\partial\partial B}{\partial\mu^2}\right) + \Delta v'\left(\frac{\partial\partial B}{\partial\mu\partial\mu'}\right).$$

Si l'on substitue les rapports différentiels (§. 175.), il viendra $\frac{1}{m'}\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right) =$

$$\tfrac{i}{2}\ldots^{(i)}\sin iw-\left(i^2A^{(i)}+\frac{i}{2}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\gamma\sin(iw+\Phi)+\left(\frac{2i^2+i}{2}A^{(i)}+\frac{i}{2}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\gamma'\sin(iw+\Phi').$$

Puisque nous cherchons ici les inégalités séculaires, il ne faut employer que les termes constans. Cela posé on trouvera

$$\frac{\partial\gamma}{m'}=-an\partial t\left\{\begin{array}{l}\left[(i+1)a\dfrac{\partial A^{(i)}}{\partial a}+\dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right]\gamma'\cos(iw+\Phi')\sin\Phi\\ +\left[(2i^2+i)A^{(i)}+ia\dfrac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right]\gamma'\sin(iw+\Phi')\cos\Phi\end{array}\right\},$$

$$\frac{\gamma\partial\varpi}{m'}=-\frac{a^2}{4}n\gamma\partial t\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}-\frac{a^2}{2}n\partial t\left(\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}+a\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right)\gamma\cos^2\Phi$$

$$+an\partial t\left\{\begin{array}{l}\left[(i+1)a\dfrac{\partial A^{(i)}}{\partial a}+\dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right]\gamma'\cos(iw+\Phi')\cos\Phi\\ -\left[(2i^2+i)A^{(i)}+ia\dfrac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right]\gamma'\sin(iw+\Phi')\sin\Phi.\end{array}\right.$$

En développant les produits des sinus et cosinus, on aura

$$\frac{\partial\gamma}{m'}=-\frac{n}{2}\partial t\left\{(2i^2+i)aA^{(i)}-a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}-\frac{a^3}{2}\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right\}\gamma'\sin\{(i+1)w+\varpi-\varpi'\},$$

$$\frac{\gamma\partial\varpi}{m'}=-\frac{an}{2}\partial t\left\{\begin{array}{l}a\dfrac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\gamma+\dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\gamma\\ +\left[(2i^2+i)A^{(i)}-a\dfrac{\partial A^{(i)}}{\partial a}-\dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right]\gamma'\cos[(i+1)w+\varpi-\varpi']\end{array}\right\}.$$

Si on fait maintenant $i=-1$, il viendra

$$\partial\gamma=-\frac{m'}{2}n\partial t\left(aA^{(1)}-a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}-\frac{a^3}{2}\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}\right)\gamma'\sin(\varpi-\varpi'),$$

$$\partial\varpi=-\frac{m'}{2}n\partial t\left(a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}+\frac{a^3}{2}\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right)-\frac{m'}{2}n\partial t\left(aA^{(1)}-a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}-\frac{a^3}{2}\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}\right)\frac{\gamma'}{\gamma}\cos(\varpi-\varpi');$$

les mêmes formules que les précédentes (XVI. XVII.).

§. 188. Les facteurs $\theta'\sin(J-J')$, $\frac{\theta'}{\theta}\cos(J-J')$, $\gamma'\sin(\varpi'-\varpi)$, $\frac{\gamma'}{\gamma}\cos(\varpi'-\varpi)$, éprouvent des changemens, dus aux variations $\delta\theta$, δJ, $\delta\gamma$, $\delta\varpi$; d'où il suit que ces variations ne sont pas rigoureusement proportionnelles au tems, et que les expressions précédentes ne sont exactes que pendant un certain tems qui peut s'étendre à deux ou trois siècles, à cause de la lenteur avec laquelle changent les facteurs $\theta'\sin(J-J')$, etc. Mais si l'on veut étendre les formules XIV — XVII à des tems plus éloignés, il faut y appliquer une correction. Désignons par θ, J, θ', J', γ, ϖ, γ', ϖ', les valeurs

de ces élémens à l'époque d'où l'on part, par (θ), (J) etc. leurs valeurs qui auront lieu au bout de 200 ans, et par $[\theta]$, [J], etc. celles qui auront lieu après un tems quelconque t. Cela posé, on a d'après le théorème de Taylor,

$$(a) \ldots\ldots [\theta] = \theta + t\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{t^2}{2}\frac{\partial \partial \theta}{\partial t^2} + \text{cet.} \quad [J] = J + t\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{t^2}{2}\cdot\frac{\partial \partial J}{\partial t^2} + \text{cet.}$$

et ainsi du reste. Les premières différentielles $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, etc. sont les vitesses des variations des élémens θ, etc. qui sont données par les formules XIV—XVII, dans lesquelles il faut substituer successivement les actions de toutes les planètes au lieu de celle de m. Faisons pour abréger, $\frac{N}{4} m' a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)} = A$, $A\theta' \sin(J - J') = b$, $A\frac{\theta'}{\theta}\cos(J - J') = c$, A, b, c, étant l'effet total de l'action de toutes les planètes m', m'', etc. Cela posé on aura (XIV. XV.)

$$(b) \ldots\ldots \frac{\partial \theta}{\partial t} = b, \qquad \frac{\partial J}{\partial t} = c - A,$$

et pour un nombre d'années t, qui ne surpasse pas 200,

$$\theta = \theta + bt, \qquad J = J + (c - A)t,$$

donc au bout de 200 ans,

$$(\theta) = \theta + 200\, b, \qquad (J) = J + 200\,(c - A).$$

On calculera de la même manière, et pour la même époque,

$$(\theta'), \ (J'), \ (\theta''), \ (J''), \ \text{etc.}$$

Si l'on substitue (θ), (J), (θ'), (J'), etc. au lieu de θ, J, θ', etc. dans les formules XIV, XV, on trouvera les valeurs $\frac{(\partial \theta)}{\partial t}$, $\frac{(\partial J)}{\partial t}$, que les variations annuelles auront au bout de 200 ans: partant

$$(c) \ldots\ldots \frac{\partial \partial \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{200}\left(\frac{(\partial \theta)}{\partial t} - b\right), \ \frac{\partial \partial J}{\partial t^2} = \frac{1}{200}\left\{\frac{(\partial J)}{\partial t} - (c - A)\right\}, \text{ et ainsi du reste.}$$

Après cela les formules (a) donneront les valeurs des élémens θ, J, γ, ϖ, pour un tems quelconque.

On peut aussi former les différentielles secondes, en différentiant les équations XIV — XVII, ce qui donnera (b),

$$\frac{\partial \partial \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial b}{\partial t} = A\frac{\partial \theta'}{\partial t}\sin(J - J') + A\theta'\left(\frac{\partial J}{\partial t} - \frac{\partial J'}{\partial t}\right)\cos(J - J') =$$

$$A b' \sin(J - J') + A\theta'(c - A - c' + A')\cos(J - J'),$$

d'où il suivra le même résultat.

CHAPITRE V.

Inégalités du second ordre.

§ 189 Les inégalités des planètes, qui sont indépendantes de leurs excentricités, ou qui dépendent de leur première puissance, et que nous avons désignées par u, U, u', U, renferment, sous la forme que nous leur avons donnée, tous les argumens dont elles sont susceptibles, les premières u, U, ayant l'argument $i(\mu'-\mu)$, les dernières, u', U', les argumens $i\mu'-(i-1)\mu-\varpi$ et $i\mu'-(i-1)\mu-\varpi'$, où l'on doit mettre à la place de i tous les nombres entiers, tant positifs que négatifs, en commençant par $i=1$, jusqu'à ce qu'on parviendra à des équations inconsidérables. Si l'on voulait opérer d'une manière aussi générale sur les équations qui dépendent des puissances supérieures des excentricités, le travail serait immense et inutile. Les formules qui donnent les inégalités U, U', sont des fonctions de i, n, n', dont la valeur diminue, à mesure que le nombre i augmente: on peut donc s'arrêter, dès qu'on est parvenu à une valeur de i, qui donne une équation inconsidérable. Mais il n'en est pas de même des inégalités d'un ordre supérieur. Il peut arriver, et nous en verrons un exemple frappant, que des valeurs plus grandes de i, et des puissances plus élevées des excentricités, donnent des inégalités très-considérables. Il sera donc nécessaire de choisir d'avance les termes à calculer, en déterminant *a priori* les argumens qui pourront produire des inégalités considérables.

On se rappellera qu'en intégrant un terme d'un argument quelconque, il faut le diviser par la vitesse, avec laquelle cet argument croît. En effet, si R, et par conséquent $r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$, renferme un terme A cos Φ, il en résultera pour (∂R) le terme $A'\,\partial t \sin\Phi$ ou $\frac{A\,\partial\Phi}{\zeta}\sin\Phi$, ζ étant $=\frac{\partial\Phi}{\partial t}$; pour $\int(\partial R)$ le terme $-\frac{A'}{\zeta}\cos\Phi$, et pour $\partial t\int(\partial R)$ le terme $-\frac{A'\partial\Phi}{\zeta^2}\cos\Phi$, d'où il vien-

dra $\int \partial t \int (\partial R) = -\frac{A'}{\zeta^2} \sin \Phi$, A, A', ζ, étant des fonctions de n et n'. Il s'agit donc de trouver des argumens Φ tels que $\frac{A'}{\zeta}$ soit très-grand ou $\frac{\zeta}{A'}$ très-petit; et il est visible que cela dépend du rapport qui existe entre les moyens mouvemens, n, n', des deux planètes dont on se propose de développer l'action mutuelle. Or comme n et n' ne se trouvent multipliés que par des nombres entiers, de sorte que ζ aura la forme $\varkappa n - \varkappa' n'$, $\varkappa$, $\varkappa'$ s'étendant à tous les nombres entiers, ζ ne peut devenir très-petit par rapport à A', fonction dans laquelle n et n' sont multipliés par d'autres nombres entiers, que dans le cas où les moyens mouvemens des deux planètes ont entre eux un rapport presque commensurable, ou qui peut être exprimé à peu près par deux nombres entiers, $n : n' :: \lambda' : \lambda$. Si, dans un pareil cas, on fait $\varkappa = \lambda$, $\varkappa' = \lambda'$, le diviseur $\zeta = \varkappa n - \varkappa' n'$ est presque nul; et comme il n'entre pas dans la fonction A', l'inégalité qui est multipliée par $\frac{A'}{\zeta}$, sera très-grande. L'équation ζ ou $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \lambda n - \lambda' n'$ donne $\Phi = \lambda\mu - \lambda'\mu' +$ const.: on n'a donc qu'à chercher les argumens Φ, dans lesquels μ et μ' se trouvent multipliés par deux nombres, l'un étant positif, l'autre négatif, qui expriment à peu près le rapport des moyens mouvemens n et n'.

Déterminons maintenant la puissance des excentricités, de laquelle dépend l'argument $\Phi = \lambda\mu - \lambda'\mu'$. Tous les argumens sont formés par la combinaison de la fonction B ou $A^{(i)} \cos iw$ avec les fonctions (e; (§. 169), dont le terme général a la forme $\gamma^{i'} \frac{\sin}{\cos} i'(\mu - \varpi)$. Il en résulte dans R (§. 177. (N)) un terme de la forme $\cos(iw + \eta) = \cos(iw + i'(\mu - \varpi)) = \cos(i\mu' + (i' - i)\mu + C)$. On a donc, pour les argumens que nous cherchons ici, $i = \lambda'$, $i - i' = \lambda$, d'où il suit que l'exposant i' de la puissance de l'excentricité γ, de laquelle dépend l'argument Φ, est $i - \lambda = \lambda' - \lambda$. Les séries ($e$) nous apprennent encore, que le coefficient de $\frac{\sin}{\cos} i'(\mu - \varpi)$ est $\gamma^{i'}$, accompagné de $\gamma^{i'+2}$, $\gamma^{i'+4}$, etc. mais non de $\gamma^{i'+1}$, etc. de sorte qu'ayant calculé l'inégalité qui dépend de la puissance $\gamma^{i'}$, on sait qu'elle est exacte aux quantités de l'ordre $\gamma^{i'+2}$ près, et que la puissance $\gamma^{i'+1}$ n'y ajoutera rien. Il est aisé de voir qu'il en est de même de l'excentricité γ', parcequ'il ne s'agit ici que de la différence des nombres i, i'.

En effet, si l'on combine le terme général de (e), $(\gamma')^{i''} \frac{\sin}{\cos} i''(\mu' - \varpi')$ avec $\cos iw$, il viendra $(\gamma')^{i''} \cos(iw + i''(\mu' - \varpi')) = (\gamma')^{i''} \cos((i + i'')\mu' - i\mu - i''\varpi')$, d'où il suit $i = \lambda$, $i + i'' = \lambda'$, donc $i'' = \lambda' - \lambda$, comme précédemment. La combinaison des deux termes $\gamma^{i'} \frac{\sin}{\cos} i'(\mu - \varpi)$ et $(\gamma')^{i''} \frac{\sin}{\cos} i''(\mu' - \varpi')$ donnera $\gamma^{i'} (\gamma')^{i''} \frac{\sin}{\cos} (i'\mu + i''\mu' + C)$, d'où il viendra un terme de $R = \gamma^{i'} (\gamma')^{i''}$ $\cos\{(i + i'')\mu' - (i - i')\mu + C\}$. On a donc $i + i' = \lambda'$, $i - i = \lambda$, d'où l'on tire $i' + i'' = \lambda' - \lambda$. Ainsi il est prouvé que, pour développer l'inégalité qui a l'argument $\lambda\mu - \lambda'\mu'$ ou $\lambda'\mu' - \lambda\mu$, il faut remonter à l'ordre $\lambda' - \lambda$ des excentricités.

C'est par de pareils raisonnemens que l'illustre Laplace a fait une des plus grandes découvertes dans l'astronomie physique. Comme il n'y a rien de plus instructif et intéressant, que de tracer ou de suivre le chemin que le génie a pris pour découvrir les vérités sublimes qui sont le sujet de cet ouvrage, je me suis fait un devoir, de prouver chaque vérité, autant que le permettent les bornes que j'ai dû me prescrire, par le même enchainement d'idées qui a guidé les premiers inventeurs. L'action mutuelle des deux grandes planètes du système solaire produit dans leurs mouvemens une inégalité très-considérable, dont la période est si longue que, durant quelques siècles, elle ressemble à une inégalité séculaire. Les observations avaient cependant fait reconnaître, que ce n'était pas une véritable équation séculaire, mais qu'elle avait une période d'à peu près mille ans (§. 151.). Comme les recherches des plus grands géomètres n'indiquaient aucune équation qui fût à la fois très-grande et d'une période aussi longue, ce phénomène paraissait renverser la théorie de Newton. M. de Laplace, considérant que les géomètres n'avaient eu égard qu'à la première puissance des excentricités, en conclut que cette grande inégalité devait dépendre des puissances supérieures, et il commença par déterminer la puissance des excentricités, et l'argument qui pût fournir une pareille inégalité. C'est alors que, par les raisonnemens que nous venons de développer, ce grand géomètre découvrit l'inégalité de ces deux planètes, qui a une période de plus de neuf cens ans, et qui est la plus grande de toutes les perturbations. On a vu qu'afin que l'argument $\phi = \lambda\mu - \lambda'\mu'$ donne, après l'intégration, une inégalité

considérable, sa différentielle, divisée par celle du tems, $\lambda n - \lambda' n' = \zeta$, doit être très petite; or comme $\zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ est la vitesse, avec laquelle l'argument Φ croit, l'inégalité doit changer très-lentement, et par conséquent sa période doit être très-longue. Il est donc visible, qu'on remplira à la fois les deux conditions, en déterminant l'argument Φ de la manière que nous venons de développer.

§. 190. Les moyens mouvemens, n, n', n'', des plus grandes planètes du système solaire, Jupiter, Saturne, et Uranus, ont entre eux un rapport presque commensurable, de sorte qu'en nombres ronds ils peuvent être exprimés à peu près par les proportions, $n : n' :: 5 : 2$, et $n' : n'' :: 3 : 1$. On a donc à peu près, par rapport à Jupiter et Saturne, $5n' - 2n = 0$, et relativement à Saturne et Uranus, $3n'' - n' = 0$; d'où l'on conclura, dans le premier cas, $\lambda = 2$, $\lambda' = 5$, $i' = \lambda' - \lambda = 3$, et dans le second cas, $i' = 2$. La grande inégalité de Jupiter et de Saturne est donc de l'ordre des cubes des excentricités, et celle de Saturne et d'Uranus est de l'ordre des carrés. Relativement à Jupiter et Uranus on a $n : n'' :: 15 : 2$, ce qui donnerait la treizième puissance des excentricités.

Outre ces inégalités qui sont données par les termes $f(\partial R)$ et $r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$, il y en a d'autres assés considérables, qui ne se manifestent pas aussi immédiatement, parcequ'elles sont données par les autres termes de l'équation IV (§. 180.); on les trouve principalement parmi celles du second ordre. Relativement au carré des excentricités, l'équation IV. donne des termes, dans lesquels u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}$, sont multipliés par $\gamma^2 \, {}^{\sin}_{\cos} \, 2(\mu - \varpi)$, et u', $\frac{\partial u'}{\partial t}$, $\frac{\partial \partial u'}{\partial t^2}$, par $\gamma \, {}^{\sin}_{\cos} (\mu - \varpi)$. Or u étant $= A \cos iw$ (§. 182.), $u' = B\gamma \cos(i\mu' - (i-1)\mu - \varpi) + C\gamma' \cos(i\mu' - (i-1)\mu - \varpi')$ (XII. §. 183.), A, B, C, étant fonctions de n et n', cela donne des termes de la forme $\gamma^2 \cos(iw + 2\mu - 2\varpi)$, $\gamma\gamma' \cos(iw + 2\mu - \varpi - \varpi')$, c'est-à-dire, de l'ordre du carré des excentricités, et de l'argument $iw + 2\mu + C = i\mu' - (i-2)\mu + C = \eta$. L'équation IV. prendra donc la forme, $0 = \frac{\partial \partial u''}{\partial t^2} + n^2 u'' + L \cos \eta$, dont l'intégrale est $u'' = K \cos \eta$, ce qui donne $\frac{\partial u''}{\partial t} = K \{(i-2)n - in'\} \sin \eta$, et

$$\frac{\partial\partial u''}{\partial t^2} = -K\{(i-2)n - in'\}^2 \cos\eta,$$ d'où il résulte

$$0 = \{L + n^2 K - K((i-2)n - in')^2\} \cos\eta,$$ donc

$$K = \frac{L}{((i-2)n - in')^2 - n^2} \quad \text{et} \quad u'' = \frac{L\cos\eta}{((i-1)n - in')((i-3)n - in')}.$$

Les équations u'', U'', auront donc un terme considérable, si l'un de ces deux diviseurs est très-petit; ou si in' est à peu près égal à $(i-1)n$ ou à $(i-3)n$. Relativement à Jupiter et Saturne, on a à peu près $5n' = 2n$: en faisant donc $i = 5$, le diviseur $(i-3)n - in'$ devient très-petit; d'où il résulte une inégalité de Jupiter, due à l'action de Saturne, qui a pour argument l'angle

$$5\mu' - 3\mu = 5\text{♄} - 3\text{♃} = \Phi,$$

♄, ♃, étant les longitudes moyennes de ces deux planètes. Pour les perturbations que Saturne éprouve par l'action de Jupiter, on a à peu près $5n = 2n'$: le second diviseur devient donc très-petit, si $i = -2$; d'où il résulte une inégalité de Saturne, qui a l'argument

$$4\mu - 2\mu' = 4\text{♄} - 2\text{♃} = \Phi'.$$

Il arrive aussi que, sans qu'aucun des deux diviseurs soit excessivement petit, le numérateur L devient très-grand: c'est ce qui a lieu, relativement à l'action de Saturne sur Jupiter, lorsque l'argument η est égal à

$$3\mu' - \mu = \omega,$$

et relativement à l'action de Jupiter sur Saturne, lorsque η est égal à

$$3\mu - \mu' = \omega';$$

d'où résultent deux inégalités de Jupiter et de Saturne, ayant l'une et l'autre l'argument 3♄ $-$ ♃, qui est identique avec l'argument 3♅ $-$ ♄ que nous avons trouvé pour la perturbation d'Uranus par l'action de Saturne. En résumant tout ce qui précède, nous aurons à développer les inégalites suivantes.

I. *de l'ordre des carrés des excentricités et des inclinaisons*			
1. *Argument*	2. *Argument*	3. *Argument*	4. *Argument*
$5\mu' - 3\mu = \Phi$.	$4\mu - 2\mu' = \Phi'$.	$3\mu' - \mu = \omega$.	$3\mu - \mu' = \omega'$.
♃ troublé par ♄.	♄ troublé par ♃.	♃ troublé par ♄.	♄ troublé par ♃.
			♅ troublé par ♄.

II. de l'ordre des troisièmes puissances	
1. *Argument*	2. *Argument*
$5\mu' - 2\mu = \psi$.	$5\mu - 2\mu' = \psi'$.
♃ troublé par ♄.	♄ troublé par ♃.

§. 191. Les équations IV, VI (§. 180.), donnent les termes suivans, dépendans des carrés des excentricités et des inclinaisons:

$$\text{IV. } 0 = \frac{\partial\partial u''}{\partial t^2} + n^2 u'' + \frac{\partial\partial u}{2\partial t^2}\gamma^2\{1 - \cos 2(\mu - \varpi)\} - \frac{\partial\partial u'}{\partial t^2}\gamma\cos(\mu - \varpi)$$

$$+ 2n\frac{\partial u}{\partial t}\gamma^2 \sin 2(\mu - \varpi) + 2n\frac{\partial u'}{\partial t}\gamma\sin(\mu - \varpi) + \frac{n^2}{2}u\gamma^2\{1 + 9\cos 2(\mu - \varpi)\}$$

$$+ 3n^2 u'\gamma\cos(\mu - \varpi) + \frac{n^2}{m'}ar\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{2n^2}{m'}af(\partial R)'_\mu$$

$$\text{VI. } U'' = u\gamma^2 \sin 2(\mu - \varpi) + u'\gamma\sin(\mu - \varpi)$$

$$+ \frac{\partial u}{n\partial t}\gamma^2\{2 - \cos 2(\mu - \varpi)\} - \frac{2\partial u'}{n\partial t}\gamma\cos(\mu - \varpi)$$

$$+ \frac{2\partial u''}{n\partial t} + \frac{2n}{m'}a(1 + \tfrac{1}{2}\gamma^2)fr\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial t + \frac{3n}{m'}a(1 + \tfrac{1}{2}\gamma^2)f\partial t f(\partial R).$$

Les quatre argumens des inégalités du second ordre, Φ, Φ', ω, ω', (§. 190.) ont la forme générale $\varkappa\mu' - (\varkappa - 2)\mu = \varkappa w + 2\mu$, $\varkappa$ étant $+5$ et $+3$ dans les argumens Φ, ω, -2 et -1 dans Φ', ω'. On choisira donc, dans les fonctions R et $r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$, les termes qui ont l'argument $\varkappa w + 2\mu$; dans u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial\partial u}{\partial t^2}$, les termes qui, étant combinés avec l'angle 2μ, produisent le même argument; et dans u', $\frac{\partial u'}{\partial t}$, $\frac{\partial\partial u'}{\partial t^2}$, ceux qui le produisent par la combinaison avec μ. En faisant donc pour abréger,

$$\frac{i(4i - 5)}{8}A^{(i)} + \frac{2i - 1}{4}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{a^2}{8}\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2} = P^0,$$

$$\frac{i(2i + 1)}{2}A^{(i)} + \frac{2i + 1}{2}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{a^2}{4}\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2} = P^{I},$$

$$\frac{4i^2 + 9i + 4}{8}A^{(i)} + \frac{2i + 3}{4}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{a^2}{8}\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2} = P^{II}, \quad \frac{aa'}{8}\mathfrak{A}^{(i)} = P^{III},$$

$$\frac{4i^2 - i - 2}{8}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{i^2}{2}a^2\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2} + \frac{a^3}{8}\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a^3} = Q^0,$$

$$\frac{2i^2 + 3i + 1}{2}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + (i + 1)a^2\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2} + \frac{a^3}{4}\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a^3} = Q^{I},$$

$$\frac{4i^2+13i+10}{8}\,a\,\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}+\frac{i+2}{2}\,a^2\,\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}+\frac{a^3}{8}\,\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a^3}=Q^{II},$$

$$\frac{\alpha a'}{8}\left(\mathfrak{A}^{(i)}+a\,\frac{\partial\mathfrak{A}^{(i)}}{\partial a}\right)=Q^{III},$$

les équations (N) (N') (P) (P') (§. 177. 178.) donneront

$$R=m'S+m'\delta^2S'=m'P^{\circ}\gamma^2\cos(i\mu'-(i-2)\mu-2\varpi)-m'P^{I}\gamma\gamma'\cos((i+1)\mu'-(i-1)\mu-\varpi'-\varpi)$$
$$+m'P^{II}\gamma'^2\cos((i+2)\mu'-i\mu-2\varpi')-m'P^{III}\delta^2\cos((i+1)\mu'-(i-1)\mu-2\Pi),$$
$$r\left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)=m'Q^{\circ}\gamma^2\cos(i\mu'-(i-2)\mu-2\varpi)-m'Q^{I}\gamma\gamma'\cos((i+1)\mu'-(i-1)\mu-\varpi'-\varpi)$$
$$+m'Q^{II}\gamma'^2\cos((i+2)\mu'-i\mu-2\varpi')-m'Q^{III}\delta^2\cos((i+1)\mu'-(i-1)\mu-\varpi'-\varpi).$$

Il est aisé de voir que les fonctions Q sont les différentielles des fonctions P par rapport à a, de sorte qu'on a

$$Q^{\circ}=a\,\frac{\partial P^{\circ}}{\partial a},\quad Q^{I}=a\,\frac{\partial P^{I}}{\partial a},\quad Q^{II}=a\,\frac{\partial P^{II}}{\partial a},\quad Q^{III}=a\,\frac{\partial P^{III}}{\partial a}.$$

Il est aussi visible que, pour donner aux quatre argumens qui entrent dans R et dans $r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$, la forme $i\mu'-(i-2)\mu-\text{const.}$, il faut mettre à la place de i, i dans P° et Q°, $i-1$ dans P^{I}, Q^{I}, P^{III}, Q^{III}, et $i-2$ dans P^{II}, Q^{II}. Ainsi on aura

$$(A)\ldots\ldots\begin{cases}
P^{\circ}=\dfrac{i(4i-5)}{8}\,A^{(i)}+\dfrac{2i-1}{4}\,a\,\dfrac{\partial A^{(i)}}{\partial a}+\dfrac{a^2}{8}\,\dfrac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2},\\[2mm]
P^{I}=\dfrac{(i-1)(2i-1)}{2}\,A^{(i-1)}+\dfrac{2i-1}{2}\,a\,\dfrac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a}+\dfrac{a^2}{4}\,\dfrac{\partial\partial A^{(i-1)}}{\partial a^2},\\[2mm]
P^{II}=\dfrac{4i^2-7i+2}{8}\,A^{(i-2)}+\dfrac{2i-1}{4}\,a\,\dfrac{\partial A^{(i-2)}}{\partial a}+\dfrac{a^2}{8}\,\dfrac{\partial\partial A^{(i-2)}}{\partial a^2},\\[2mm]
P^{III}=\dfrac{aa'}{8}\,\mathfrak{A}^{(i-1)};\quad Q^{\circ}=\dfrac{4i^2-i-2}{8}\,a\,\dfrac{\partial A^{(i)}}{\partial a}+\dfrac{i}{2}\,a^2\,\dfrac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}+\dfrac{a^3}{8}\,\dfrac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a^3},\\[2mm]
Q^{I}=\dfrac{i(2i-1)}{2}\,a\,\dfrac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a}+ia^2\,\dfrac{\partial\partial A^{(i-1)}}{\partial a^2}+\dfrac{a^3}{4}\,\dfrac{\partial^3 A^{(i-1)}}{\partial a^3},\\[2mm]
Q^{II}=\dfrac{i(4i-3)}{8}\,a\,\dfrac{\partial A^{(i-2)}}{\partial a}+\dfrac{i}{2}\,a^2\,\dfrac{\partial\partial A^{(i-2)}}{\partial a^2}+\dfrac{a^3}{8}\,\dfrac{\partial^3 A^{(i-2)}}{\partial a^3},\\[2mm]
Q^{III}=\dfrac{a\,a'}{8}\left(\mathfrak{A}^{(i-1)}+a\,\dfrac{\partial\mathfrak{A}^{(i-1)}}{\partial a}\right).
\end{cases}$$

Cela posé on aura, en faisant pour abréger, $iw+2\mu=\eta^{(i)}$,

$$R=m'\,P^{\circ}\,\gamma^2\cos(\eta^{(i)}-2\varpi)-m\,P^{I}\,\gamma\gamma'\cos(\eta^{(i)}-\varpi-\varpi')$$
$$+m'\,P^{II}\,\gamma'^2\cos(\eta^{(i)}-2\varpi')-m'\,P^{III}\,\delta^2\cos(\eta^{(i)}-2\Pi),$$
$$r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)=m'\,Q^{\circ}\,\gamma^2\cos(\eta^{(i)}-2\varpi)-m'\,Q^{I}\,\gamma\gamma'\cos(\eta^{(i)}-\varpi-\varpi')$$

$$+ m' Q^{II} \gamma'^2 \cos (\eta^{(i)} - 2\varpi'), - m' Q^{III} \delta^2 \cos (\eta^{(i)} - 2\Pi),$$

d'où l'on tirera

$$(\partial R) = (i-2)\, m' n \partial t \left\{ \begin{array}{l} P^o \gamma^2 \sin (\eta^{(i)} - 2\varpi) - P^I \gamma\gamma' \sin (\eta^{(i)} - \varpi - \varpi') \\ + P^{II} \gamma'^2 \sin (\eta^{(i)} - 2\varpi') - P^{III} \delta^2 \sin (\eta^{(i)} - 2\Pi) \end{array} \right\}.$$

Pour les autres termes des équations IV, VI, qui admettent la forme $\eta^{(i)}$, on trouvera, en vertu des équations (*a*) (*b*) (§. 182.), XII (§. 183.), et des formules (*t*. (§. 177),

$$u \cos 2(\mu - \varpi) = B^{(i)} \cos (\eta^{(i)} - 2\varpi), \quad u \sin 2(\mu - \varpi) = B^{(i)} \sin (\eta^{(i)} - 2\varpi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sin 2(\mu - \varpi) = - i(n - n') B^{(i)} \cos (\eta^{(i)} - 2\varpi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cos 2(\mu - \varpi) = i(n - n') B^{(i)} \sin (\eta^{(i)} - 2\varpi),$$

$$\frac{\partial \partial u}{\partial t^2} \cos 2(\mu - \varpi) = - i^2 (n - n')^2 B^{(i)} \cos (\eta^{(i)} - 2\varpi),$$

$$u' \cos (\mu - \varpi) = - \tfrac{1}{2} M^{(i)} \gamma \cos (\eta^{(i)} - 2\varpi) + \tfrac{1}{2} N^{(i)} \gamma' \cos (\eta^{(i)} - \varpi - \varpi'),$$

$$u' \sin (\mu - \varpi) = - \tfrac{1}{2} M^{(i)} \gamma \sin (\eta^{(i)} - 2\varpi) + \tfrac{1}{2} N^{(i)} \gamma' \sin (\eta^{(i)} - \varpi - \varpi'),$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} \sin (\mu - \varpi) = \frac{i(n-n') - n}{2} \{ M^{(i)} \gamma \cos (\eta^{(i)} - 2\varpi) - N^{(i)} \gamma' \cos (\eta^{(i)} - \varpi - \varpi') \},$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} \cos (\mu - \varpi) = - \frac{i(n-n') - n}{2} \{ M^{(i)} \gamma \sin (\eta^{(i)} - 2\varpi) - N^{(i)} \gamma' \sin (\eta^{(i)} - \varpi - \varpi') \},$$

$$\frac{\partial \partial u'}{\partial t^2} \cos (\mu - \varpi) = \frac{(i(n-n') - n)^2}{2} \{ M^{(i)} \gamma \cos (\eta^{(i)} - 2\varpi) - N^{(i)} \gamma' \cos (\eta^{(i)} - \varpi - \varpi') \}.$$

A l'égard de l'intégration des fonctions de R, il faut observer que, les inégalités qui sont divisées par un très-petit nombre, ayant non-seulement une valeur considérable, mais aussi une longue période (§. 189.), il n'est pas permis de regarder les élémens γ, ϖ, etc. comme constans durant une période entière, comme on l'a fait jusqu'à présent; mais qu'il faut tenir compte de leurs inégalités séculaires, dans l'intégration même. Soit donc $k\partial X$ une différentielle à intégrer, k étant fonction des élémens des orbites. Si l'on porte la précision jusqu'aux différentielles secondes des élémens, $\frac{\partial\partial k}{\partial t^2}$ (§. 186. 188.), et qu'on intègre par parties, on aura

$$\int k \partial X = kX - \int X \partial k = kX - \int \frac{\partial k}{\partial t} X \partial t.$$

En faisant pour abréger, $\frac{\partial k}{\partial t} = h$, $\frac{\partial\partial k}{\partial t^2} = h'$, $\int X \partial t = Y$, $\int Y \partial t = Z$, on trouvera

$$\int h X \partial t = hY - \int Y \partial h = hY - \int h' Y \partial t, \text{ donc}$$

$$\int k \partial X = kX - hY + h'Z, \text{ d'où il vient}$$

$$\int \partial t \int k \partial X = \int k X \partial t - \int h Y \partial t + \int h' Z \partial t = \int k \partial Y - \int h \partial Z + h' \int Z \partial t =$$
$$kY - 2\int h \partial Z + h' \int Z \partial t = kY - 2hZ + 3h' \int Z \partial t. \text{ Ainsi on a}$$

$$(B) \ldots\ldots \begin{cases} \int k \partial X = kX - \dfrac{\partial k}{\partial t} \int X \partial t + \dfrac{\partial \partial k}{\partial t^2} \int \partial t \int X \partial t, \\ \int \partial t \int k \partial X = k \int X \partial t - 2 \dfrac{\partial k}{\partial t} \int \partial t \int X \partial t + 3 \dfrac{\partial \partial k}{\partial t^2} \int \partial t \int \partial t \int X \partial t. \end{cases}$$

Ces formules nous serviront à trouver les intégrales de (∂R), de $r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial t$, et de $\partial t \int (\partial R)$, relativement aux inégalités à longue période. Pour les autres argumens, tels que ω, on fera simplement $\int k \partial X = kX$, $\int \partial t \int k \partial X = k \int X \partial t$. Au reste nous n'aurons égard aux différentielles secondes $\frac{\partial \partial k}{\partial t^2}$, que dans les équations du troisième ordre, ψ, ψ'. En rassemblant toutes les valeurs précédentes, et faisant $i(n - n') - 2n = \lambda$, on aura

$$\text{IV. } 0 = \frac{\partial \partial u''}{\partial t^2} + n^2 u'' + \left\{ \frac{\lambda^2 + 5n^2}{2} B^{(i)} - \frac{\lambda^2 + 2n^2}{2} M^{(i)} \right\} \gamma^2 \cos(\eta^{(i)} - 2\varpi)$$
$$+ \frac{\lambda^2 + 2n^2}{2} N^{(i)} \gamma \gamma' \cos(\eta^{(i)} - \varpi - \varpi') + \frac{2n^2}{m'} a \int (\partial R) + \frac{n^2}{m'} ar \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right),$$

$$\text{VI. } U'' = \frac{2 \partial u''}{n \partial t} + \left\{ \frac{2\lambda + n}{2n} M^{(i)} - \frac{\lambda + n}{n} B^{(i)} \right\} \gamma^2 \sin(\eta^{(i)} - 2\varpi)$$
$$- \frac{2\lambda + n}{2n} N^{(i)} \gamma \gamma' \sin(\eta^{(i)} - \varpi - \varpi') + \frac{3n}{m'} a \int \partial t \int (\partial R) + \frac{2n}{m'} a \int r \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) \partial t.$$

§. 192. Intégrons maintenant les valeurs précédentes de (∂R), $r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial t$, $\partial t (\partial R)$, et faisons pour plus de simplicité,

$$(C) \ldots\ldots \begin{cases} \gamma^2 \sin 2\varpi = f, \ \gamma^2 \cos 2\varpi = f', \ \gamma\gamma' \sin(\varpi + \varpi') = g, \ \gamma\gamma' \cos(\varpi + \varpi') = g', \\ \gamma'^2 \sin 2\varpi' = h, \ \gamma'^2 \cos 2\varpi' = h', \ \delta^2 \sin 2\Pi = k, \ \delta^2 \cos 2\Pi = k' \end{cases}$$

Cela posé on aura (§. 191.)

$$(\partial R) = m'(i - 2) n \partial t \begin{Bmatrix} (P^0 f' - P^I g' + P^{II} h' - P^{III} k') \sin \eta^{(i)} \\ -(P^0 f - P^I g + P^{II} h - P^{III} k) \cos \eta^{(i)} \end{Bmatrix},$$

$$r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = m'(Q^0 f' - Q^I g' + Q^{II} h' - Q^{III} k') \cos \eta^{(i)}$$
$$m'(Q^0 f - Q^I g + Q^{II} h - Q^{III} k) \sin \eta^{(i)};$$

f, g, h, etc. étant les fonctions variables des élémens, que nous avons dé-

signées par h (§. 191.). Si on observe maintenant, que $\partial\eta^{(i)} = -\lambda\partial t$ ou $\partial t = -\frac{\partial\eta^{(i)}}{\lambda}$ (§. 191.), la première des formules (B) donnera

$$\int(\partial R) = \frac{m'(i-2)n}{\lambda}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}P^0\left(f+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial f'}{\partial t}\right)-P^I\left(g+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial g'}{\partial t}\right)\\+P^{II}\left(h+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial h'}{\partial t}\right)-P^{III}\left(k+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial k'}{\partial t}\right)\end{array}\right]\sin\eta^{(i)}\\+\left[\begin{array}{l}P^0\left(f'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}\right)-P^I\left(g'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial g}{\partial t}\right)\\+P^{II}\left(h'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}\right)-P^{III}\left(k'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial k}{\partial t}\right)\end{array}\right]\cos\eta^{(i)}\end{array}\right\},$$

$$\int r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial t = \frac{m'}{\lambda}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}Q^0\left(f+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial f'}{\partial t}\right)-Q^I\left(g+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial g'}{\partial t}\right)\\+Q^{II}\left(h+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial h'}{\partial t}\right)-Q^{III}\left(k+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial k'}{\partial t}\right)\end{array}\right]\cos\eta^{(i)}\\-\left[\begin{array}{l}Q^0\left(f'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}\right)-Q^I\left(g'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial g}{\partial t}\right)\\+Q^{II}\left(h'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}\right)-Q^{III}\left(k'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial k}{\partial t}\right)\end{array}\right]\sin\eta^{(i)}\end{array}\right\}.$$

La seconde des formules (B) (§. 191.) donnera

$$\int\partial t\int(\partial R) = \frac{m'(i-2)n}{\lambda^2}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}P^0\left(f+\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial f'}{\partial t}\right)-P^I\left(g+\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial g'}{\partial t}\right)\\+P^{II}\left(h+\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial h'}{\partial t}\right)-P^{III}\left(k+\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial k'}{\partial t}\right)\end{array}\right]\cos\eta^{(i)}\\-\left[\begin{array}{l}P^0\left(f'-\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}\right)-P^I\left(g'-\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial g}{\partial t}\right)\\+P^{II}\left(h'-\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}\right)-P^{III}\left(k'-\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial k}{\partial t}\right)\end{array}\right]\sin\eta^{(i)}\end{array}\right\}.$$

Si on rassemble tous ces termes, les équations précédentes deviendront

$$\text{IV.}\quad 0 = \frac{\partial\partial u''}{\partial t^2} + n^2 u''$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{\lambda^2+5n^2}{2}B^{(i)}f' - \frac{\lambda^2+2n^2}{2}M^{(i)}f' + \frac{\lambda^2+2n^2}{2}N^{(i)}g'\\+n^2 a\,(Q^0 f' - Q^I g' + Q^{II} h' - Q^{III} k')\\+\frac{2(i-2)n^3}{\lambda}a\left[\begin{array}{l}P^0\left(f'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}\right)-P^I\left(g'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial g}{\partial t}\right)\\+P^{II}\left(h'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}\right)-P^{III}\left(k'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial k}{\partial t}\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}\cos\eta^{(i)}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \frac{\lambda^2+5n^2}{2}B^{(i)}f-\frac{\lambda^2+2n^2}{2}M^{(i)}f+\frac{\lambda^2+2n^2}{2}N^{(i)}g \\ +n^2 a(Q^0 f-Q^I g+Q^{II}h-Q^{III}k) \\ +\frac{2(i-2)n^2}{\lambda}a\left[\begin{array}{l}P^0\left(f+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial f'}{\partial t}\right)-P^I\left(g+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial g'}{\partial t}\right) \\ +P^{II}\left(h+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial h'}{\partial t}\right)-P^{III}\left(k+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial k'}{\partial t}\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}\sin\eta^{(i)},$$

$$\text{VI.}\quad U''=\frac{2\,\partial n'}{n\,\partial t}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \frac{\lambda+n}{n}B^{(i)}f-\frac{2\lambda+n}{2n}M^{(i)}f+\frac{2\lambda+n}{2n}N^{(i)}g \\ +\frac{2n}{\lambda}a\left[\begin{array}{l}Q^0\left(f+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial f'}{\partial t}\right)-Q^I\left(g+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial g'}{\partial t}\right) \\ +Q^{II}\left(h+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial h'}{\partial t}\right)-Q^{III}\left(k+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial k'}{\partial t}\right)\end{array}\right] \\ +\frac{3(i-2)n^2}{\lambda^2}a\left[\begin{array}{l}P^0\left(f+\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial f'}{\partial t}\right)-P^I\left(g+\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial g'}{\partial t}\right) \\ +P^{II}\left(h+\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial h'}{\partial t}\right)-P^{III}\left(k+\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial k'}{\partial t}\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}\cos\eta^{(i)}$$

$$-\left\{\begin{array}{l} \frac{\lambda+n}{n}B^{(i)}f'-\frac{2\lambda+n}{2n}M^{(i)}f'+\frac{2\lambda+n}{2n}N^{(i)}g' \\ +\frac{2n}{\lambda}a\left[\begin{array}{l}Q^0\left(f'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}\right)-Q^I\left(g'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial g}{\partial t}\right) \\ +Q^{II}\left(h'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}\right)-Q^{III}\left(k'-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial k}{\partial t}\right)\end{array}\right] \\ +\frac{3(i-2)n^2}{\lambda^2}a\left[\begin{array}{l}P^0\left(f'-\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}\right)-P^I\left(g'-\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial g}{\partial t}\right) \\ +P^{II}\left(h'-\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}\right)-P^{III}\left(k'-\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\partial k}{\partial t}\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}\sin\eta^{(i)}.$$

Les rapports différentiels, $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial\partial f}{\partial t^2}$, $\frac{\partial g}{\partial t}$, etc. seront déterminés de la manière suivante. On calculera, à l'aide de la formule (*a*) (§. 188.), les valeurs des élémens $\gamma, \varpi, \gamma', \varpi', \epsilon, J, \epsilon', J'$, pour les époques de 2300 et de 2800, leurs valeurs pour 1800 étant données. En désignant les valeurs, correspondantes aux trois époques de 1800, 2300, et 2800, par γ, (γ), $[\gamma]$, etc. on aura

$f = \gamma^2 \sin 2\varpi$, $(f) = (\gamma)^2 \sin 2(\varpi)$, $[f] = [\gamma]^2 \sin 2[\varpi]$, $f' = \gamma^2 \cos 2\varpi$, etc. Pour déterminer les quantités $k = \delta^2 \sin 2\Pi$, $k' = \delta^2 \cos 2\Pi$, soit (*Fig.* 41.) ♈IE l'écliptique, INA l'orbite de la planète m, iNS celle de m', et l'arc Nn perpendiculaire à l'écliptique. Cela posé on aura

Ii = J' — J, tang NI$n = \theta$, tang N$in = \theta'$, ♈$n = \Pi$, tang IN$i = \delta$ (§. 168.), donc

$Nn = \theta' \sin in = \theta \sin IN$, d'où l'on tire $\theta' \sin(\Pi - J') = \theta \sin(\Pi - J)$, et en développant,

$$\tang \Pi = \frac{\theta' \sin J' - \theta \sin J}{\theta' \cos J' - \theta \cos J}.$$

Le triangle INi fournit l'équation, $\cos N = \cos(J' - J) \sin NI \sin Ni - \cos NI \cos Ni$, ou $\cos N = 1 - 2(\sin \tfrac{1}{2} N)^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 = \theta\theta' \cos(J' - J) + 1 - \tfrac{1}{2}(\theta^2 + \theta'^2)$; d'où il suit

$$\delta^2 = \theta^2 + \theta'^2 - 2\theta\theta' \cos(J' - J).$$

Ainsi l'équation précédente donnera $\sin^2 \Pi = \frac{(\theta' \sin J' - \theta \sin J)^2}{\delta^2}$, $\cos^2 \Pi = \frac{(\theta' \cos J' - \theta \cos J)^2}{\delta^2}$, d'où résultent ces deux équations,

$$\delta \sin \Pi = \theta' \sin J' - \theta \sin J = e, \quad \delta \cos \Pi = \theta' \cos J' - \theta \cos J = e',$$

ce qui donne $k = 2ee'$, $k' = e'^2 - e^2$. On trouvera de cette manière les valeurs k, k', (k), (k'), $[k]$, $[k']$, relatives aux trois époques de 1800, 2300, 2800, en substituant (θ), (J), $[\theta]$, etc. au lieu de θ, J, θ', J'. Maintenant il est aisé de conclure les rapports différentiels $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial \partial f}{\partial t^2}$, des trois valeurs f, (f), $[f]$, etc. On a pour un nombre t quelconque d'années écoulées après 1800,

$$f = f + t \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\partial \partial f}{\partial t^2} + \text{cet, d'où il résulte}$$

$$(f) = f + 500 \frac{\partial f}{\partial t} + 125000 \frac{\partial \partial f}{\partial t^2}, \quad [f] = f + 1000 \frac{\partial f}{\partial t} + 500000 \frac{\partial \partial f}{\partial t^2},$$

d'où l'on tirera

$$(D) \ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{4(f) - 3f - [f]}{1000}, \qquad \frac{\partial \partial f}{\partial t^2} = \frac{f + [f] - 2(f)}{250000}.$$

Il en est de même des autres fonctions, f', g, etc.

On trouvera le même résultat par la différentiation. En effet l'équation $f = \gamma^2 \sin 2\varpi$, donnera

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\gamma\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \sin 2\varpi + \gamma \frac{\partial \varpi}{\partial t} \cos 2\varpi\right) = \frac{2f}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 2f' \frac{\partial \varpi}{\partial t}, \text{ et}$$

$$\frac{\partial\partial f}{\partial t^2} = 2f\left(\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{\partial\gamma^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial\partial\gamma}{\partial t^2} - 2\,\frac{\partial\varpi^2}{\partial t^2}\right) + 2f'\left(\frac{4}{\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}\cdot\frac{\partial\varpi}{\partial t} + \frac{\partial\partial\varpi}{\partial t^2}\right).$$

§. 193. La première équation, relative aux perturbations de Jupiter par l'action de Saturne, a pour argument l'angle $5\mu' - 3\mu = 5♄ - 3♃ = \Phi$ (§. 190.), d'où il suit $i = 5$. On a vu que $\frac{5n' - 2n}{n}$ est une très-petite fraction: en faisant donc

$$5n' - 2n = \xi n,$$

on pourra négliger les puissances supérieures de ξ. Cela posé on aura (§. 191. 182. 183.),

$$n' = \frac{2+\xi}{5}\,n,\quad n - n' = \frac{3-\xi}{5}\,n,\quad i(n-n') - 2n = \lambda = (1-\xi)n,\quad \lambda^2 - n^2 = -2\xi n^2,$$

$$i^2(n-n')^2 - n^2 = (8-6\xi)n^2,\quad i(n-n') - n = (2-\xi)n,\quad i^2(n-n') - n = (14-5\xi)n;$$

$$\mathrm{P}^0 = \frac{75}{8}\mathrm{A}^{(5)} + \frac{9}{4}a\frac{\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a} + \frac{a^2}{8}\frac{\partial\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a^2},\quad \mathrm{P}^{\mathrm{I}} = 18\mathrm{A}^{(4)} + \frac{9}{2}a\frac{\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a} + \frac{a^2}{4}\frac{\partial\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a^2},$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{II}} = \frac{87}{8}\mathrm{A}^{(3)} + \frac{9}{4}a\frac{\partial\mathrm{A}^{(3)}}{\partial a} + \frac{a^2}{8}\frac{\partial\partial\mathrm{A}^{(3)}}{\partial a^2},\quad \mathrm{P}^{\mathrm{III}} = \frac{a\,a}{8}\mathfrak{A}^{(4)};$$

$$\mathrm{Q}^0 = \frac{93}{8}a\frac{\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a} + \frac{5}{2}a^2\frac{\partial\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a^2} + \frac{a^3}{8}\frac{\partial^3\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a^3},\quad \mathrm{Q}^{\mathrm{I}} = \frac{45}{2}a\frac{\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a} + 5a^2\frac{\partial\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a^2} + \frac{a^3}{4}\frac{\partial^3\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a^3},$$

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{II}} = \frac{85}{8}a\frac{\partial\mathrm{A}^{(3)}}{\partial a} + \frac{5}{2}a^2\frac{\partial\partial\mathrm{A}^{(3)}}{\partial a^2} + \frac{a^3}{8}\frac{\partial^3\mathrm{A}^{(3)}}{\partial a^3},\quad \mathrm{Q}^{\mathrm{III}} = \frac{a\,a'}{8}\left(\mathfrak{A}^{(4)} + a\frac{\partial\mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a}\right);$$

$$\mathrm{B}^{(i)} = \mathrm{B}^{(5)} = \frac{5}{24}\left(1 + \frac{13}{12}\xi\right)a\mathrm{A}^{(5)} + \frac{1+\frac{3}{2}\xi}{16}a^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a},$$

$$\mathrm{M}^{(i)} = \frac{25+46\xi}{4}a\mathrm{A}^{(5)} + \frac{19+28\xi}{8}a^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a} + \frac{1+\frac{4}{3}\xi}{6}a^3\frac{\partial\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a^2},$$

$$\mathrm{N}^{(i)} = 6(1+2\xi)a\mathrm{A}^{(4)} + \frac{7}{6}(2+3\xi)a^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a} + \frac{1+\frac{4}{3}\xi}{6}a^3\frac{\partial\partial\mathrm{A}^{(4)}}{\partial a^2}.$$

Si l'on fait pour abréger,

$$6(1+\xi)a\mathrm{P}^0 + a\mathrm{Q}^0 + (3-\xi)\mathrm{B}^{(5)} - (\tfrac{3}{2}-\xi)\mathrm{M}^{(5)} = \mathrm{I},$$

$$6(1+\xi)a\mathrm{P}^{\mathrm{I}} + a\mathrm{Q}^{\mathrm{I}} - (\tfrac{3}{2}-\xi)\mathrm{N}^{(5)} = \mathrm{II},$$

$$6(1+\xi)a\mathrm{P}^{\mathrm{II}} + a\mathrm{Q}^{\mathrm{II}} = \mathrm{III},\quad 6(1+\xi)a\mathrm{P}^{\mathrm{III}} + a\mathrm{Q}^{\mathrm{III}} = \mathrm{IV},$$

l'équation IV (§. 192.) deviendra

$$0 = \frac{\partial\partial u''}{\partial t^2} + n^2u'' + \left\{\begin{matrix} n^2(\mathrm{I}.\,f' - \mathrm{II}.\,g' + \mathrm{III}.\,h' - \mathrm{IV}.\,k') \\ -6(1+2\xi)na\left(\mathrm{P}^0\frac{\partial f}{\partial t} - \mathrm{P}^{\mathrm{I}}\frac{\partial g}{\partial t} + \mathrm{P}^{\mathrm{II}}\frac{\partial h}{\partial t} - \mathrm{P}^{\mathrm{III}}\frac{\partial k}{\partial t}\right)\end{matrix}\right\}\cos\Phi$$

$$+\left\{n^2(\mathrm{I}.f - \mathrm{II}.g + \mathrm{III}.h - \mathrm{IV}.k) + 6(1+2\xi)na\left(\mathrm{P}^0\frac{\partial f'}{\partial t} - \mathrm{P}^{\mathrm{I}}\frac{\partial g'}{\partial t} + \mathrm{P}^{\mathrm{II}}\frac{\partial h'}{\partial t} - \mathrm{P}^{\mathrm{III}}\frac{\partial k'}{\partial t}\right)\right\}\sin\Phi.$$

Considérons séparément les termes qui dépendent de f et de f', de sorte que

$$(\mathrm{E})\ldots\ldots 0=\frac{\partial\partial u''}{\partial t^2}+n^2u''+\left\{\mathrm{I}.\,n^2f'-6(1+2\xi)\,na\mathrm{P}^0\frac{\partial f}{\partial t}\right\}\cos\Phi$$

$$+\left\{\mathrm{I}.\,n^2f+6(1+2\xi)\,na\mathrm{P}^0\frac{\partial f'}{\partial t}\right\}\sin\Phi.$$

Il est aisé de voir que l'intégrale doit avoir cette forme, qui sera également celle des autres termes qui dépendent de g, h, k, etc.

$$u''=\left(\mathrm{F}f'-\mathrm{G}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\cos\Phi+\left(\mathrm{F}f+\mathrm{G}\frac{\partial f'}{\partial t}\right)\sin\Phi;$$

d'où l'on tirera en différentiant, vû que $\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\lambda$,

$$\frac{\partial u''}{\partial t}=\left(\mathrm{F}\frac{\partial f'}{\partial t}-\lambda\mathrm{F}f-\lambda\mathrm{G}\frac{\partial f'}{\partial t}\right)\cos\Phi+\left(\lambda\mathrm{F}f'-\lambda\mathrm{G}\frac{\partial f}{\partial t}+\mathrm{F}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\sin\Phi,$$

$$\frac{\partial\partial u''}{\partial t^2}=-\left(\lambda^2\mathrm{F}f+\lambda^2\mathrm{G}\frac{\partial f'}{\partial t}-2\lambda\mathrm{F}\frac{\partial f'}{\partial t}\right)\sin\Phi-\left(\lambda^2\mathrm{F}f'-\lambda^2\mathrm{G}\frac{\partial f}{\partial t}+2\lambda\mathrm{F}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\cos\Phi.$$

Ayant substitué les valeurs de u'' et de $\frac{\partial\partial u''}{\partial t^2}$ dans l'équation (E), la comparaison des termes semblables donnera

$$\mathrm{F}=\frac{\mathrm{I}.\,n^2}{\lambda^2-n^2}=-\frac{\mathrm{I}}{2\xi},\quad \mathrm{G}=\frac{6(1+2\xi)\,na\mathrm{P}^0+2\lambda\mathrm{F}}{\lambda^2-n^2}=\frac{(1-\xi)\,\mathrm{I}}{2\xi^2n}-\frac{3(1+2\xi)}{\xi n}a\mathrm{P}^0.$$

Ainsi on aura

$$u''=-\frac{\cos\Phi}{2\xi}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{I}.\,f'-\mathrm{II}.\,g'+\mathrm{III}.\,h'-\mathrm{IV}.\,k'\\ +\left(\frac{1-\xi}{\xi}\mathrm{I}-6(1+2\xi)a\mathrm{P}^0\right)\frac{\partial f}{n\partial t}-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\mathrm{II}-6(1+2\xi)a\mathrm{P}^{\mathrm{I}}\right)\frac{\partial g}{n\,\partial t}\\ +\left(\frac{1-\xi}{\xi}\mathrm{III}-6(1+2\xi)a\mathrm{P}^{\mathrm{II}}\right)\frac{\partial h}{n\partial t}-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\mathrm{IV}-6(1+2\xi)a\mathrm{P}^{\mathrm{III}}\right)\frac{\partial k}{n\partial t}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{\sin\Phi}{2\xi}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{I}.\,f-\mathrm{II}.\,g+\mathrm{III}.\,h-\mathrm{IV}.\,k-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\mathrm{I}-6(1+2\xi)\,a\mathrm{P}^0\right)\frac{\partial f'}{n\partial t}\\ +\left(\frac{1-\xi}{\xi}\mathrm{II}-6(1+2\xi)a\mathrm{P}^{\mathrm{I}}\right)\frac{\partial g'}{n\partial t}-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\mathrm{III}-6(1+2\xi)a\mathrm{P}^{\mathrm{II}}\right)\frac{\partial h'}{n\partial t}\\ +\left(\frac{1-\xi}{\xi}\mathrm{IV}-6(1+2\xi)\,a\mathrm{P}^{\mathrm{III}}\right)\frac{\partial k'}{n\partial t}\end{array}\right\}.$$

Faisons pour abréger,

XVIII. $\delta r=au''=-\mathrm{E}a\sin\Phi-\mathrm{E}'a\cos\Phi$, $\quad\frac{\partial u''}{\partial t}=\mathrm{D}\cos\Phi-\mathrm{D}'\sin\Phi$,

et substituons la valeur de ξ. On a suivant M. Laplace, $n=27314'',1$; $n'=10999'',2$; d'où l'on tirera

$$\xi = 0,0134656; \quad \frac{1}{\xi} = 74,26347; \quad B^{(5)} = 0,21137 \,.\, aA^{(5)} + 0,06313\, a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a},$$

$$M^{(5)} = 6,4048 \,.\, aA^{(5)} + 2,4221 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 0,17 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(5)}}{\partial a^2},$$

$$N^{(5)} = 6,1616 \,.\, aA^{(4)} + 2,38 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 0,17 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2},$$

$$I = 48,117 \,.\, aA^{(5)} + 21,894 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 3,008 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(5)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{8} \frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3},$$

$$II = 100,295 \,.\, aA^{(4)} + 46,325 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 6,268 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{4} \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3},$$

$$III = 50,927 \,.\, aA^{(3)} + 24,307 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 3,26 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{8} \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$IV = a^2 a' \left(0,885 \,.\, \mathfrak{A}^{(4)} + \frac{a}{8} \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a}\right).$$

Au moyen de ces valeurs, et de celles de P°, P′, etc. Q°, etc. on trouvera

$$E = f\left\{1786,67 \,.\, aA^{(5)} + 812,99 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 111,69\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 4,64 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$- g\left\{3794,13 \,.\, aA^{(4)} + 1720,13 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 232,74 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 9,28 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$+ h\left\{1891,01 \,.\, aA^{(3)} + 902,56 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 121,05 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 4,64 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$- k\left\{32,86 \,.\, a^2 a' \mathfrak{A}^{(4)} + 4,64 \,.\, a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a}\right\}$$

$$- \frac{\partial f'}{n\partial t}\left\{3467,46 \,.\, aA^{(5)} + 1590,2 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 219,6 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 9,16 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$+ \frac{\partial g'}{n\partial t}\left\{7237,06 \,.\, aA^{(4)} + 3366,2 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 457,60 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 18,32 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$- \frac{\partial h'}{n\partial t}\left\{3679,49 \,.\, aA^{(3)} + 1766,95 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 238,07 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 9,16 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$+ \frac{\partial k'}{n\partial t}\left\{64,07 \,.\, a^2 a' \mathfrak{A}^{(4)} + 9,16 \,.\, a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a}\right\};$$

$$D = \frac{1-\xi}{2\xi}\, n\{I.f - II.g + III.h - IV.k\} - \left\{\frac{I}{\xi} - 6(1+2\xi)\, aP^{\circ}\right\}\frac{\partial f'}{\partial t}$$

$$+ \left\{\frac{II}{\xi} - 6(1+2\xi)\, aP'\right\}\frac{\partial g'}{\partial t}$$

$$- \left\{\frac{III}{\xi} - 6(1+2\xi)\, aP''\right\}\frac{\partial h'}{\partial t} + \left\{\frac{IV}{\xi} - 6(1+2\xi)\, aP'''\right\}\frac{\partial k'}{\partial t};$$

et les coefficiens E′, D′, sont ce que deviennent E, D, si l'on met f', g', h', k', $-\partial f$, $-\partial g$, $-\partial h$, $-\partial k$, à la place de f, g, h, k, $\partial f'$, $\partial g'$, $\partial h'$, $\partial k'$.

Si l'on substitue les valeurs précédentes de $\frac{\partial u''}{\partial t}$, $B^{(5)}$, $P°$, $Q°$, etc. dans l'équation VI (§. 192.), et qu'on fasse pour abréger,

XIX. $U'' = F \cos \Phi - F' \sin \Phi$, on aura

$$
\begin{aligned}
F = f & \left\{ 3602{,}74 \,.\, aA^{(5)} + 1644{,}95 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 226{,}35 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 9{,}41 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3} \right\} \\
- g & \left\{ 7505{,}17 \,.\, aA^{(4)} + 3477{,}59 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 471{,}41 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 18{,}82 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3} \right\} \\
+ h & \left\{ 3808{,}5 \,.\, aA^{(3)} + 1823{,}15 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 245{,}06 \,.\, a^3 . \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 9{,}41 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} \right\} \\
& - k \left\{ 66{,}25 \,.\, a^2 a' \mathfrak{A}^{(4)} + 9{,}41 \,.\, a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a} \right\} \\
- \frac{\partial f'}{n \partial t} & \left\{ 257311 \,.\, aA^{(5)} + 118024 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 16301 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 679{,}8 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3} \right\} \\
+ \frac{\partial g'}{n \partial t} & \left\{ 537077 \,.\, aA^{(4)} + 249847 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 33973 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 1360 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3} \right\} \\
- \frac{\partial h'}{n \partial t} & \left\{ 273078 \,.\, aA^{(3)} + 131152 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 17672 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 679{,}8 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} \right\} \\
& + \frac{\partial k'}{n \partial t} \left\{ 4755 \,.\, a^2 a' \mathfrak{A}^{(4)} + 679{,}8 \,.\, a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a} \right\};
\end{aligned}
$$

et F se changera en F′, si l'on met f', etc. à la place de f, etc. et $-\partial f$, etc. au lieu de $\partial f'$, etc.

§. 194. Il sera bon de faire ici une remarque à l'égard des rapports différentiels, $\frac{\partial f}{\partial t}$, etc. Tous les autres termes sont des fonctions homogènes de n, n', dont la dimension est nulle, de sorte qu'on peut éliminer les moyens mouvemens, en ne conservant que leur rapport; au lieu que les termes $\frac{\partial f}{\partial t}$, etc. sont divisés par n. Dans les premiers termes on peut mettre à la place de n, n', les moyens mouvemens des planètes m, m', pour un tems quelconque t; tandis que dans les derniers il est nécessaire de déterminer la valeur de n ou de t. Comme n, n', ne représentent pas les mouvemens mêmes, ou les arcs parcourus dans un certain tems, qui sont $= nt$, mais les vitesses avec lesquelles changent les longitudes moyennes; il

est visible que $\frac{\partial f}{n \partial t} = \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial \mu}{\partial t}}$ exprime le rapport entre les vitesses des variations de l'élément f et de la longitude moyenne μ, rapport identique avec celui de leurs accroissemens dans le même tems; d'où il suit que, dans la fonction $\frac{\partial f}{n \partial t}$, n est le moyen mouvement de la planète m pendant le tems, pour lequel on a déterminé les variations δf, $\delta f'$, etc. Or les formules XIV — XVII (§. 185. 187.) donnent les variations annuelles des élémens θ, γ, etc. Il est donc visible que, si l'on a calculé les différentielles ∂f, ∂g, etc. par les formules XIV — XVII, ou qu'on exprime le tems t par le nombre d'années, ainsi que nous l'avons fait (§. 192.), il faut substituer pour n le moyen mouvement annuel. Désignons par γ, (γ), ϖ, (ϖ), etc. les valeurs de ces élémens, relatives à deux époques, éloignées l'une de l'autre du tems t: on en conclura, pour les mêmes époques, f et (f), etc. Delà on a tiré (§ 192.), $(f) - f = \partial f$, ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(f) - f}{t}$, et $\frac{\partial f}{n \partial t} = \frac{(f) - f}{n t}$, nt étant le moyen mouvement pour le tems t, écoulé entre les deux époques qui répondent à f et (f). Si l'on emploie les formules XIV — XVII, $N = nt$ est le mouvement annuel, et $\frac{\partial f}{n \partial t}$ sera le rapport entre les accroissemens annuels de l'élément f et de la longitude moyenne. Si l'on veut se servir des expressions directes des différentielles $\frac{\partial f}{\partial t}$, etc. (§. 192.), on a $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{2f}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 2f' \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial t}$; et en substituant (§ 187.) $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = A n \gamma' \sin (\varpi' - \varpi)$, $\frac{\partial \varpi}{\partial t} = - Bn - An \frac{\gamma'}{\gamma} \cos (\varpi' - \varpi)$, $f = \gamma^2 \sin 2\varpi$, $f' = \gamma^2 \cos 2\varpi$; on aura

$$\frac{\partial f}{n \partial t} = 2 A \gamma \gamma' \sin 2\varpi \sin (\varpi' - \varpi) - 2 B \gamma^2 \cos 2\varpi - 2 A \gamma \gamma' \cos 2\varpi \cos (\varpi' - \varpi)$$
$$= - 2 B \gamma^2 \cos 2\varpi - 2 A \gamma \gamma' \cos (\varpi + \varpi').$$

Ainsi on voit que, dans la fonction $\frac{\partial f}{n \partial t}$, n disparaît entièrement, et que $\frac{\partial f}{n \partial t}$, $\frac{\partial g}{n \partial t}$, etc. sont fonctions de a seulement.

§. 195. Nous avons développé l'inégalité précédente avec le plus grand détail, pour exposer plus clairement les règles qu'il faut suivre, quand on veut calculer les perturbations avec une grande précision. Mais il serait

inutile de répéter les mêmes opérations sur les autres inégalités, pour leur donner le même degré de précision: nous pourrons donc abréger considérablement le calcul suivant.

Dans la seconde équation (§. 190.), qui donne une perturbation analogue que Saturne éprouve par l'action de Jupiter, et qui a pour argument l'angle $4\mu - 2\mu' =$ 4♄ − 2♃ $= \Phi'$, il faut faire $i = -2$, afin que $\eta^{(i)}$ (§. 191.) ou $iw + 2\mu = i\mu' - (i-2)\mu$ soit identique avec $4\mu - 2\mu'$. Cela posé il vient

$$\lambda = i(n-n') - 2n = 2n' - 4n, \text{ et } \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\lambda.$$

Or on a à peu près $n' = \frac{5}{2}n$: en faisant donc

$5n - 2n' = \xi' n$, de sorte que $\xi' = \frac{5}{2}\xi$ (§. 193.), on peut supposer

$n' = \frac{5}{2}n$, $\lambda = n(1-\xi') = n$, $\lambda^2 - n^2 = -2\xi' n^2$, $n - n' = -\frac{3}{2}n$,

$$i(n-n') = 3n,\ 3n' - n = \frac{13}{2}n,\ i^2(n-n')^2 - n^2 = 8n^2,$$

$$i(n-n') - 2n = n,\ i(n-n') - n = 2n,\ i^2(n-n') - n = -7n;$$

les lettres sans trait se rapportant à Saturne, et celles marquées d'un trait à Jupiter. Ces valeurs donneront (§. 191. (A), §. 182. 183.)

$$P^0 = \frac{13}{4}A^{(2)} - \frac{5}{4}a\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + \frac{a^2}{8}\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2},\quad P^1 = \frac{15}{2}A^{(3)} - \frac{5}{2}a\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2},$$

$$P^{11} = 4A^{(4)} - \frac{5}{4}a\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + \frac{a^2}{8}\frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2},\quad P^{111} = \frac{aa'}{8}\mathfrak{A}^{(3)},$$

$$Q^0 = 2a\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} - a^2\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} + \frac{a^3}{8}\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3},\quad Q^1 = 5a\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} - 2a^2\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + \frac{a^3}{4}\cdot\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$Q^{11} = \frac{11}{4}a\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} - a^2\frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} + \frac{a^3}{8}\frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3},\quad Q^{111} = \frac{aa'}{8}\left\{\mathfrak{A}^{(3)} + a\frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a}\right\};$$

$$B^{(i)} = B^{(-2)} = -\frac{a}{12}A^{(2)} + \frac{a^2}{16}\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a},\quad M^{(i)} = M^{(-2)} = \frac{13}{6}aA^{(2)} - \frac{9}{8}a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + \frac{a^3}{6}\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2},$$

$$N^{(i)} = N^{(-2)} = \frac{5}{2}aA^{(3)} - \frac{7}{8}a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + \frac{a^3}{8}\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}.$$

En faisant donc pour abréger,

$$\frac{3}{2}M^{(i)} - 3B^{(i)} + 8aP^0 - aQ^0 = \frac{59}{2}aA^{(2)} - \frac{111}{8}a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + \frac{9}{4}a^3\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} - \frac{a^4}{8}\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3} = V,$$

$$\frac{3}{2}N^{(i)} + 8aP^1 - aQ^1 = \frac{255}{4}aA^{(3)} - \frac{107}{4}a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + \frac{17}{4}a^3\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} - \frac{a^4}{4}\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} = VI,$$

$$8aP^{II} - Q^{II} = 32\,a\,A^{(4)} - \frac{51}{4}\,a^2\,\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 2a^3\,\frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} - \frac{a^4}{8}\,\frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3} = \mathrm{VII},$$

$$\frac{a^2 a'}{8}\left(7\mathfrak{A}^{(3)} - a\,\frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a}\right) = \mathrm{VIII},$$

l'équation IV (§. 191.) prendra la forme,

$$o = \frac{\partial\partial u''}{\partial t^2} + n^2 u''$$

$$-n^2\left\{\mathrm{V}.f' - \mathrm{VI}.g' + \mathrm{VII}.h' - \mathrm{VIII}.k' + 8a\left(P^{\circ}\frac{\partial f'}{n\partial t} - P^{I}\frac{\partial g'}{n\partial t} + P^{II}\frac{\partial h'}{n\partial t} - P^{III}\frac{\partial k'}{n\partial t}\right)\right\}\sin\phi'$$

$$-n^2\left\{\mathrm{V}.f' - \mathrm{VI}.g' + \mathrm{VII}.h' - \mathrm{VIII}.k' - 8a\left(P^{\circ}\frac{\partial f}{n\partial t} - P^{I}\frac{\partial g}{n\partial t} + P^{II}\frac{\partial h}{n\partial t} - P^{III}\frac{\partial k}{n\partial t}\right)\right\}\cos\phi'.$$

Le procédé dont nous nous sommes servis, pour intégrer l'équation IV ou (E) (§. 193), donnera l'intégrale de l'équation présente par rapport à f et f',

$$u'' = \left(Ff + G\,\frac{\partial f'}{n\partial t}\right)\sin\phi' + \left(Ff' - G\,\frac{\partial f}{n\partial t}\right)\cos\phi',$$ et l'on trouvera

$$F = \frac{n^2}{n^2 - \lambda^2}\,\mathrm{V} = \frac{\mathrm{V}}{2\,\xi'} = \frac{\mathrm{V}}{5\,\xi},\quad G = \frac{8\,n\,a\,P^{\circ} - 2\,\lambda\,F}{2\,\xi' n} = \frac{8aP^{\circ} - \frac{2}{5\,\xi}\,\mathrm{V}}{5\,\xi}.$$

En faisant donc

$$u'' = E\sin\phi' + E'\cos\phi',\quad \frac{\partial u''}{\partial t} = D'\sin\phi' - D\cos\phi',$$ on aura

$$E = \frac{1}{5\,\xi}\,(\mathrm{V}.\,f - \mathrm{VI}.\,g + \mathrm{VII}.\,h = \mathrm{VIII}.\,k)$$
$$-\frac{2}{5\,\xi}\left\{\left(\frac{\mathrm{V}}{5\,\xi} - 4aP^{\circ}\right)\frac{\partial f'}{n\partial t} - \left(\frac{\mathrm{VI}}{5\,\xi} - 4aP^{I}\right)\frac{\partial g'}{n\partial t}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\mathrm{VII}}{5\,\xi} - 4aP^{II}\right)\frac{\partial h'}{n\partial t} - \left(\frac{\mathrm{VIII}}{5\,\xi} - 4aP^{III}\right)\frac{\partial k'}{n\partial t}\right\}.$$

$$D = \frac{n}{5\,\xi}\,(\mathrm{V}.\,f - \mathrm{VI}.\,g + \mathrm{VII}.\,h - \mathrm{VIII}.\,k)$$
$$-\frac{n}{5\,\xi}\left\{\left(\frac{2\,\mathrm{V}}{5\,\xi} + \mathrm{V} - 8aP^{\circ}\right)\frac{\partial f'}{n\partial t} - \left(\frac{2\,\mathrm{VI}}{5\,\xi} + \mathrm{VI} - 8aP^{I}\right)\frac{\partial g'}{n\partial t}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2\,\mathrm{VII}}{5\,\xi} + \mathrm{VII} - 8aP^{II}\right)\frac{\partial h'}{n\partial t} - \left(\frac{2.\mathrm{VIII}}{5\,\xi} + \mathrm{VIII} - 8aP^{III}\right)\frac{\partial k'}{n\partial t}\right\};$$

et E se changera en E', D en D', si l'on met f', g', h', k', au lieu de f, g, h, k, et $-\partial f$, etc. au lieu de $\partial f'$, etc. Si l'on fait maintenant

$U'' = F' \sin \Phi' - F \cos \Phi'$, on trouvera, en vertu de l'équation VI (§. 192.) et des valeurs précédentes,

$$F = \left(\frac{3}{2} M^{(i)} - 2B^{(i)} - 2aQ^{o} + 12aP^{o} + \frac{2}{5\xi} V\right) f - \left(\frac{3}{2} N^{(i)} - 2aQ^{I} + 12aP^{I} + \frac{2}{5\xi} VI\right) g$$

$$+ \left(\frac{2}{5\xi} VII + 12aP^{II} - 2aQ^{II}\right) h - \left(\frac{2}{5\xi} VIII + 12aP^{III} - 2aQ^{III}\right) k$$

$$- \{(V) - 12aP^{o} + aQ^{o}\} \frac{2\partial f'}{n \partial t} + \{(VI) - 12aP^{I} + aQ^{I}\} \frac{2\partial g'}{n \partial t}$$

$$- \{(VII) - 12aP^{II} + aQ^{II}\} \frac{2\partial h'}{n \partial t} + \{(VIII) - 12aP^{III} + aQ^{III}\} \frac{2\partial k'}{n \partial t},$$

(V) étant $= \frac{1}{5\xi}\left(\frac{2V}{5\xi} + V - 8aP^{o}\right)$, $(VI) = \frac{1}{5\xi}\left(\frac{2VI}{5\xi} + VI - 8aP^{I}\right)$, etc.

Au moyen des substitutions précédentes on changera F en F'.

Si l'on fait maintenant (§. 193.),

$\xi = 0,0134626$; $\frac{1}{5\xi} = 14,8527$; $\frac{2}{5\xi} + 1 = 30,7054$; on trouvera

$$E = \left(458,15.aA^{(2)} - 206,08.a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 33,42.a^3 \frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} - 1,8566.a^4 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3}\right) f$$

$$- \left(946,86.aA^{(3)} - 397,31.a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 63,124.a^3 \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} - 3,7131.a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3}\right) g$$

$$+ \left(475,29.aA^{(4)} - 189,37.a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 29,705.a^3 \frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} - 1,8566\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3}\right) h$$

$$- \left(12,996 \,.\, a^2 a' \mathfrak{A}^{(3)} - 1,8566 \,.\, a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a}\right) k$$

$$- \left(12629.aA^{(2)} - 5973,2.a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 977,86.a^3 \frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} - 55,15.a^4 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3}\right) \frac{\partial f'}{n \partial t}$$

$$+ \left(28157.aA^{(3)} - 11505.a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 1848,8.a^3 \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} - 110,3.a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3}\right) \frac{\partial g'}{n \partial t}$$

$$- \left(13643.aA^{(4)} - 5476,8.a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 867,56.a^3 \frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} - 55,15.a^4 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3}\right) \frac{\partial h'}{n \partial t}$$

$$+ \left(371,2 \,.\, a^2 a\, \mathfrak{A}^{(3)} - 55,15 \,.\, a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a}\right) \frac{\partial k'}{n \partial t};$$

$$F = \left(918,726.aA^{(2)} - 432,975.a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 70,587.a^3 \frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} - 3,963.a^4 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3}\right) f$$

$$- \left(1987,47.aA^{(3)} - 836,07.a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 133,5.a^3 \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} - 7,926.a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3}\right) g$$

$$+\left(998,57\,.\,aA^{(4)}-399,24\,.\,a^2\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a}+62,91\,.\,a^3\frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2}-3,963\,.\,a^4\frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3}\right)h$$

$$-\left(27,242\,.\,a^2a'\mathfrak{A}^{(3)}-3,963\,.\,a^3a'\frac{\partial\mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a}\right)k$$

$$-\left(26057\,.\,aA^{(3)}-12325\,.\,a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}+2017,6\,.\,a^3\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}-113,77\,.\,a^4\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3}\right)\frac{\partial f'}{n\,\partial t}$$

$$+\left(56185\,.\,aA^{(3)}-23735\,.\,a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}+3807,1\,.\,a^3\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}-227,53\,.\,a^4\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3}\right)\frac{\partial g'}{n\,\partial t}$$

$$-\left(28141\,.\,aA^{(4)}-11323\,.\,a^2\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a}+1789,5\,.\,a^3\frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2}-113,77\,.\,a^4\frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3}\right)\frac{\partial h'}{n\,\partial t}$$

$$+\left(765,65\,.\,a^2a'\mathfrak{A}^{(3)}-113,77\,.\,a^3a'\frac{\partial\mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a}\right)\frac{\partial k'}{n\,\partial t}.$$

Cela posé on aura

$$\text{XX.}\quad \delta r = au'' = E\,a\sin(4♄-2♃)+E'\,a\cos(4♄-2♃),$$

$$\text{XXI.}\quad U'' = F'\sin(4♄-2♃)-F\cos(4♄-2♃).$$

§. 196. L'argument de la troisième équation du second ordre, $3\mu'-\mu=\omega$, qui se rapporte aux perturbations de Jupiter dues à l'action de Saturne (§. 190.), donne

$$i=3,\ n'=\frac{2}{5}n,\ \lambda=n-3n',\ \frac{\partial\omega}{\partial t}=-\lambda=\frac{n}{5},\ \lambda^2-n^2=-\frac{24}{25}n^2,\ n-n'=\frac{3}{5}n,$$

$$i^2(n-n')^2-n^2=\frac{56}{25}n^2,\ i(n-n')-2n=-\frac{n}{5},\ i(n-n')-n=\frac{4}{5}n,\ i^2(n-n')-n=\frac{22}{5}n;$$

d'où l'on tirera (§. 182, 183, 191.),

$$B^{(i)}=\frac{25}{56}\left(\frac{5}{3}aA^{(3)}+\frac{a^2}{2}\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}\right),\quad M^{(i)}=-\frac{25}{6}\left(\frac{365}{42}aA^{(3)}+\frac{101}{28}a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}+\frac{a^3}{3}\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}\right),$$

$$N^{(i)}=-\frac{25}{18}\left(25\,.\,aA^{(3)}+11\,.\,a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}+a^3\,.\,\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}\right),$$

$$P^0=\frac{21}{8}A^{(3)}+\frac{5}{4}a\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}+\frac{a^2}{8}\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2},$$

$$P^{I}=5A^{(2)}+\frac{5}{2}a\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}+\frac{a^2}{4}\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2},$$

$$P^{II}=\frac{17}{8}A^{(1)}+\frac{5}{4}a\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}+\frac{a^2}{8}\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2},\quad P^{III}=\frac{aa'}{8}\mathfrak{A}^{(2)},$$

$$Q^0=\frac{31}{8}a\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}+\frac{3}{2}a^2\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}+\frac{a^3}{8}\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$Q^{I}=\frac{15}{2}a\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}+3a^2\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2}+\frac{a^3}{4}\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3},$$

$$Q^{II} = \frac{27}{8}\, a\, \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} + \frac{3}{2}\, a^2\, \frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2} + \frac{a^3}{8}\, \frac{\partial^3 A^{(1)}}{\partial a^3},\quad Q^{III} = \frac{a\,a'}{8}\left(\mathfrak{A}^{(2)} + a\,\frac{\partial \mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a}\right).$$

La période de cette inégalité étant le tems, dans lequel l'argument ω augmente de 360° degrés, et les durées des révolutions étant réciproques aux moyens mouvemens, elle sera égale à $\frac{n}{3n'-n} = 5$ années de Jupiter, ou environ 60 de nos années. Pendant une période aussi courte il est permis de négliger les variations des élémens. En faisant donc pour abréger,

$$\frac{1055}{84}\, a A^{(3)} + \frac{407}{56}\, a^2\, \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + \frac{5}{3}\, a^3\, \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{8}\, \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} = \text{IX},$$

$$\frac{175}{12}\, a A^{(2)} + \frac{23}{12}\, a^2\, \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} - \frac{23}{12}\, a^3\, \frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} - \frac{a^4}{4}\, \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3} = \text{X},$$

$$\frac{85}{4} a A^{(1)} + \frac{73}{8} a^2 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} - \frac{a^3}{4} \frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2} - \frac{a^4}{8} \frac{\partial^3 A^{(1)}}{\partial a^3} = \text{XI},\quad \frac{a^2 a'}{8}\left(9\mathfrak{A}^{(2)} - a\,\frac{\partial \mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a}\right) = \text{XII},$$

l'équation IV (§. 192.) deviendra

$$0 = \frac{\partial\partial u''}{\partial t^2} + n^2 u'' + (\text{IX}.f + \text{X}.g - \text{XI}.h + \text{XII}.k)\, n^2 \sin\omega$$
$$+ (\text{IX}.f' + \text{X}.g' - \text{XI}.h' + \text{XII}.k')\, n^2 \cos\omega,$$

dont l'intégration donnera, attendu que $\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{n}{5}$,

$$\text{XXII.}\quad u'' = -\frac{25}{24}\,\{\text{IX}.f + \text{X}.g - \text{XI}.h + \text{XII}.k\}\sin\omega$$
$$-\frac{25}{24}\,\{\text{IX}.f' + \text{X}.g' - \text{XI}.h' + \text{XII}.k'\}\cos\omega.$$

On en tirera, en différentiant, et substituant $\partial\omega = \frac{n}{5}\,\partial t$,

$$\frac{2\partial u''}{n\,\partial t} = \frac{5}{12}(\text{IX}.f' + \text{X}.g' - \text{XI}.h' + \text{XII}.k')\sin\omega - \frac{5}{12}(\text{IX}.f + \text{X}.g - \text{XI}.h + \text{XII}.k)\cos\omega,$$

ce qui étant substitué dans l'équation VI (§. 192.) donnera, en faisant $U'' = F\cos\omega - F'\sin\omega$,

$$F = \left(-\frac{5}{12}\text{IX} - \frac{3}{10}M^{(i)} + \frac{4}{5}B^{(i)} + 75.aP^0 - 10.aQ^0\right)f - \left(\frac{5}{12}\text{X} - \frac{3}{10}N^{(i)} + 75.aP^I - 10\,aQ^I\right)g$$
$$+ \left(\frac{5}{12}\text{XI} + 75\,.\,aP^{II} - 10\,.\,aQ^{II}\right)h - \left(\frac{5}{12}\text{XII} + 75\,.\,aP^{III} - 10\,.\,aQ^{III}\right)k.$$

En substituant les valeurs précédentes de $M^{(i)}$, etc. on trouvera

$$F = \frac{25}{24}\left\{\frac{8189}{42}\, a A^{(3)} + \frac{1523}{28}\, a^2\, \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} - \frac{17}{3}\, a^3\, \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} - \frac{5}{4}\, a^4\, \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3}\right\} f$$

$$-\frac{25}{144}\left\{2255.\,a\,A^{(2)}+679.\,a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}-67.\,a^3\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2}-15.\,a^4\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3}\right\}g$$
$$+\frac{25}{96}\left\{646.\,a\,A^{(1)}+245.\,a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}-22.\,a^3\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}-5\,a^4\frac{\partial^3 A^{(1)}}{\partial a^3}\right\}h$$
$$-\frac{25}{32}a^2a'\left\{11.\,\mathfrak{A}^{(2)}-\frac{5}{3}\,a\frac{\partial \mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a}\right\}k;$$

XXIII. $U''=F\cos\omega-F'\sin\omega$,

F se changeant en F', si on met f' g', etc. à la place de f, g, etc.

§. 197 L'argument $3\mu-\mu'=\omega'$ (§. 190.) donne deux équations, l'une étant relative aux perturbations que Saturne éprouve par l'action de Jupiter, et l'autre à celles d'Uranus, dues à l'action de Saturne. Il suppose

$i=-1$, d'où l'on tire $\lambda=n'-3n$, et $\frac{\partial\omega'}{\partial t}=3n-n'=-\lambda$ (§. 191.).

On aura donc pour les deux équations (§. 182. (c), §. 183. 191 (A,.),

$$B^{(i)}=-\frac{n^3a}{n'(n'-n)(n'-2n)}A^{(1)}+\frac{n^3a^2}{2n'(n'-2n)}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a},$$

$$M^{(i)}=-\frac{(5n'^2-8n'n+6n^2)n^3a}{n'(n'-n)^2(n'-2n)(3n-n')}A^{(1)}+\frac{(n'^2-n'n+3n^2)n^2a^2}{n'(n'-n)(n'-2n)(3n-n')}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}$$
$$-\frac{n^2a^2}{2(n'-n)(3n-n')}\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2},$$

$$N^{(i)}=-\frac{6n^3a}{(n'-n)(n'-2n)(3n-n')}A^{(2)}+\frac{n'n^2a^2}{(n'-n)(n'-2n)(3n-n')}\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}$$
$$-\frac{n^2a^2}{2(n'-n)(3n-n')}\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2},$$

$$P^0=\frac{9}{8}A^{(1)}-\frac{3}{4}a\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}+\frac{a^2}{8}\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2},\quad P^I=3A^{(2)}-\frac{3}{2}a\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}+\frac{a^2}{4}\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2},$$

$$P^{II}=\frac{13}{8}A^{(3)}-\frac{3}{4}a\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}+\frac{a^2}{8}\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2},\quad P^{III}=\frac{aa'}{8}\mathfrak{A}^{(2)},$$

$$Q^0=\frac{3}{8}a\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}-\frac{a^2}{2}\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}+\frac{a^3}{8}\frac{\partial^3 A^{(1)}}{\partial a^3},\quad Q^I=\frac{3}{2}a\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}-a^2\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2}+\frac{a^3}{4}\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3},$$

$$Q^{II}=\frac{7}{8}a\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}-\frac{a^2}{2}\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}+\frac{a^3}{8}\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3},\quad Q^{III}=\frac{aa'}{8}\left(\mathfrak{A}^{(2)}+a\frac{\partial\mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a}\right).$$

Relativement à la première inégalité on a à très-peu près,

$n'=\frac{5}{2}n$, $\lambda=-\frac{n}{2}$, $\frac{\partial\omega'}{\partial t}=\frac{n}{2}$, $\lambda-n=-\frac{3}{4}n$, $n'-n=\frac{3}{2}n$, $n'-2n=3n-n'=\frac{n}{2}$,

d'où il viendra

$$B^{(i)} = -\frac{8}{15} a A^{(1)} + \frac{2}{5} a^2 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}, \quad M^{(i)} = -\frac{184}{15} a A^{(1)} + \frac{36}{5} a^2 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} - \frac{2}{3} a^3 \frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2},$$

$$N^{(i)} = -16 a A^{(2)} + \frac{20}{3} a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} - \frac{2}{3} a^3 \frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2}.$$

Si l'on fait donc pour abréger,

$$25,9 \cdot a A^{(1)} - 15,675 \cdot a^2 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} + \frac{7}{4} a^3 \frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{8} \frac{\partial^3 A^{(1)}}{\partial a^3} = \text{XIII},$$

$$54 \cdot a A^{(2)} - 24 \cdot a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + \frac{11}{4} a^3 \frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{4} \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3} = \text{XIV},$$

$$\frac{39}{2} a A^{(3)} - \frac{65}{8} a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + a^3 \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{4} \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} = \text{XV},$$

$$\frac{a^2 a'}{8} \left(13 \mathfrak{A}^{(2)} + a \frac{\partial \mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a} \right) = \text{XVI},$$

l'équation IV (§. 192.) deviendra

$$o = \frac{\partial\partial u'}{\partial t^2} + n^2 u' + n^2 \sin \omega' (\text{XIII}. f - \text{XIV}. g + \text{XV}. h - \text{XVI}. k)$$
$$+ n^2 \cos \omega' (\text{XIII}. f' - \text{XIV}. g' + \text{XV}. h' - \text{XVI}. k').$$

Si l'on substitue $\frac{\partial \omega'}{\partial t} = \frac{n}{2}$, on trouvera en intégrant,

$$\text{XXIV.} \quad u'' = -\frac{4}{3} \sin \omega' (\text{XIII}. f - \text{XIV}. g + \text{XV}. h - \text{XVI}. k)$$
$$- \frac{4}{3} \cos \omega' (\text{XIII}. f' - \text{XIV}. g' + \text{XV}. h' - \text{XVI}. k).$$

En substituant les valeurs précédentes dans l'équation VI (§. 194), et faisant

$$\text{XXV.} \quad U'' = F' \sin \omega' - F \cos \omega',$$

on trouvera

$$F = \left\{ \frac{753}{10} a A^{(1)} - \frac{233}{5} a^2 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} + \frac{29}{6} a^3 \frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2} + \frac{3}{2} a^4 \frac{\partial^3 A^{(1)}}{\partial a^3} \right\} f$$
$$- \left\{ 180 \cdot a A^{2} - 80 \cdot a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + \frac{26}{3} a^3 \frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} + \frac{4}{3} a^4 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3} \right\} g$$
$$+ \left\{ \frac{169}{2} a A^{(3)} - \frac{103}{3} a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + \frac{23}{6} a^3 \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + \frac{2}{3} a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} \right\} h$$
$$- \frac{a^2 a'}{6} \left\{ 4 \cdot \mathfrak{A}^{(2)} + 4a \frac{\partial \mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a} \right\} k,$$

et l'on aura F', en mettant dans F, f', g', etc. à la place de f, etc.

§. 195 Considérons maintenant la perturbation d'Uranus, due à l'action de Saturne, et ayant le même argument $\omega' = 3\mu - \mu' = 3♄ - ♅$. Les moyens mouvemens de ces deux planètes donnent

$$\frac{3n-n'}{n}=\frac{569,4}{3856,2}=0,147658=\zeta:$$

ainsi la période de cette inégalité est 6,7724 fois plus longue que la révolution d'Uranus, ce qui fait 569 ans. L'intervalle est trop grand, pour qu'on puisse négliger les variations des élémens $\frac{\partial f}{\partial t}$, etc. Mais comme ζ est une petite fraction, on peut substituer $n'=3n$ dans tous les termes, excepté le facteur $3n-n'$; d'où il vient

$$3n-n'=\zeta n,\ \lambda=-\zeta n,\ \frac{\partial \omega'}{\partial t}=\zeta n,\ n'-n=2n,\ n'-2n=n,\ n^2-\lambda^2=n^2.$$

Les formules (§. 197.) donneront donc

$$B^{(i)}=-\frac{a}{6}A^{(1)}+\frac{a^2}{6}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a},\ M^{(i)}=-\frac{9}{4\zeta}aA^{(1)}+\frac{3}{2\zeta}a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}-\frac{a^3}{4\zeta}\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}=-\frac{2}{\zeta}aP^0,$$

$$N^{(i)}=-\frac{3}{\zeta}aA^{(2)}+\frac{3}{2\zeta}a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}-\frac{a^3}{4\zeta}\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2}=-\frac{a}{\zeta}P^{I}.$$

Si l'on substitue ces valeurs, et celles de P^0, Q^0, etc. (§. 197.) dans l'équation IV (§. 192.), et qu'on néglige les termes inconsidérables, cette équation deviendra

$$0=\frac{\partial\partial u''}{\partial t^2}+n^2u''$$

$$+n^2\left\{Af'-Bg'+Ch'-Dk'+\frac{6a}{\zeta^2}\left(P^0\frac{\partial f}{n\partial t}-P^{I}\frac{\partial g}{n\partial t}+P^{II}\frac{\partial h}{n\partial t}-P^{III}\frac{\partial k}{n\partial t}\right)\right\}\cos\omega'$$

$$+n^2\left\{Af-Bg+Ch-Dk-\frac{6a}{\zeta^2}\left(P^0\frac{\partial f'}{n\partial t}-P^{I}\frac{\partial g'}{n\partial t}+P^{II}\frac{\partial h'}{n\partial t}-P^{III}\frac{\partial k'}{n\partial t}\right)\right\}\sin\omega';$$

$$A \text{ étant }=\frac{8}{\zeta}aP^0+aQ^0=\frac{9}{\zeta}aA^{(1)}-\left(\frac{8}{\zeta}-\frac{3}{8}\right)a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}+\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{2}\right)a^3\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}+\frac{a^4}{8}\frac{\partial^3A^{(1)}}{\partial a^3},$$

$$B=\frac{7}{\zeta}aP^{I}+aQ^{I}=\frac{21}{\zeta}aA^{(2)}-\left(\frac{21}{2\zeta}-\frac{3}{2}\right)a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}+\left(\frac{7}{4\zeta}-1\right)a^3\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2}+\frac{a^4}{4}\frac{\partial^3A^{(2)}}{\partial a^3},$$

$$C=\frac{6}{\zeta}aP^{II}+aQ^{II}=\frac{39}{4\zeta}aA^{(3)}-\left(\frac{9}{2\zeta}-\frac{7}{8}\right)a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}+\left(\frac{3}{4\zeta}-\frac{1}{2}\right)a^3\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}+\frac{a^4}{8}\frac{\partial^3A^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$D=\frac{6}{\zeta}aP^{III}+aQ^{III}=\left(\frac{3}{4\zeta}+\frac{1}{8}\right)a^2a'\mathfrak{A}^{(2)}+\frac{a^3a'}{8}\frac{\partial\mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a}.$$

Il est aisé de voir que l'intégrale de l'équation précedente a la forme

$$u''=\left\{Ff-Gg+Hh-Kk-F'\frac{\partial f'}{n\partial t}+G'\frac{\partial g'}{n\partial t}-H'\frac{\partial h'}{n\partial t}+K'\frac{\partial k'}{n\partial t}\right\}\sin\omega'$$

$$+\left\{Ff'-Gg'+Hh'-Kk'+F'\frac{\partial f}{n\partial t}-G'\frac{\partial g}{n\partial t}+H'\frac{\partial h}{n\partial t}-K'\frac{\partial h}{n\partial t}\right\}\cos\omega'.$$

On en conclura, à cause de $\frac{\partial\omega'}{\partial t}=\zeta n$,

$$\frac{\partial u''}{\partial t} = n\cos\omega' \left\{ \begin{array}{l} \zeta(Ff - Gg + Hh - Kk) - (\zeta F' - F)\frac{\partial f'}{n\partial t} + (\zeta G' - G)\frac{\partial g'}{n\partial t} \\ -(\zeta H' - H)\frac{\partial h'}{n\partial t} + (\zeta K' - K)\frac{\partial k'}{n\partial t} \end{array}\right\}$$

$$- n\sin\omega' \left\{ \begin{array}{l} \zeta(Ff' - Gg' + Hh' - Kk') + (\zeta F' - F)\frac{\partial f}{n\partial t} - (\zeta G' - G)\frac{\partial g}{n\partial t} \\ + (\zeta H' - H)\frac{\partial h}{n\partial t} - (\zeta K' - K)\frac{\partial k}{n\partial t} \end{array}\right\},$$

$$\frac{\partial\partial u''}{\partial t^2} = -\zeta n^2\sin\omega' \left\{ \begin{array}{l} \zeta(Ff - Gg + Hh - Kk) - (\zeta F' - 2F)\frac{\partial f'}{n\partial t} + (\zeta G' - 2G)\frac{\partial g'}{n\partial t} \\ -(\zeta H' - 2H)\frac{\partial h'}{n\partial t} + (\zeta K' - 2K)\frac{\partial k'}{n\partial t} \end{array}\right\}$$

$$- \zeta n^2\cos\omega' \left\{ \begin{array}{l} \zeta(Ff' - Gg' + Hh' - Kk') + (\zeta F' - 2F)\frac{\partial f}{n\partial t} - (\zeta G' - 2G)\frac{\partial g}{n\partial t} \\ + (\zeta H' - 2H)\frac{\partial h}{n\partial t} - (\zeta K' - 2K)\frac{\partial k}{n\partial t} \end{array}\right\}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de u'' et de $\frac{\partial\partial u''}{\partial t^2}$ dans l'équation différentielle, on trouvera, en comparant les termes semblables, et rejetant ceux qui sont multipliés par ζ^2,

$$F = -A,\ G = -B,\ H = -C,\ K = -D,\ F' = -2\zeta F - \frac{6}{\zeta^2}aP^0 = 2\zeta A - \frac{6}{\zeta^2}aP^0,$$

$$G' = 2\zeta B - \frac{6}{\zeta^2}aP^{I},\ H' = 2\zeta C - \frac{6}{\zeta^2}aP^{II},\ K' = 2\zeta D - \frac{6}{\zeta^2}aP^{III}.$$

En faisant donc $u'' = -E\sin\omega' - E'\cos\omega'$, on aura, par ce qui précède,

$$E = Af - Bg + Ch - Dk - \left(\frac{6}{\zeta^2}aP^0 - 2\zeta A\right)\frac{\partial f'}{n\partial t} + \left(\frac{6}{\zeta^2}aP^{I} - 2\zeta B\right)\frac{\partial g'}{n\partial t} - \text{cet.}$$

ce qui donne en même tems E', au moyen des substitutions précédentes. Les valeurs de $\zeta = 0,14766$; $\zeta^2 = 0,0218$; $\frac{1}{\zeta} = 6,7724$; $\frac{1}{\zeta^2} = 45,8653$; donneront

$$E = f\left\{60,952\,.\,aA^{(1)} - 40,259\,.\,a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} + 6,2724\,.\,a^3\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{8}\frac{\partial^3 A^{(1)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$-g\left\{142,22\,.\,aA^{(2)} - 69,61\,.\,a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 10,852\,.\,a^3\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{4}\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$+h\left\{66,031\,.\,aA^{(3)} - 29,601\,.\,a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 4,579\,.\,a^3\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{8}\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$-k\left\{5,204\,.\,a^2 a'\,\mathfrak{A}^{(2)}+\frac{a^2 a'}{8}\,\frac{\partial\mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a}\right\}$$

$$-\frac{\partial f'}{n\,\partial t}\left\{291,59.aA^{(1)}-194,5.a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}+32,55.a^3\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}-0,037.a^4\frac{\partial^3 A^{(1)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$+\frac{\partial g'}{n\,\partial t}\left\{783,58.aA^{(2)}-392,23.a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}+65,6.a^3\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2}-0,074.a^4\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$-\frac{\partial h'}{n\,\partial t}\left\{427,69.aA^3-197,65.a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}+33,05.a^3\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}-0,037.a^4\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$+\frac{\partial k'}{n\,\partial t}\left\{32,86.a^2 a'\,\mathfrak{A}^{(2)}-0,037.a^3 a'\frac{\partial\mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a}\right\}.$$

Si l'on néglige les quantités de l'ordre ζ^3, on aura

$$\frac{\partial u''}{n\,\partial t}=-a\cos\omega'\left\{\begin{array}{l}8P^0 f-7P^I g+6P^{II} h-6P^{III} k\\ +\frac{1}{\zeta}\left(8P^0\frac{\partial f'}{n\partial t}-7P^I\frac{\partial g'}{n\partial t}+6P^{II}\frac{\partial h'}{n\partial t}-6P^{III}\frac{\partial k'}{n\partial t}\right)\end{array}\right\}$$

$$+a\sin\omega'\left\{\begin{array}{l}8P^0 f'-7P^I g'+6P^{II} h'-6P^{III} k'\\ -\frac{1}{\zeta}\left(8P^0\frac{\partial f}{n\partial t}-7P^I\frac{\partial g}{n\partial t}+6P^{II}\frac{\partial h}{n\partial t}-6P^{III}\frac{\partial k}{n\partial t}\right)\end{array}\right\};$$

donc en faisant $U''=F'\sin\omega'-F\cos\omega'$, on trouvera

$$F=\frac{f}{\zeta}\left\{\left(\frac{9}{\zeta}-1+18\zeta\right)aP^0+2aQ^0\right\}$$

$$-\frac{g}{\zeta}\left\{\left(\frac{9}{\zeta}-\frac{1}{2}+15\zeta\right)aP^I+2aQ^I\right\}$$

$$+\frac{h}{\zeta}\left\{\left(\frac{9}{\zeta}+12\zeta\right)aP^{II}+2aQ^{II}\right\}$$

$$-\frac{k}{\zeta}\left\{\left(\frac{9}{\zeta}+12\zeta\right)aP^{III}+2aQ^{III}\right\}$$

$$-\frac{2a}{\zeta^2}\cdot\frac{\partial f'}{n\partial t}\left\{\left(\frac{9}{\zeta}-8\zeta\right)P^0+Q^0\right\}+\frac{2a}{\zeta^2}\cdot\frac{\partial g'}{n\partial t}\left\{\left(\frac{9}{\zeta}-7\zeta\right)P^I+Q^I\right\}$$

$$-\frac{2a}{\zeta^2}\cdot\frac{\partial h'}{n\partial t}\left\{\left(\frac{9}{\zeta}-6\zeta\right)P^{II}+Q^{II}\right\}+\frac{2a}{\zeta^2}\cdot\frac{\partial k'}{n\partial t}\left\{\left(\frac{9}{\zeta}-6\zeta\right)P^{III}+Q^{III}\right\};$$

et en substituant la valeur précédente de ζ,

$$F=f\left\{177,02.aA^{(1)}-312,93.a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}+46,23.a^3\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}+1,693.a^4\frac{\partial^3 A^{(1)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$-g\left\{1273,2.aA^{(2)}-616,28.a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}+92,555.a^3\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2}+3,386.a^4\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$+h\left\{690,48.aA^{(3)}-306,74.a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}+46,33.a^3\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}+1,693.a^4\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$-k\left\{54{,}79\,.\,a^2a'\,\mathfrak{A}^{(2)}+1{,}693\,.\,a^3a'\,\frac{\partial\mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a}\right\}$$

$$-\frac{\partial f'}{n\,\partial t}\left\{6168{,}1\,.\,aA^{(1)}-4077{,}7\,.\,a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}+639{,}5.a^3\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}+11{,}466.a^4\frac{\partial^3A^{(1)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$+\frac{\partial g'}{n\,\partial t}\left\{16489.aA^{(2)}-8106{,}9\,.\,a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}+1282{,}3.a^3\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2}+22{,}933.a^4\frac{\partial^3A^{(2)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$-\frac{\partial h'}{n\,\partial t}\left\{8953{,}5.aA^{(3)}-4052{,}2.a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}+642{,}9.a^3\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}+11{,}466.a^4\frac{\partial^3A^{(3)}}{\partial a^3}\right\}$$

$$+\frac{\partial k'}{n\,\partial t}\left\{700{,}2\,.\,a^2a'\,\mathfrak{A}^{(2)}+11{,}466\,.\,a^3a'\,\frac{\partial\mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a}\right\}.$$

Après avoir calculé E et F, on les changera en E′ et F′, en mettant f', g', h', k', à la place de f, g, h, k, et $-\partial f$, etc. au lieu de $\partial f'$, etc. et l'on aura

$$\text{XXVI.}\quad \delta r = au'' = -\,\mathrm{E}a\sin(3\,\text{♅}-\text{♄})-\mathrm{E}'a\cos(3\,\text{♅}-\text{♄}),$$

$$\text{XXVII.}\quad \mathrm{U}'' = \mathrm{F}'\sin(3\,\text{♅}-\text{♄})-\mathrm{F}\cos(3\,\text{♅}-\text{♄}).$$

§. 199. Il est aisé de voir, que la réaction d'Uranus produira une inégalité de Saturne, qui aura le même argument $\omega'=3\,\text{♅}-\text{♄}$, mais qui sera beaucoup moindre, parceque la masse d'Uranus est presque six fois plus petite que celle de Saturne. On se rappellera que les termes les plus considérables de l'équation de la longitude U″ (§. 198.) ont les facteurs P^{0}, P^{I}, P^{II}, $\mathrm{P}^{\mathrm{III}}$, qui résultent de l'intégrale $\int\partial t\int(\partial\mathrm{R})$ (§. 191.). L'équation VI (§. 191.), relative à ces termes, sera donc

$$m'\,\mathrm{U}'' = 3\,n\,a\int\partial t\int(\partial\mathrm{R}).$$

Or la partie de R, à laquelle il faut avoir égard dans ce calcul, est une fonction des élémens des deux planetes m, m', qui ne change point, si on prend une planète pour l'autre; mais dans ce cas il faut prendre la différentielle $(\partial\mathrm{R})$ par rapport à la planete m', de sorte que $\mu=\text{♅}$ et n seront regardés comme constans. En faisant pour abréger,

$$\mathrm{P}^{0}f-\mathrm{P}^{\mathrm{I}}g+\mathrm{P}^{\mathrm{II}}h-\mathrm{P}^{\mathrm{III}}k=\mathrm{L},\quad \mathrm{P}^{0}f'-\mathrm{P}^{\mathrm{I}}g'+\mathrm{P}^{\mathrm{II}}h'-\mathrm{P}^{\mathrm{III}}k'=\mathrm{L}',$$

on aura (§. 191.)

$$\mathrm{R}=m\,\mathrm{L}\sin(3\mu-\mu')+m\,\mathrm{L}'\cos(3\mu-\mu'),$$

d'où l'on tirera pour le cas présent, en faisant $3\mu-\mu'=\eta$, et $n'-3n=\lambda$,

$$(\partial\mathrm{R})=mn'\partial t(\mathrm{L}\sin\eta-\mathrm{L}\cos\eta),\quad \int(\partial\mathrm{R})=-\frac{n'\mathrm{R}}{3n-n'},$$

$$\int \partial t \int (\partial R) = \frac{m n'}{\lambda^2}(L \cos \eta - L' \sin \eta),$$

au lieu que dans le premier cas (§. 192.) on avait $\int \partial t \int (\partial R) = - \frac{3 m' n}{\lambda^2} (L \cos \eta - L' \sin \eta)$. On a donc pour les deux cas,

$$U'' = - \frac{9 m' n^2}{\lambda^2} a (L \cos \eta - L' \sin \eta), \text{ et}$$

$$U'' = \frac{3 m n'^2}{\lambda^1} a' (L \cos \eta - L' \sin \eta) = 'U.$$

Il en résulte, attendu qu'on a, suivant la troisième loi de Kepler, $n^2 a^3 = n'^2 a'^3$,

$$'U = - \frac{m n'^2 a'}{3 m' n^2 a} U'' = - \frac{m a^2}{3 m' a'^2} U''.$$

Ainsi, après avoir trouvé l'inégalité d'Uranus $= U'$ (§. 198.), on la multipliera par $- \frac{m a^2}{3 m' a'^2}$, pour avoir l'inégalité analogue de Saturne; les lettres sans trait se rapportant à Uranus, et celles marquées d'un trait, à Saturne.

CHAPITRE VI.

Inégalités du troisième ordre.

§. 200. On a vu (§. 184.) que la raison, par laquelle le moyen mouvement des planètes n'est point assujetti à des inégalités séculaires, est que $i'n' \pm in$ n'est pas nul dans le système solaire, quelles que soient les planètes dont on considère l'action mutuelle; mais on a vu en même tems, que si les moyens mouvemens, sans être exactement commensurables, en approchent beaucoup, il en résulte des inégalités considérables, et à longue période (§. 189.). L'analyse précédente a montré que, si l'on nomme λt la partie variable de l'argument duquel dépend l'inégalité à longue période, l'intégrale $\int(\partial R)$ sera divisée par λ, et $\int \partial t \int (\partial R)$ par λ^2 (§. 192.). Relativement aux inégalités du second ordre, λ est $= \pm (i'n' - (i-2)n)$ (§. 191.). Faisons maintenant en général $\lambda = i'n' - in$, et nommons ϖ l'équation de la longitude, qui a l'argument λt ou $i'\mu' - i\mu$, de sorte qu'en vertu du terme $3na \int \partial t \int (\partial R)$ (§. 191. VI.), ϖ aura le facteur $\frac{n^2}{\lambda^2}$ qui sera très-grand, si $\frac{i'n' - in}{n}$ est très-petit. L'inégalité ϖ est de l'ordre $i' - i$ des excentricités (§. 189), et sa période est le tems T, dans lequel l'angle $i'n't - int$ croît de 360°. En nommant donc Θ, Θ', les révolutions des planètes m, m', on aura

$$i'n' - in : n :: \Theta : T, \text{ d'où il vient } T = \frac{n}{\lambda}\Theta = \frac{n'}{\lambda}\Theta'.$$

Relativement à Jupiter et Saturne, $\frac{5n' - 2n}{n}$ est à peu près nul (§. 194.): en faisant donc $i' = 5$, $i = 2$, on aura

$\xi = \frac{5n' - 2n}{n} = \frac{\lambda}{n} = 0{,}0134656$ (§. 195.), $\frac{1}{\xi} = \frac{n}{\lambda} = 74{,}263$; $\mathrm{T} = 74{,}26 \,.\, \Theta$; ou à peu près $\mathrm{T} = 900$ ans. L'inégalité $\mathit{æ}$ est donc additive pendant 450 ans, et soustractive dans l'autre moitié de la période T; ce qui est conforme aux observations (§. 151.) La partie la plus considérable de l'inégalité $\mathit{æ}$, qui dépend du terme $\int \partial t \int (\partial \mathrm{R})$, a la forme $\frac{3 i n^2}{\lambda^2} m' a k \sin (\lambda t + \mathrm{A})$, k étant une fonction des troisièmes puissances des excentricités et des inclinaisons, et $i = 2$ (§. 184.). On a donc $\frac{3 i n^2}{\lambda^2} = 6 (74{,}2)^2 = 33030$; et ce grand facteur rendra l'inégalité $\mathit{æ}$ très-considérable, malgré la petitesse du facteur k. Nous allons développer l'inégalité $\mathit{æ}$ de Jupiter, due à l'action de Saturne, où il faut observer, que toutes les lettres sans trait, m, n, μ, γ, etc. se rapportent à Jupiter, et celles marquées d'un trait, à Saturne.

§. 201. Le §. 180. donne, pour les inégalités du troisième ordre, les équations suivantes:

$$\text{IV. } 0 = \frac{\partial \partial u'''}{n^2 \partial t^2} + u''' + \frac{1}{8} \,.\, u \gamma^3 \{3 \cos (\mu - \varpi) + 53 \cos 3 (\mu - \varpi)\}$$

$$- \frac{3 \partial u}{4 n \partial t} \gamma^3 \{\sin (\mu - \varpi) - 3 \sin 3 (\mu - \varpi)\}$$

$$+ \frac{3 \partial \partial u}{8 n^2 \partial t^2} \gamma^3 \{\cos (\mu - \varpi) - \cos 3 (\mu - \varpi)\} + \frac{1}{2} u' \gamma^2 \{1 + 9 \cos 2 (\mu - \varpi)\}$$

$$+ \frac{2 \partial u'}{n \partial t} \gamma^2 \sin 2 (\mu - \varpi)$$

$$+ \frac{\partial \partial u'}{2 n^2 \partial t^2} \gamma^2 \{1 - \cos 2 (\mu - \varpi)\} + 3 u'' \gamma \cos (\mu - \varpi) + \frac{2 \partial u''}{n \partial t} \gamma \sin (\mu - \varpi)$$

$$- \frac{\partial \partial u''}{n^2 \partial t^2} \gamma \cos (\mu - \varpi)$$

$$+ \frac{a r}{m'} \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\right) + \frac{2 a}{m'} \int (\partial \mathrm{R});$$

$$\text{VI. } \mathrm{U}'' = \frac{1}{8} u \gamma^3 \{\sin (\mu - \varpi) + 9 \sin 3 (\mu - \varpi)\} - \frac{\partial u}{4 n \partial t} \gamma^3 \{\cos (\mu - \varpi) + 3 \cos 3 (\mu - \varpi)\}$$

$$+ u' \gamma^2 \sin 2 (\mu - \varpi) + \frac{\partial u'}{n \partial t} \gamma^2 \{1 - \cos 2 (\mu - \varpi)\}$$

$$+ u'' \gamma \sin (\mu - \varpi) - \frac{2 \partial u''}{n \partial t} \gamma \cos (\mu - \varpi) + \frac{2 \partial u'''}{n \partial t}$$

$$+ \frac{2 n}{m'} a (1 + \tfrac{1}{2} \gamma^2) \int r \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\right) \partial t + \frac{3 n}{m'} a (1 + \tfrac{1}{2} \gamma^2) \int \partial t \int (\partial \mathrm{R}).$$

L'argument de la grande inégalité de Jupiter est (§. 190.)

$$\psi = 5\mu' - 2\mu = 5♄ - 2♃ = 5w + 3\mu.$$

Tout se réduit donc à trouver les termes qui produiront l'angle $5w + 3\mu$, en combinant iw avec μ ou 3μ dans la fonction u §. 182.), $iw + \mu$ avec 2μ dans u' (§. 183.), $\eta^{(i)}$ ou $iw + 2\mu$ (§. 191.) avec μ dans u'', et à choisir dans la fonction S (§. 177. (N), les termes du troisième ordre, dont l'argument $iw + \eta$ est identique avec $5w + 3\mu$, et dans S' (§. 177. (N')), les termes du premier ordre de γ ou γ', dont l'argument $iw + \eta'$ est identique avec $5w + 3\mu = \psi$. Cela posé on trouvera

$$(1)\ldots\left\{\begin{array}{l}
u\cos(\mu-\varpi)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\sin(\mu-\varpi)=0,\ \dfrac{\partial\partial u}{\partial t^2}\cos(\mu-\varpi)=0,\\
u\cos 3(\mu-\varpi)=B^{(5)}\cos(\psi-3\varpi),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\sin 3(\mu-\varpi)=-5(n-n')B^{(5)}\cos(\psi-3\varpi),\\
\dfrac{\partial\partial u}{\partial t^2}\cos 3(\mu-\varpi)=-25(n-n')^2 B^{(5)}\cos(\psi-3\varpi)\ (\S.\ 182.),\\
u'\cos 2(\mu-\varpi)=-\tfrac{1}{2}M^{(5)}\gamma\cos(\psi-3\varpi)+\tfrac{1}{2}N^{(5)}\gamma'\cos(\psi-2\varpi-\varpi')\ (\S.183),\\
\dfrac{\partial u'}{\partial t}\sin 2(\mu-\varpi)=\dfrac{4n-5n'}{2}\{M^{(5)}\gamma\cos(\psi-3\varpi)-N^{(5)}\gamma'\cos(\psi-2\varpi-\varpi')\},\\
\dfrac{\partial\partial u'}{\partial t^2}\cos 2(\mu-\varpi)=\dfrac{(4n-5n')^2}{2}\{M^{(5)}\gamma\cos(\psi-3\varpi)-N^{(5)}\gamma'\cos(\psi-2\varpi-\varpi')\};
\end{array}\right.$$

$au'' = \text{XVIII} + \text{XXII}$ (§. 193. 196), et parceque XXII ne donne aucun terme de la forme ψ, $au'' = \text{XVIII}$, donc (§. 193.)

$$u'' = -\frac{1}{2\xi}\left\{\begin{array}{l}\text{I.}\ \gamma^2\cos(\psi-\mu-2\varpi)-\text{II.}\ \gamma\gamma'\cos(\psi-\mu-\varpi-\varpi')\\ +\text{III.}\ \gamma'^2\cos(\psi-\mu-2\varpi')-\text{IV.}\ \delta^2\cos(\psi-\mu-2\Pi)\end{array}\right\},$$

d'où il suit

$$u''\cos(\mu-\varpi) = -\frac{1}{4\xi}\left\{\begin{array}{l}\text{I.}\ \gamma^2\cos(\psi-3\varpi)-\text{II.}\ \gamma\gamma'\cos(\psi-2\varpi-\varpi')\\ +\text{III.}\ \gamma'^2\cos(\psi-\varpi-2\varpi')-\text{IV.}\ \delta^2\cos(\psi-\varpi-2\Pi)\end{array}\right\},$$

$$\frac{\partial u''}{\partial t}\sin(\mu-\varpi) = \frac{3n-5n'}{4\xi}\left\{\begin{array}{l}\text{I.}\ \gamma^2\cos(\psi-3\varpi)-\text{II.}\ \gamma\gamma'\cos(\psi-2\varpi-\varpi')\\ +\text{III.}\ \gamma'^2\cos(\psi-\varpi-2\varpi')-\text{IV.}\ \delta^2\cos(\psi-\varpi-2\Pi)\end{array}\right\},$$

$$\frac{\partial\partial u''}{\partial t^2}\cos(\mu-\varpi) = \frac{(3n-5n')^2}{4\xi}\left\{\begin{array}{l}\text{I.}\ \gamma^2\cos(\psi-3\varpi)-\text{II.}\ \gamma\gamma'\cos(\psi-2\varpi-\varpi')\\ +\text{III.}\ \gamma'^2\cos(\psi-\varpi-2\varpi')-\text{IV.}\ \delta^2\cos(\psi-\varpi-2\Pi)\end{array}\right\}.$$

De là on tirera, en substituant $5n' = 2n$,

$$(2) \ldots\ldots 3u''\gamma\cos(\mu-\varpi) + \frac{2\partial u''}{n\partial t}\gamma\sin(\mu-\varpi) - \frac{\partial\partial u''}{n^2\partial t^2}\gamma\cos(\mu-\varpi) =$$

$$-\frac{1}{2\xi}\gamma\left\{\begin{array}{l}\text{I}.\gamma^2\cos(\psi-3\varpi) - \text{II}.\gamma\gamma'\cos(\psi-2\varpi-\varpi') \\ +\text{III}.\gamma'^2\cos(\psi-\varpi-2\varpi') - \text{IV}.\delta^2\cos(\psi-\varpi-2\Pi)\end{array}\right\}.$$

Il est visible que, dans les fonctions (N), (P), (N'), (P') (§. 177.178.), il faut faire $\eta = 3(\mu-\varpi)$ si $i=5$, $\eta = 2(\mu-\varpi)+(\mu'-\varpi')$ si $i=4$, $\eta = (\mu-\varpi)+2(\mu'-\varpi')$ si $i=3$, $\eta = 3(\mu'-\varpi')$ si $i=2$, et que d'autres valeurs de i ne peuvent pas produire l'angle ψ. Si l'on fait donc, pour abréger (§. 194.),

$$a\,\text{P}^{\text{v}} = \frac{95}{12}\,a\,\text{A}^{(5)} + \frac{29}{8}\,a^2\frac{\partial\,\text{A}^{(5)}}{\partial a} + \frac{a^3}{2}\,\frac{\partial\partial\,\text{A}^{(5)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{48}\,\frac{\partial^3\text{A}^{(5)}}{\partial a^3},$$

$$a\,\text{P}^{\text{iv}} = \frac{99}{4}\,a\,\text{A}^{(4)} + \frac{23}{2}\,a^2\frac{\partial\,\text{A}^{(4)}}{\partial a} + \frac{25}{16}\,a^3\frac{\partial\partial\,\text{A}^{(4)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{16}\,\frac{\partial^3\text{A}^{(4)}}{\partial a^3},$$

$$a\,\text{P}^{\text{III}} = \frac{201}{8}\,a\,\text{A}^{(3)} + \frac{193}{16}\,a^2\frac{\partial\,\text{A}^{(3)}}{\partial a} + \frac{13}{8}\,a^3\frac{\partial\partial\,\text{A}^{(3)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{16}\,\frac{\partial^3\text{A}^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$a\,\text{P}^{\text{II}} = \frac{389}{48}\,a\,\text{A}^{(2)} + \frac{67}{16}\,a^2\frac{\partial\text{A}^{(2)}}{\partial a} + \frac{9}{16}\,a^3\frac{\partial\partial\text{A}^{(2)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{48}\,\frac{\partial^3\text{A}^{(2)}}{\partial a^3},$$

$$a\,\mathfrak{P}^{\text{iv}} = \frac{a^2a'}{16}\left(7\,\mathfrak{A}^{(4)} + a\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a}\right),\quad a\,\mathfrak{P}^{\text{III}} = \frac{a^2a'}{16}\left(10\,\mathfrak{A}^{(3)} + a\,\frac{\partial\mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a}\right),$$

$$a\,\text{Q}^{\text{v}} = \frac{277}{24}\,a^2\,\frac{\partial\text{A}^{(5)}}{\partial a} + \frac{37}{8}\,a^3\,\frac{\partial\partial\text{A}^{(5)}}{\partial a^2} + \frac{9}{16}\,a^4\,\frac{\partial^3\text{A}^{(5)}}{\partial a^3} + \frac{a^5}{48}\,\frac{\partial^4\text{A}^{(5)}}{\partial a^4},$$

$$a\,\text{Q}^{\text{iv}} = \frac{145}{4}\,a^2\,\frac{\partial\text{A}^{(4)}}{\partial a} + \frac{117}{8}\,a^3\,\frac{\partial\partial\,\text{A}^{(4)}}{\partial a^2} + \frac{7}{4}\,a^4\,\frac{\partial^3\text{A}^{(4)}}{\partial a^3} + \frac{a^5}{16}\,\frac{\partial^4\text{A}^{(4)}}{\partial a^4},$$

$$a\,\text{Q}^{\text{III}} = \frac{595}{16}\,a^2\,\frac{\partial\text{A}^{(3)}}{\partial a} + \frac{245}{16}\,a^3\,\frac{\partial\partial\,\text{A}^{(3)}}{\partial a^2} + \frac{29}{16}\,a^4\,\frac{\partial^3\text{A}^{(3)}}{\partial a^3} + \frac{a^5}{16}\,\frac{\partial^4\text{A}^{(3)}}{\partial a^4},$$

$$a\,\text{Q}^{\text{II}} = \frac{295}{24}\,a^2\,\frac{\partial\text{A}^{(2)}}{\partial a} + \frac{85}{16}\,a^3\,\frac{\partial\partial\,\text{A}^{(2)}}{\partial a^2} + \frac{5}{8}\,a^4\,\frac{\partial^3\text{A}^{(2)}}{\partial a^3} + \frac{a^5}{48}\,\frac{\partial^4\text{A}^{(2)}}{\partial a^4},$$

$$a\,\mathfrak{Q}^{\text{iv}} = \frac{a^2a'}{16}\left(7\,\mathfrak{A}^{(4)} + 9\,a\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a} + a^2\,\frac{\partial\partial\,\mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a^2}\right),$$

$$a\,\mathfrak{Q}^{\text{III}} = \frac{a^2a'}{16}\left(10\,\mathfrak{A}^{(3)} + 12\,a\,\frac{\partial\,\mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a} + a^2\,\frac{\partial\partial\,\mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a^2}\right);$$

les équations (A) (§. 164.), (N) (N') (§. 177.), (P) (P') (§. 178.), donneront

$$(3) \ldots\ldots \frac{a\text{R}}{m'} = -a\text{P}^{\text{v}}\gamma^3\cos(\psi-3\varpi) + a\,\text{P}^{\text{iv}}\gamma^2\gamma'\cos(\psi-2\varpi-\varpi')$$

$$-a\text{P}^{\text{III}}\gamma\gamma'^2\cos(\psi-\varpi-2\varpi') + a\,\text{P}^{\text{II}}\gamma'^3\cos(\psi-3\varpi')$$

$$+a\,\mathfrak{P}^{\text{iv}}\gamma\delta^2\cos(\psi-\varpi-2\Pi) - a\,\mathfrak{P}^{\text{III}}\gamma'\delta^2\cos(\psi-\varpi'-2\Pi),$$

$$(4)\ldots\ \frac{a}{m'}\, r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = -aQ^{v}\gamma^3\cos(\psi - 3\varpi) + a\,Q^{iv}\gamma^2\gamma'\cos(\psi - 2\varpi - \varpi') - a\,Q^{iii}\gamma\gamma'^2\cos(\psi - \varpi - 2\varpi') + aQ^{ii}\gamma'^3\cos(\psi - 3\varpi') + a\Omega^{iv}\gamma\delta^2\cos(\psi - \varpi - 2\Pi) - a\Omega^{iii}\gamma'\delta^2\cos(\psi - \varpi' - 2\Pi);$$

Q^{v} étant $= a\dfrac{\partial P^{v}}{\partial a}$, et ainsi du reste. Faisons encore, pour abréger,

$\gamma^3\sin 3\varpi = \mathfrak{f}$, $\gamma^2\gamma'\sin(2\varpi + \varpi') = \mathfrak{g}$, $\gamma\gamma'^2\sin(\varpi + 2\varpi') = \mathfrak{h}$, $\gamma'^3\sin 3\varpi' = \mathfrak{k}$,
$\gamma\delta^2\sin(\varpi + 2\Pi) = \mathfrak{l}$, $\gamma'\delta^2\sin(\varpi' + 2\Pi) = \mathfrak{m}$, $\gamma^3\cos 3\varpi = \mathfrak{f}'$, $\gamma^2\gamma'\cos(2\varpi + \varpi') = \mathfrak{g}'$,
$\gamma\gamma'^2\cos(\varpi + 2\varpi') = \mathfrak{h}'$, $\gamma'^3\cos 3\varpi' = \mathfrak{k}'$, $\gamma\delta^2\cos(\varpi + 2\Pi) = \mathfrak{l}'$, $\gamma'\delta^2\cos(\varpi' + 2\Pi) = \mathfrak{m}'$;

$$P^{v}\mathfrak{f} - P^{iv}\mathfrak{g} + P^{iii}\mathfrak{h} - P^{ii}\mathfrak{k} - \mathfrak{P}^{iv}\mathfrak{l} + \mathfrak{P}^{iii}\mathfrak{m} = K,$$
$$P^{v}\mathfrak{f}' - P^{iv}\mathfrak{g}' + P^{iii}\mathfrak{h}' - P^{ii}\mathfrak{k}' - \mathfrak{P}^{iv}\mathfrak{l}' + \mathfrak{P}^{iii}\mathfrak{m}' = K',$$
$$Q^{v}\mathfrak{f} - Q^{iv}\mathfrak{g} + Q^{iii}\mathfrak{h} - Q^{ii}\mathfrak{k} - \Omega^{iv}\mathfrak{l} + \Omega^{iii}\mathfrak{m} = L,$$
$$Q^{v}\mathfrak{f}' - Q^{iv}\mathfrak{g}' + Q^{iii}\mathfrak{h}' - Q^{ii}\mathfrak{k}' - \Omega^{iv}\mathfrak{l}' + \Omega^{iii}\mathfrak{m}' = L'.$$

Cela posé les équations (3) (4) donneront

$$(5)\ldots\ aR = -m'aK\sin\psi - m'aK'\cos\psi,$$
$$(6)\ldots\ ar\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = -m\,a\,L\sin\psi - m'aL'\cos\psi,$$
$$(7)\ldots\ a(\partial R) = 2m'na\partial t\,(K\cos\psi - K'\sin\psi);$$

d'où l'on tirera, par les formules (B) (§. 191.), en observant que $n\partial t = \dfrac{\partial\psi}{\xi}$,

$$(8)\ldots\int(\partial R) = \frac{2m'}{\xi}\left\{\begin{aligned}&\left(K - \frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial K'}{n\partial t} - \frac{1}{\xi^2}\cdot\frac{\partial\partial K}{n^2\partial t^2}\right)\sin\psi\\ +&\left(K' + \frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial K}{n\partial t} - \frac{1}{\xi^2}\cdot\frac{\partial\partial K'}{n^2\partial t^2}\right)\cos\psi\end{aligned}\right\},$$

$$(9)\ldots\ n\int r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial t = \frac{m'}{\xi}\left\{\begin{aligned}&\left(L - \frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial L'}{n\partial t} - \frac{1}{\xi^2}\cdot\frac{\partial\partial L}{n^2\partial t^2}\right)\cos\psi\\ -&\left(L' + \frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial L}{n\partial t} - \frac{1}{\xi^2}\cdot\frac{\partial\partial L'}{n^2\partial t^2}\right)\sin\psi\end{aligned}\right\};$$

$$(10)\ldots\ n\int\partial t\int(\partial R) = \frac{2m'}{\xi^2}\left\{\begin{aligned}&\left(K' + \frac{2}{\xi}\cdot\frac{\partial K}{n\partial t} - \frac{3}{\xi^2}\cdot\frac{\partial\partial K'}{n^2\partial t^2}\right)\sin\psi\\ -&\left(K - \frac{2}{\xi}\cdot\frac{\partial K'}{n\partial t} - \frac{3}{\xi^2}\cdot\frac{\partial\partial K}{n^2\partial t^2}\right)\cos\psi\end{aligned}\right\}.$$

Si l'on substitue dans l'équation IV les quantités (1) (2) (6) (8), et qu'on fasse pour abréger,

$$aB^{v}=\frac{13}{4}B^{(5)}-\frac{5}{4}M^{(5)}-\frac{\mathrm{I}}{2\xi}+\frac{4}{\xi}aP^{v}-aQ^{v},\quad aB^{iv}=\frac{4}{\xi}aP^{iv}-aQ^{iv}-\frac{5}{4}N^{(5)}-\frac{\mathrm{II}}{2\xi},$$

$$aB^{iii}=\frac{4}{\xi}aP^{iii}-aQ^{iii}-\frac{\mathrm{III}}{2\xi},\quad aB^{ii}=\frac{4}{\xi}aP^{ii}-aQ^{ii},$$

$$a\mathfrak{B}^{iv}=\frac{4}{\xi}a\mathfrak{P}^{iv}-a\mathfrak{Q}^{iv}-\frac{\mathrm{IV}}{2\xi},\quad a\mathfrak{B}^{iii}=\frac{4}{\xi}a\mathfrak{P}^{iii}-a\mathfrak{Q}^{iii};$$

l'équation IV deviendra

$$\mathrm{IV.}\quad o=\frac{\partial\partial u'''}{n^2\partial t^2}+u'''+a\sin\psi\left\{\begin{array}{l}B^{v}\mathfrak{f}-B^{iv}\mathfrak{g}+B^{iii}\mathfrak{h}-B^{ii}\mathfrak{k}-\mathfrak{B}^{iv}\mathfrak{l}+\mathfrak{B}^{iii}\mathfrak{m}\\ -\frac{4}{\xi^2}\left(\begin{array}{l}P^{v}\frac{\partial\mathfrak{f}'}{n\partial t}-P^{iv}\frac{\partial\mathfrak{g}'}{n\partial t}+P^{iii}\frac{\partial\mathfrak{h}'}{n\partial t}\\ -P^{ii}\frac{\partial\mathfrak{k}'}{n\partial t}-\mathfrak{P}^{iv}\frac{\partial\mathfrak{l}'}{n\partial t}+\mathfrak{P}^{iii}\frac{\partial\mathfrak{m}'}{n\partial t}\end{array}\right)\\ -\frac{4}{\xi^4}\left(\begin{array}{l}P^{v}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}-P^{iv}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}}{n^2\partial t^2}+P^{iii}\frac{\partial\partial\mathfrak{h}}{n^2\partial t^2}\\ -P^{ii}\frac{\partial\partial\mathfrak{k}}{n^2\partial t^2}-\mathfrak{P}^{iv}\frac{\partial\partial\mathfrak{l}}{n^2\partial t^2}+\mathfrak{P}^{iii}\frac{\partial\partial\mathfrak{m}}{n^2\partial t^2}\end{array}\right)\end{array}\right\}+Ba\cos\psi,$$

B étant ce que devient le coefficient de $a\sin\psi$, si l'on met $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{g}'$, etc. $-\partial\mathfrak{f}$, $-\partial\mathfrak{g}$, etc. et $\partial\partial\mathfrak{f}'$, $\partial\partial\mathfrak{g}'$; etc. à la place de $\mathfrak{f}$, etc. $\partial\mathfrak{f}'$, etc. et $\partial\partial\mathfrak{f}$, etc. Substituons maintenant (§. 182. 183. 195.),

$$B^{(5)}=\frac{5}{24}aA^{(5)}+\frac{a^2}{16}\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a},\quad M^{(5)}=\frac{25}{4}aA^{(5)}+\frac{19}{8}a^2\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a}+\frac{a^2}{6}\cdot\frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2},$$

$$N^{(5)}=6aA^{(4)}+\frac{7}{3}a^2\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a}+\frac{a^2}{8}\cdot\frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2},$$

$$\frac{1}{\xi}=74{,}26347;\ \frac{1}{\xi^2}=5515{,}06;\ \frac{1}{\xi^3}=409568;\ \frac{1}{\xi^4}=30415900;$$

et les valeurs précédentes de I, II, III, IV, P^{v}, etc. Q^{v}, etc. Cela posé on trouvera

$$aB^{v}=3[illegible]7{,}883.aA^{(5)}+249{,}551.a^2\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a}+32{,}001.a^3\frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2}+0{,}9846.a^4\frac{\partial^3A^{(4)}}{\partial a^3}-\frac{a^5}{48}\frac{\partial^4A^{(4)}}{\partial a^4},$$

$$aB^{iv}=3620{,}46.aA^{(4)}+1656{,}82.a^2\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a}+216{,}572.a^3\frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2}+7{,}533.a^4\frac{\partial^3A^{(4)}}{\partial a^3}-\frac{a^5}{16}\frac{\partial^4A^{(4)}}{\partial a^4},$$

$$aB^{iii}=5572{,}47.aA^{(3)}+2643{,}46\,a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}+346{,}135.a^3\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}+12{,}112.a^4\frac{\partial^3A^{(3)}}{\partial a^3}-\frac{a^5}{16}\frac{\partial^4A^{(3)}}{\partial a^4},$$

$$aB^{ii}=2407{,}37.aA^{(2)}+1231{,}62.a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}+161{,}78.a^3\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2}+5{,}5636.a^4\frac{\partial^3A^{(2)}}{\partial a^3}-\frac{a^5}{48}\frac{\partial^4A^{(2)}}{\partial a^4},$$

$$a\mathfrak{B}^{iv}=96{,}662.a^2a'\mathfrak{A}^{(4)}+13{,}362.a^3a'\frac{\partial\mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a}-\frac{a^4a'}{16}\cdot\frac{\partial\partial\mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a^2},$$

$$a\mathfrak{B}^{\text{IV}} = 185{,}034 \,.\, a^2 a' \,\mathfrak{A}^{(3)} + 17{,}816 \,.\, a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a} - \frac{a^4 a'}{16} \frac{\partial\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a^2}.$$

§. 202. Comme l'équation IV est symétrique à l'égard des quantités $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, etc. il suffira de l'intégrer par rapport à $\mathfrak{f}$; et il est aisé de voir que l'intégrale aura la forme,

$$u'' = -a\sin\psi\left\{C^{\text{v}}\mathfrak{f} - c^{\text{v}}\frac{\partial \mathfrak{f}'}{n\partial t} - \gamma^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}\right\} - a\cos\psi\left\{C^{\text{v}}\mathfrak{f}' + c^{\text{v}}\frac{\partial \mathfrak{f}}{n\partial t} - \gamma^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}'}{n^2\partial t^2}\right\}.$$

En différentiant cette expression, on trouvera, à cause de $\partial\psi = \xi n\partial t$,

$$\frac{\partial u''}{n\partial t} = a\sin\psi\left\{\xi\left(C^{\text{v}}\mathfrak{f}' + c^{\text{v}}\frac{\partial \mathfrak{f}}{n\partial t} - \gamma^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}'}{n^2\partial t^2}\right) - C^{\text{v}}\frac{\partial \mathfrak{f}}{n\partial t} + c^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}'}{n^2\partial t^2}\right\}$$
$$- a\cos\psi\left\{\xi\left(C^{\text{v}}\mathfrak{f} - c^{\text{v}}\frac{\partial \mathfrak{f}'}{n\partial t} - \gamma^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}\right) + C^{\text{v}}\frac{\partial \mathfrak{f}'}{n\partial t} + c^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}\right\},$$

$$\frac{\partial\partial u''}{n^2\partial t^2} = a\sin\psi\left\{\xi^2\left(C^{\text{v}}\mathfrak{f} - c^{\text{v}}\frac{\partial \mathfrak{f}'}{n\partial t} - \gamma^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}\right) + 2\xi\left(C^{\text{v}}\frac{\partial \mathfrak{f}'}{n\partial t} + c^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}\right) - C^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}\right\}$$
$$+ a\cos\psi\left\{\xi^2\left(C^{\text{v}}\mathfrak{f}' + c^{\text{v}}\frac{\partial \mathfrak{f}}{n\partial t} - \gamma^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}'}{n^2\partial t^2}\right) - 2\xi\left(C^{\text{v}}\frac{\partial \mathfrak{f}}{n\partial t} - c^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}'}{n^2\partial t^2}\right) - C^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}'}{n^2\partial t^2}\right\}.$$

Si on substitue cette valeur dans l'équation

$$\text{IV.}\quad 0 = \frac{\partial\partial u''}{n^2\partial t^2} + u'' + a\sin\psi\left\{B^{\text{v}}\mathfrak{f} - \frac{4}{\xi^2}P^{\text{v}}\frac{\partial \mathfrak{f}'}{n\partial t} - \frac{4}{\xi^2}P^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}\right\} + \text{cet.}$$

et qu'on égale séparément à zéro les coefficiens de $\mathfrak{f}$, $\partial\mathfrak{f}$, $\partial\partial\mathfrak{f}$, on aura, pour les déterminer, ces trois équations:

$$0 = C^{\text{v}}(1-\xi^2) - B^{\text{v}},\quad 0 = c^{\text{v}}(1-\xi^2) + 2\xi C^{\text{v}} - \frac{4}{\xi^2}P^{\text{v}},\quad 0 = \gamma^{\text{v}}(1-\xi^2) + 2\xi c^{\text{v}} - C^{\text{v}} - \frac{4}{\xi^2}P^{\text{v}},$$

d'où l'on conclura

$$C^{\text{v}} = (1+\xi^2)B^{\text{v}},\quad c^{\text{v}} = 4\left(\frac{1}{\xi^2}+1\right)P^{\text{v}} - 2\xi B^{\text{v}},\quad \gamma^{\text{v}} = 4\left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi} - 3\xi\right)P^{\text{v}} + (1+6\xi^2)B^{\text{v}},\ \text{ou}$$

$$C^{\text{v}} = 1{,}00018 \,.\, B^{\text{v}},\quad c^{\text{v}} = 22064{,}24 \,.\, P^{\text{v}} - 0{,}0269 \,.\, B^{\text{v}},\quad \gamma^{\text{v}} = 163797{,}5 \,.\, P^{\text{v}} + 1{,}0011 \,.\, B^{\text{v}},$$

et ainsi des autres coefficiens, C^{IV}, c^{IV}, γ^{IV}, etc. Si l'on fait

$$\text{XXVIII.}\quad u'' = -aX\sin\psi - aX'\cos\psi,\ \text{on aura}$$

$$X = C^{\text{v}}\mathfrak{f} - C^{\text{IV}}\mathfrak{g} + C^{\text{III}}\mathfrak{h} - C^{\text{II}}\mathfrak{k} - C^{\text{I}}\mathfrak{l} + C^{0}\mathfrak{m}$$
$$- c^{\text{v}}\frac{\partial \mathfrak{f}'}{n\partial t} + c^{\text{IV}}\frac{\partial \mathfrak{g}'}{n\partial t} - c^{\text{III}}\frac{\partial \mathfrak{h}'}{n\partial t} + c^{\text{II}}\frac{\partial \mathfrak{k}'}{n\partial t} + c^{\text{I}}\frac{\partial \mathfrak{l}'}{n\partial t} - c^{0}\frac{\partial \mathfrak{m}'}{n\partial t}$$
$$- \gamma^{\text{v}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}}{n^2\partial t^2} + \gamma^{\text{IV}}\frac{\partial\partial \mathfrak{g}}{n^2\partial t^2} - \gamma^{\text{III}}\frac{\partial\partial \mathfrak{h}}{n^2\partial t^2} + \gamma^{\text{II}}\frac{\partial\partial \mathfrak{k}}{n^2\partial t^2} + \gamma^{\text{I}}\frac{\partial\partial \mathfrak{l}}{n^2\partial t^2} - \gamma^{0}\frac{\partial\partial \mathfrak{m}}{n^2\partial t^2};$$

X′ étant ce que devient X, si on met f′ g′, etc. — ∂f, etc. et ∂∂f′, etc. à la place de f, etc. ∂f, etc. et ∂∂f, etc. En substituant les valeurs précédentes de B^{v}, B^{iv}, etc. P^{v}, P^{iv}, etc. on trouvera

$$aC^{v} = 5579,8 . aA^{(5)} + 249,6 . a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a}$$

$$+ 32,007 . a^3 \frac{\partial\partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 0,985 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3} - \frac{a^5}{48} \frac{\partial^4 A^{(5)}}{\partial a^4},$$

$$aC^{iv} = 3621,1 . aA^{(4)} + 1657,1 . a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a}$$

$$+ 216,2 . a^3 \frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 7,534 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3} - \frac{a^5}{16} \frac{\partial^4 A^{(4)}}{\partial a^4},$$

$$aC^{iii} = 5573,5 . aA^{(3)} + 2613,9 . a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}$$

$$+ 346,2 . a^3 \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 12,114 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} - \frac{a^5}{16} \frac{\partial^4 A^{(3)}}{\partial a^4},$$

$$aC^{ii} = 2407,8 . aA^{(2)} + 1231,8 . a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}$$

$$+ 161,8 . a^3 \frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 5,565 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3} - \frac{a^5}{48} \frac{\partial^4 A^{(2)}}{\partial a^4},$$

$$aC^{i} = 96,68 . a^2 a' \mathfrak{A}^{(4)} + 13,364 . a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a} - \frac{a^4 a'}{16} \frac{\partial\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a^2},$$

$$aC^{0} = 185,1 . a^2 a' \mathfrak{A}^{(3)} + 17,82 . a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a} - \frac{a^4 a'}{16} \frac{\partial\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a^2};$$

$$ac^{v} = 74660 . aA^{(5)} + 79979 . a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 11031 . a^3 \frac{\partial\partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 4[illegible]9,6 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3},$$

$$ac^{iv} = [illegible]4[illegible]993 . aA^{(4)} + 2[illegible]3694 . a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 34470 . a^3 \frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 1378,8 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3},$$

$$ac^{iii} = 5[illegible]4[illegible]4 . aA^{(3)} + 266[illegible]79 . a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 35845 . a^3 \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 1378,7 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$ac^{ii} = 178747 . aA^{(2)} + 9[illegible]61 . a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 12407 . a^3 \frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 4[illegible]9,5 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3},$$

$$ac^{i} = 96[illegible]0,5 . a^2 a' \mathfrak{A}^{(4)} + 1378,6 . a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a};$$

$$ac^{0} = 13785 . a^2 a' \mathfrak{A}^{(3)} + 1378,5 . a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a};$$

$$\frac{a\gamma^{v}}{1000} = 12968 . aA^{(5)} + 5938 . a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 819 . a^3 \frac{\partial\partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 34 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{a\gamma^{iv}}{1000} = 40543 . aA^{(4)} + 18838 . a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 2560 . a^3 \frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 102 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{a\gamma^{III}}{1000} = 41160 \,.\, aA^{(3)} + 19761 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 2662 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 102 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{a\gamma^{II}}{1000} = 13267 \,.\, aA^{(2)} + 6860 \,.\, a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 921 \,.\, a^3 \frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 34 \,.\, a^4 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{a\gamma^{I}}{1000} = 717 \,.\, a^2 a' \mathfrak{A}^{(4)} + 102 \,.\, a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a}, \quad \frac{a\gamma^{0}}{1000} = 1024 \,.\, a^2 a' \mathfrak{A}^{(3)} + 102 \,.\, a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a}.$$

§. 203. Le même procédé donnera pour l'équation VI (§. 201.),

$$u \sin 3(\mu - \varpi) = B^{(5)} \sin(\psi - 3\varpi), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \cos 3(\mu - \varpi) = 5(n - n') B^{(5)} \sin(\psi - 3\varpi),$$

$$u' \sin 2(\mu - \varpi) = -\tfrac{1}{2} M^{(5)} \gamma \sin(\psi - 3\varpi) + \tfrac{1}{2} N^{(5)} \gamma' \sin(\psi - 2\varpi - \varpi'),$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} \cos 2(\mu - \varpi) = -\frac{4n - 5n'}{2} \{M^{(5)} \gamma \sin(\psi - 3\varpi) - N^{(5)} \gamma' \sin(\psi - 2\varpi - \varpi')\},$$

$$u'' \sin(\mu - \varpi) = -\frac{1}{4\xi} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{I.}\ \gamma^2 \sin(\psi - 3\varpi) - \mathrm{II.}\ \gamma\gamma' \sin(\psi - 2\varpi - \varpi') \\ + \mathrm{III.}\ \gamma'^2 \sin(\psi - \varpi - 2\varpi') - \mathrm{IV.}\ \delta^2 \sin(\psi - \varpi - 2\Pi) \end{array} \right\},$$

$$\frac{\partial u''}{\partial t} \cos(\mu - \varpi) = -\frac{3n - 5n'}{4\xi} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{I.}\ \gamma^2 \sin(\psi - 3\varpi) - \mathrm{II.}\ \gamma\gamma' \sin(\psi - 2\varpi - \varpi') \\ + \mathrm{III.}\ \gamma'^2 \sin(\psi - \varpi - 2\varpi') - \mathrm{IV.}\ \delta^2 \sin(\psi - \varpi - 2\Pi) \end{array} \right\},$$

et par la valeur de u''' que nous venons de trouver (§. 202.),

$$(1) \ldots\ldots \frac{2\partial u'''}{n\partial t} = 2a\xi \left\{ \begin{array}{l} (C^{V}\mathfrak{f}' - C^{IV}\mathfrak{g}' + C^{III}\mathfrak{h}' - C^{II}\mathfrak{k}' - C^{I}\mathfrak{l}' + C^{0}\mathfrak{m}') \sin\psi \\ - (C^{V}\mathfrak{f} - C^{IV}\mathfrak{g} + C^{III}\mathfrak{h} - C^{II}\mathfrak{k} - C^{I}\mathfrak{l} + C^{0}\mathfrak{m}) \cos\psi \end{array} \right\}.$$

Si l'on substitue $n' = \frac{2}{5}n$, on aura

$$(2) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{8} u\gamma^3 \sin 3(\mu - \varpi) - \frac{3}{4} \cdot \frac{\partial u}{n\partial t} \gamma^3 \cos 3(\mu - \varpi) + u'\gamma^2 \sin 2(\mu - \varpi) - \frac{\partial u'}{n\partial t} \gamma^2 \cos 2(\mu - \varpi) \\ + u''\gamma \sin(\mu - \varpi) - \frac{2\partial u''}{n\partial t} \gamma \cos(\mu - \varpi) = \\ \left\{ \left(\frac{\mathrm{I}}{4\xi} + \frac{1}{2} M^{(5)} - \frac{9}{8} B^{(5)}\right) \mathfrak{f}' - \left(\frac{\mathrm{II}}{4\xi} + \frac{1}{2} N^{(5)}\right) \mathfrak{g}' + \frac{\mathrm{III}}{4\xi} \mathfrak{h}' - \frac{\mathrm{IV}}{4\xi} \mathfrak{l} \right\} \sin\psi \\ - \left\{ \left(\frac{\mathrm{I}}{4\xi} + \frac{1}{2} M^{(5)} - \frac{9}{8} B^{(5)}\right) \mathfrak{f} - \left(\frac{\mathrm{II}}{4\xi} + \frac{1}{2} N^{(5)}\right) \mathfrak{g} + \frac{\mathrm{III}}{4\xi} \mathfrak{h} - \frac{\mathrm{IV}}{4\xi} \mathfrak{l} \right\} \cos\psi. \end{array} \right.$$

Les équations (9) (10) (§. 201.) donneront

$$(3) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{2na}{m'} (1 + \frac{1}{2}\gamma^2) \int r \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) \partial t + \frac{3na}{m'} (1 + \frac{1}{2}\gamma^2) \int \partial t \int (\partial R) = \\ \frac{2a}{\xi} \sin\psi \left\{ \frac{3}{\xi} K' - L' + \frac{6}{\xi^2} \cdot \frac{\partial K}{n\partial t} - \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial L}{n\partial t} - \frac{9}{\xi^2} \cdot \frac{\partial\partial K'}{n^2\partial t^2} + \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{\partial\partial L'}{n^2\partial t^2} \right\} \\ - \frac{2a}{\xi} \cos\psi \left\{ \frac{3}{\xi} K - L - \frac{6}{\xi^2} \cdot \frac{\partial K'}{n\partial t} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial L'}{n\partial t} - \frac{9}{\xi^2} \cdot \frac{\partial\partial K}{n^2\partial t^2} + \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{\partial\partial L}{n^2\partial t^2} \right\}. \end{array} \right.$$

Si on ajoute ensemble les quantités (1) (2) (3), l'équation VI prendra la forme,

XXIX. $U''' = Y' a \sin \psi - Y a \cos \psi$,

et l'on trouvera

$$Y = \left(\frac{6}{\xi^2} P^{v} - \frac{2}{\xi} Q^{v} + \frac{I}{4\xi a} + \frac{1}{2a} M^{(5)} - \frac{9}{8a} B^{(5)} + 2\xi C^{v}\right) \mathfrak{f}$$

$$- \left(\frac{6}{\xi^2} P^{IV} - \frac{2}{\xi} Q^{IV} + \frac{II}{4\xi a} + \frac{1}{2a} N^{(5)} + 2\xi C^{IV}\right) \mathfrak{g}$$

$$+ \left(\frac{6}{\xi^2} P^{III} - \frac{2}{\xi} Q^{III} + \frac{III}{4\xi a} + 2\xi C^{III}\right) \mathfrak{h} - \left(\frac{6}{\xi^2} P^{II} - \frac{2}{\xi} Q^{II} + 2\xi C^{II}\right) \mathfrak{k}$$

$$- \left(\frac{6}{\xi^2} \mathfrak{P}^{IV} - \frac{2}{\xi} \mathfrak{Q}^{IV} + \frac{IV}{4\xi a} + 2\xi C^{I}\right) \mathfrak{l} + \left(\frac{6}{\xi^2} \mathfrak{P}^{III} - \frac{2}{\xi} \mathfrak{Q}^{III} + 2\xi C^{0}\right) \mathfrak{m}$$

$$- \frac{2}{\xi^2} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{6}{\xi} P^{v} - Q^{v}\right) \frac{\partial \mathfrak{f}'}{n \partial t} - \left(\frac{6}{\xi} P^{IV} - Q^{IV}\right) \frac{\partial \mathfrak{g}'}{n \partial t} + \left(\frac{6}{\xi} P^{III} - Q^{III}\right) \frac{\partial \mathfrak{h}'}{n \partial t} - \left(\frac{6}{\xi} P^{II} - Q^{II}\right) \frac{\partial \mathfrak{k}'}{n \partial t} \\ - \left(\frac{6}{\xi} \mathfrak{P}^{v} - \mathfrak{Q}^{IV}\right) \frac{\partial \mathfrak{l}'}{n \partial t} + \left(\frac{6}{\xi} \mathfrak{P}^{III} - \mathfrak{Q}^{III}\right) \frac{\partial \mathfrak{m}'}{n \partial t} \end{array} \right\}$$

$$- \frac{2}{\xi^2} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{9}{\xi} P^{v} - Q^{v}\right) \frac{\partial \partial \mathfrak{f}}{n^2 \partial t^2} - \left(\frac{9}{\xi} P^{IV} - Q^{IV}\right) \frac{\partial \partial \mathfrak{g}}{n^2 \partial t^2} + \left(\frac{9}{\xi} P^{III} - Q^{III}\right) \frac{\partial \partial \mathfrak{h}}{n^2 \partial t^2} - \left(\frac{9}{\xi} P^{II} - Q^{II}\right) \frac{\partial \partial \mathfrak{k}}{n^2 \partial t^2} \\ - \left(\frac{9}{\xi} \mathfrak{P}^{IV} - \mathfrak{Q}^{IV}\right) \frac{\partial \partial \mathfrak{l}}{n^2 \partial t^2} + \left(\frac{9}{\xi} \mathfrak{P}^{III} - \mathfrak{Q}^{III}\right) \frac{\partial \partial \mathfrak{m}}{n^2 \partial t^2} \end{array} \right\};$$

Y' étant ce que devient Y, si l'on change $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, etc. en $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{g}'$, etc. $\partial \mathfrak{f}'$, etc. en $-\partial \mathfrak{f}$, etc. et $\partial \partial \mathfrak{f}$, etc. en $\partial \partial \mathfrak{f}'$, etc. Snpposons maintenant

$$a Y = D^{v} \mathfrak{f} - D^{IV} \mathfrak{g} + D^{III} \mathfrak{h} - D^{II} \mathfrak{k} - D^{I} \mathfrak{l} + D^{0} \mathfrak{m}$$

$$- d^{v}. \frac{\partial \mathfrak{f}'}{n \partial t} + d^{IV}. \frac{\partial \mathfrak{g}'}{n \partial t} - d^{III}. \frac{\partial \mathfrak{h}'}{n \partial t} + d^{II}. \frac{\partial \mathfrak{k}'}{n \partial t} + d^{I}. \frac{\partial \mathfrak{l}'}{n \partial t} - d^{0}. \frac{\partial \mathfrak{m}'}{n \partial t}$$

$$- \delta^{v}. \frac{\partial \partial \mathfrak{f}}{n^2 \partial t^2} + \delta^{IV}. \frac{\partial \partial \mathfrak{g}}{n^2 \partial t^2} - \delta^{III}. \frac{\partial \partial \mathfrak{h}}{n^2 \partial t^2} + \delta^{II}. \frac{\partial \partial \mathfrak{k}}{n^2 \partial t^2} + \delta^{I}. \frac{\partial \partial \mathfrak{l}}{n^2 \partial t^2} - \delta^{0}. \frac{\partial \partial \mathfrak{m}}{n^2 \partial t^2},$$

et substituons les valeurs précédentes de P^{v}, Q^{v}, C^{v}, etc. $B^{(5)}$, $M^{(5)}$, $N^{(5)}$. Cela posé on aura

$$D^{v} = 262877.aA^{(5)} + 118653.a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 15915.a^3 \frac{\partial \partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 608.a^4 \frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3} - 3a^5 \frac{\partial^4 A^{(5)}}{\partial a^4},$$

$$D^{IV} = 820949.aA^{(4)} + 376061.a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 49654.a^3 \frac{\partial \partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 1813.a^4 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3} - 9a^5 \frac{\partial^4 A^{(4)}}{\partial a^4},$$

$$D^{III} = 832491.aA^{(3)} + 394152.a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 51567.a^3 \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 1802.a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} - 9a^5 \frac{\partial^4 A^{(3)}}{\partial a^4},$$

$$D^{II} = 268235.aA^{(2)} + 137774\, a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 17829.a^3 \frac{\partial \partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 597.a^4 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3} - 3a^5 \frac{\partial^4 A^{(2)}}{\partial a^4},$$

$$D^{I} = 14546.a^2 \alpha\, \mathfrak{A}^{(4)} + 2003.a^3 \alpha' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a} - 9 a^4 \alpha\, \frac{\partial \partial A^{(4)}}{\partial a^2},$$

$$D^{\circ} = 20594 . a^2 a' \mathfrak{A}^{(3)} + 1957 . a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a} - 9 a^4 a' \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2};$$

$$\frac{d^{v}}{1000} = 38909 . a A^{(5)} + 17689 . a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 2406 . a^3 \frac{\partial \partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 96 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3} - 0{,}2 . a^5 \frac{\partial^4 A^{(5)}}{\partial a^4},$$

$$\frac{d^{iv}}{1000} = 121642 . a A^{(4)} + 56520 . a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 7518 . a^3 \frac{\partial \partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 288 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3} - 0{,}7 . a^5 \frac{\partial^4 A^{(4)}}{\partial a^4},$$

$$\frac{d^{iii}}{1000} = 123484 . a A^{(3)} + 58875 . a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 7818 . a^3 \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 287 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} - 0{,}7 . a^5 \frac{\partial^4 A^{(3)}}{\partial a^4},$$

$$\frac{d^{ii}}{1000} = 39830 . a A^{(2)} + 20445 . a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 2706 . a^3 \frac{\partial \partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 96 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3} - 0{,}2 . a^5 \frac{\partial^4 A^{(2)}}{\partial a^4},$$

$$\frac{d^{i}}{1000} = 2145 . a^2 a' \mathfrak{A}^{(4)} + 301 . a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a} - 0{,}7 . a^4 a' \frac{\partial \partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a^2},$$

$$\frac{d^{\circ}}{1000} = 3065 . a^2 a' \mathfrak{A}^{(3)} + 299 . a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a} - 0{,}7 . a^4 a' \frac{\partial \partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a^2};$$

$$\frac{\delta^{v}}{1000000} = 4334 . a A^{(5)} + 1975\, a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 270 . a^3 \frac{\partial \partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 11 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3} - 0{,}02 . a^5 \frac{\partial^4 A^{(5)}}{\partial a^4},$$

$$\frac{\delta^{iv}}{1000000} = 13550 . a A^{(4)} + 6267 . a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 843 . a^3 \frac{\partial \partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 33 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3} - 0{,}05 . a^5 \frac{\partial^4 A^{(4)}}{\partial a^4},$$

$$\frac{\delta^{iii}}{1000000} = 13756 . a A^{(3)} + 6574 . a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 877 . a^3 \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 33 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} - 0{,}05 . a^5 \frac{\partial^4 A^{(3)}}{\partial a^4},$$

$$\frac{\delta^{ii}}{1000000} = 4437 . a A^{(2)} + 2283 . a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 304 . a^3 \frac{\partial \partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 11 . a^4 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3} - 0{,}02 . a^5 \frac{\partial^4 A^{(2)}}{\partial a^4},$$

$$\frac{\delta^{i}}{1000000} = 239 . a^2 a' \mathfrak{A}^{(4)} + 34 . a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a} - 0{,}05 . a^4 a' \frac{\partial \partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a^2},$$

$$\frac{\delta^{\circ}}{1000000} = 342 . a^2 a' \mathfrak{A}^{(3)} + 34 . a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a} - 0{,}05 . a^4 a' \frac{\partial \partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a^2}.$$

Les rapports différentiels, $\frac{\partial \mathfrak{f}}{n\, \partial t}$, $\frac{\partial \partial \mathfrak{f}}{n^2\, \partial t^2}$, etc. seront déterminés par la méthode, développée ci-dessus (§. 192.). On calculera les valeurs de γ, γ', ϖ, ϖ', $\delta \sin \Pi = e$, $\delta \cos \Pi = e'$, pour les ans 1800, 2300, et 2800, d'où l'on conclura, pour les mêmes époques, les valeurs de $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{f}'$, etc. (§. 202.), que nous avons désignées par $\mathfrak{f}$, $(\mathfrak{f})$, $[\mathfrak{f}]$, etc. ainsi que

$$\mathfrak{l} = \gamma \delta^2 \sin (\varpi + 2\, \Pi) = (e'^2 - e^2) \gamma \sin \varpi + 2\, e e' \gamma \cos \varpi = \gamma\, (k' \sin \varpi + k \cos \varpi) \text{ (§. 192.)},$$

$$\mathfrak{l}' = (e'^2 - e^2)\, \gamma \cos \varpi - 2\, e e'\, \gamma \sin \varpi = \gamma\, (k' \cos \varpi - k \sin \varpi),$$

$$\mathfrak{m} = \gamma'\, (k' \sin \varpi' + k \cos \varpi'), \quad \mathfrak{m}' = \gamma'\, (k' \cos \varpi' - k \sin \varpi'),$$

ou bien, en faisant $\frac{k}{k'} = \text{tang}\ x$, $\frac{k}{\sin x} = c$,

$f = \gamma c \sin(x+\varpi)$, $f' = \gamma c \cos(x+\varpi)$, $m = \gamma' c \sin(x+\varpi')$, $m' = \gamma' c \cos(x+\varpi')$.

Cela posé on aura (§. 192) $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{4(f) - 3f - [f]}{1000}$, etc. et comme t est le nombre d'années, il faut substituer pour n le moyen mouvement annuel N (§. 194.), qui doit être exprimé de la même manière que f, g, etc. c'est-à-dire en parties du rayon. On aura donc relativement à Jupiter,

$$N = 109256', 4 = 0,5296907;\ N^2 = 0,280572;\ \text{d'où il viendra}$$

$$\frac{\partial f}{n \partial t} = \frac{4(f) - 3f - [f]}{529,691},\quad \frac{\partial \partial f}{n^2 \partial t^2} = \frac{f + [f] - 2(f)}{70143},\ \text{et ainsi du reste.}$$

Les coefficiens $a A^{(i)}$, $a^2 a' \mathfrak{A}^{(i)}$, et leurs rapports différentiels, $a^2 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}$, $a^3 \frac{\partial \partial A^{(i)}}{\partial a^2}$, etc. seront calculés à l'aide des formules (4) (5) (6) (§. 172.), (2) (3) (1) (§ 171.), (8)—(12) (§. 173.); et l'on trouvera P^{v}, P^{iv}, etc. Q^{v}, etc. C^{v}, etc. par les formules (§. 202. 203.). Après avoir calculé toutes ces quantités, on aura l'inégalité du rayon vecteur par l'équation XXVIII, et celle de la longitude par l'équation XXIX, u'' et U'' devant être multipliés par la masse de Saturne m'. En outre il faut multiplier u'' par a, et U'' par $\frac{1}{\sin 1''}$, pour exprimer la correction du rayon vecteur $\delta r = a u''$ en parties de la moyenne distance de la planète m au soleil, et l'inégalité de la longitude en secondes d'un degré (§. 182.).

§. 204. Puisque chaque perturbation dérange le mouvement dans l'ellipse primitive, il est visible que la grande équation de Jupiter et de Saturne doit altérer les élémens de ces deux planètes; d'où il naîtra une nouvelle correction de la longitude et du rayon vecteur. En effet, la première et la seconde équation du second ordre (§. 193. 195.) sont le résultat de l'altération des élémens elliptiques, produite par la grande équation. Pour le prouver, nommons $\delta\gamma$, $\delta\varpi$, les changemens de l'excentricité et des apsides de Jupiter, qui résultent de sa grande équation Æ que nous venons de développer. Comme ils doivent avoir le même argument que l'équation Æ qui les produit, savoir $5 ♄ - 2 ♃ = \psi$, supposons

$$\delta\gamma = P \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} \psi,\qquad \delta\varpi = Q \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} \psi.$$

L'équation elliptique (§. 169. (e))

$$\Delta v = 2\gamma \sin(\mu - \varpi) + \frac{5}{4}\gamma^2 \sin 2(\mu - \varpi) + \text{cet.}$$

étant fonction de γ et ϖ, elle sera nécessairement altérée par les variations $\delta\gamma$, $\delta\varpi$; ce qui se manifestera principalement dans le premier terme de Δv. En différentiant donc $\Delta v = 2\gamma \sin(\mu - \varpi)$ par rapport à γ et ϖ, on trouvera la correction de la longitude,

$$\delta . \Delta v = 2\delta\gamma \sin(♃ - \varpi) - 2\gamma . \delta\varpi \cos(♃ - \varpi) =$$

$$2P \frac{\sin}{\cos} \psi . \sin(♃ - \varpi) - 2Q\gamma \frac{\sin}{\cos} \psi . \cos(♃ - \varpi),$$

d'où il résultera un terme de la forme

$$\delta . \Delta v = p \frac{\sin}{\cos} (\psi - ♃ + \varpi) = p \frac{\sin}{\cos} (5♄ - 3♃ + \varpi).$$

Comme cette correction a le même argument $5♄ - 3♃ = \Phi$, que l'équation XIX (§. 193.) ou α, il est visible que α est due à l'influence de l'équation Æ sur les élémens γ, ϖ, et que, par conséquent, elle peut servir à déterminer les variations $\delta\gamma$, $\delta\varpi$, dont elle est l'effet. Pour cela il faut supposer $\alpha = \delta . \Delta v$. Or on a, en négligeant les termes inconsidérables (XIX. §. 193.),

$$\alpha = \frac{2\partial u''}{n\partial t}, \text{ et } \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\lambda = -n, \text{ donc}$$

$$\alpha = -\frac{\sin\Phi}{\xi}(\text{I}.f' - \text{II}.g' + \text{III}.h' - \text{IV}.k') + \frac{\cos\Phi}{\xi}(\text{I}.f - \text{II}.g + \text{III}.h - \text{IV}.k),$$

d'où l'on tire, à cause de $\Phi = \psi - ♃$,

$$\alpha = \frac{\sin ♃}{\xi}\left\{\begin{matrix}\text{I}.\gamma^2\cos(\psi - 2\varpi) - \text{II}.\gamma\gamma'\cos(\psi - \varpi - \varpi') \\ + \text{III}.\gamma'^2\cos(\psi - 2\varpi') - \text{IV}.\delta^2\cos(\psi - 2\Pi)\end{matrix}\right\}$$

$$- \frac{\cos ♃}{\xi}\left\{\begin{matrix}\text{I}.\gamma^2\sin(\psi - 2\varpi) - \text{II}.\gamma\gamma'\sin(\psi - \varpi - \varpi') \\ + \text{III}.\gamma'^2\sin(\psi - 2\varpi') - \text{IV}.\delta^2\sin(\psi - 2\Pi)\end{matrix}\right\}.$$

Maintenant il faut donner à $\delta . \Delta v$ une forme analogue, savoir

$$\delta . \Delta v = 2(\delta\gamma\cos\varpi - \gamma.\delta\varpi\sin\varpi)\sin ♃ - 2(\delta\gamma\sin\psi + \gamma.\delta\varpi\cos\varpi)\cos ♃.$$

En égalant séparément les coefficiens de $\sin ♃$ et de $\cos ♃$, dans α et $\delta . \Delta v$, on aura

$$\delta\gamma\cos\varpi - \gamma.\delta\varpi\sin\varpi = \frac{1}{2\xi}\left\{\begin{matrix}\text{I}.\gamma^2\cos(\psi - 2\varpi) - \text{II}.\gamma\gamma'\cos(\psi - \varpi - \varpi') \\ + \text{III}.\gamma'^2\cos(\psi - 2\varpi') - \text{IV}.\delta^2\cos(\psi - 2\Pi)\end{matrix}\right\},$$

$$\delta\gamma\sin\psi+\gamma.\delta\varpi\cos\varpi=\frac{1}{2\xi}\left\{\begin{array}{l}\text{I}.\,\gamma^2\sin(\psi-2\varpi)-\text{II}.\,\gamma\gamma'\sin(\psi-\varpi-\varpi')\\+\text{III}.\,\gamma'^2\sin(\psi-2\varpi)-\text{IV}.\,\delta^2\sin(\psi-2\Pi)\end{array}\right\};$$

d'où il est facile de conclure,

$$\delta\gamma=\frac{1}{2\xi}\left\{\begin{array}{l}\text{I}.\,\gamma^2\cos(\psi-3\varpi)-\text{II}.\,\gamma\gamma'\cos(\psi-2\varpi-\varpi')\\+\text{III}.\,\gamma'^2\cos(\psi-\varpi-2\varpi')-\text{IV}.\,\delta^2\cos(\psi-\varpi-2\Pi)\end{array}\right\},$$

$$\gamma.\delta\varpi=\frac{1}{2\xi}\left\{\begin{array}{l}\text{I}.\,\gamma^2\sin(\psi-3\varpi)-\text{II}.\,\gamma\gamma'\sin(\psi-2\varpi-\varpi')\\+\text{III}.\,\gamma'^2\sin(\psi-\varpi-2\varpi')-\text{IV}.\,\delta^2\sin(\psi-\varpi-2\Pi)\end{array}\right\}.$$

L'effet de l'équation Æ sur le premier terme de Δv nous a servi à déterminer $\delta\gamma$ et $\delta\varpi$. Connaissant maintenant ces variations, nous allons déterminer par leur moyen, l'action de Æ sur le second terme de Δv, qui donnera une nouvelle inégalité de la troisième dimension des excentricités. La différentiation du second terme de Δv donnera

$$\delta.\Delta v=\frac{5}{2}\gamma\{\delta\gamma\sin 2(\text{♃}-\varpi)-\gamma.\delta\varpi\cos 2(\text{♃}-\varpi)\}.$$

En y substituant les valeurs précédentes de $\delta\gamma$ et $\gamma.\delta\varpi$, on aura

$$\text{XXX}.\,\delta.\Delta v=\frac{5\gamma}{4\xi}\left\{\begin{array}{l}\text{I}.\,\gamma^2\sin(4\text{♃}-5\text{♄}+\varpi)-\text{II}.\,\gamma\gamma'\sin(4\text{♃}-5\text{♄}+\varpi')\\+\text{III}.\,\gamma'^2\sin(4\text{♃}-5\text{♄}-\varpi+2\varpi')-\text{IV}.\,\delta^2\sin(4\text{♃}-5\text{♄}-\varpi+2\Pi)\end{array}\right\}.$$

Le même procédé donnera une nouvelle inégalité de Saturne. L'équation XXI. (§. 195.), dont l'argument est $\phi=4\text{♄}-2\text{♃}=\psi-\text{♄}$, deviendra

$$\alpha'=\frac{2\sin(\psi-\text{♄})}{5\xi}(\text{V}.f'-\text{VI}.g'+\text{VII}.h'-\text{VIII}.k')$$

$$-\frac{2\cos(\psi-\text{♄})}{5\xi}(\text{V}.f-\text{VI}.g+\text{VII}.h-\text{VIII}.k)=$$

$$-\frac{2\sin\text{♄}}{5\xi}\left\{\begin{array}{l}\text{V}.\,\gamma^2\cos(\psi-2\varpi)-\text{VI}.\,\gamma\gamma'\cos(\psi-\varpi-\varpi')\\+\text{VII}.\,\gamma'^2\cos(\psi-2\varpi')-\text{VIII}.\,\delta^2\cos(\psi-2\Pi)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{2\cos\text{♄}}{5\xi}\left\{\begin{array}{l}\text{V}.\,\gamma^2\sin(\psi-2\varpi)-\text{VI}.\,\gamma\gamma'\sin(\psi-\varpi-\varpi')\\+\text{VII}.\,\gamma'^2\sin(\psi-2\varpi')-\text{VIII}.\,\delta^2\sin(\psi-2\Pi)\end{array}\right\}.$$

Le premier terme de l'équation elliptique de Saturne donne, comme-ci-dessus, $\delta.\Delta v=2(\delta\gamma\cos\varpi-\gamma.\delta\varpi\sin\varpi)\sin\text{♄}-2(\delta\gamma\sin\varpi+\gamma.\delta\varpi\cos\varpi)\cos\text{♄}$, d'où l'on tirera de la même manière,

$$\delta\gamma=-\frac{1}{5\xi}\left\{\begin{array}{l}\text{V}.\,\gamma^2\cos(\psi-3\varpi)-\text{VI}.\,\gamma\gamma'\cos(\psi-2\varpi-\varpi')\\+\text{VII}.\,\gamma'^2\cos(\psi-\varpi-2\varpi')-\text{VIII}.\,\delta^2\cos(\psi-\varpi-2\Pi)\end{array}\right\},$$

$$\gamma\delta\varpi = -\frac{1}{6\xi}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{V}.\gamma^2\sin(\psi-3\varpi)-\mathrm{VI}.\gamma\gamma'\sin(\psi-2\varpi-\varpi')\\ +\mathrm{VII}.\gamma'^2\sin(\psi-\varpi-2\varpi')-\mathrm{VIII}.\delta^2\sin(\psi-\varpi-2\Pi)\end{array}\right\}.$$

En substituant ces valeurs dans le second terme de

$$\delta.\Delta v = \tfrac{5}{2}\gamma\,\{\delta\gamma\sin 2(♄-\varpi)-\gamma.\delta\varpi\cos 2(♄-\varpi)\},$$

on trouvera, à cause de $\psi = 5♄ - 2♃$,

$$\mathrm{XXXI}.\delta.\Delta v = -\frac{\gamma}{2\xi}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{V}.\gamma^2\sin(2♃-3♄+\varpi)-\mathrm{VI}.\gamma\gamma'\sin(2♃-3♄+\varpi')\\ +\mathrm{VII}.\gamma'^2\sin(2♃-3♄-\varpi+2\varpi')\\ -\mathrm{VIII}.\delta^2.\sin(2♃-3♄-\varpi+2\Pi)\end{array}\right\},$$

les lettres sans trait se rapportant à Saturne, et celles marquées d'un trait à Jupiter.

On pourrait trouver de la même manière une inégalité analogue du rayon vecteur; mais elle est inconsidérable. Le second terme de l'équation elliptique du rayon vecteur de Jupiter est $\Delta r = -\frac{a}{2}\gamma^2\cos 2(♃-\varpi)$ (§. 169. (*e*)); sa différentielle est $-a\gamma\,\{\delta\gamma\cos 2(♃-\varpi)+\gamma.\delta\varpi\sin 2(♃-\varpi)\}$, où il s'agit seulement de substituer les valeurs précédentes de $\delta\gamma$ et $\gamma.\delta\varpi$.

§. 205. La série Δv qui donne l'équation du centre (§. 169. (*g*)), et qui est la base des tables astronomiques, a pour argument la longitude moyenne μ, ou plutôt la longitude qui n'est pas corrigée par l'équation du centre, ou par la théorie elliptique; ce qui suppose que la planète n'est pas assujetie à d'autres inégalités qu'aux lois de Kepler. Il est donc visible qu'à la rigueur, l'argument de l'équation du centre devrait être la longitude moyenne, corrigée par toutes les perturbations. Mais il est aisé de voir que cela ne se rapporte qu'aux plus grandes perturbations, qui peuvent altérer l'argument de l'équation du centre assés, pour changer sensiblement l'équation même qui dépend de cet argument. On voit en même tems, que cette correction de l'équation elliptique doit être d'un ordre supérieur à celle dont elle est l'effet, parcequ'elle se rapporte à celle-là, comme l'équation du centre, qui est de l'ordre de l'excentricité, se rapporte à son argument, ou à la longitude moyenne qui est indépendante de l'excentricité. Il serait donc inutile de chercher de pareilles inégalités dans un ordre plus élevé que le premier; et l'on conçoit qu'il est plus commode, de former une nouvelle équation, que de corriger l'argument de l'équation elliptique. Ce n'est

que parmi les perturbations de Saturne, dues à l'action de Jupiter, qu'on trouvera une inégalité assés grande, pour avoir cet effet. Elle est, ainsi que nous l'avons supposé, de la première dimension des excentricités, et a pour argument l'angle $2\text{♄} - \text{♃} = 2\mu - \mu$. Or l'argument général des inégalités du premier ordre étant $i\mu' - (i-1)\mu$ (§. 183. XIII.), il en résulte $i = -1$. Cette inégalité sera donc

$$m'U' = -m'\mathfrak{M}^{(-1)}\gamma \sin(2\text{♄} - \text{♃} - \varpi) + m'\mathfrak{N}^{(-1)}\gamma' \sin(2\text{♄} - \text{♃} - \varpi'),$$

les lettres marquées d'un trait se rapportant à Jupiter. D'après ce qui précède, il faut envisager cette inégalité comme une correction de la longitude moyenne, ensorte que $m'U' = \delta\mu = \delta\text{♄}$. En faisant donc varier le premier terme de l'équation du centre, $\Delta v = 2\gamma \sin(\text{♄} - \varpi)$, on aura

$$\delta \,.\, \Delta v = 2\gamma \,.\, \delta\text{♄} \cos(\text{♄} - \varpi) = 2\gamma \,.\, m'U' \cos(\text{♄} - \varpi) =$$

$$-m\gamma \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{M}^{(-1)}\gamma\,[\sin(3\text{♄} - \text{♃} - 2\varpi) + \sin(\text{♄} - \varpi)] \\ -\mathfrak{N}^{(-1)}\gamma'\,[\sin(3\text{♄} - \text{♃} - \varpi - \varpi') + \sin(\text{♄} - \text{♃} + \varpi - \varpi')] \end{matrix} \right\}.$$

Le premier et le troisième terme sont déjà renfermés dans la quatrième équation (§ 197.) qui a le même argument $3\text{♄} - \text{♃} = \omega'$. On aura donc cette nouvelle équation du second ordre des excentricités,

$$\text{XXXII. } U'' = \mathfrak{M}^{(-1)}\gamma^2 \sin(\text{♃} - \text{♄}) + \mathfrak{N}^{(-1)}\gamma\gamma' \sin(\text{♄} - \text{♃} + \varpi - \varpi'),$$

qui doit être multipliée par la masse de Jupiter et par $\frac{1}{\sin 1''}$.

La grande équation Æ fournirait une semblable équation du quatrième ordre, parceque Æ est du troisième. Mais on n'a pas besoin de former une nouvelle équation, si l'on corrige d'abord les longitudes moyennes de Jupiter et de Saturne par l'équation Æ, et qu'on emploie cette longitude corrigée comme l'argument de l'équation du centre, ainsi que cela se pratique actuellement dans les tables astronomiques.

§. 206. On trouvera la grande inégalité de Saturne, par le même procédé qui a servi à déterminer celle de Jupiter (§. 201. 202. 203.); on peut même employer une partie des valeurs numériques, calculées précédemment. Nous observerons d'abord, que la fonction Q (§. 168.) n'éprouve aucun changement, si on met r', v', à la place de r, v, et réciproquement, et que par conséquent, la fonction S (§. 168. (c)) a la même valeur, soit qu'on considère les

perturbations de la planète m par m', ou de m' par m; attendu que la fonction P (§. 168.), ou les coefficiens $A^{(1)}$, $\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}$, etc. n'entrent pas dans les formules de la grande inégalité. Il faut encore observer que (§. 168. (A), §. 175. (H) (I))

$$\frac{R}{m'} = S + \delta^2 S', \quad \frac{r'}{m'}\left(\frac{\partial R}{\partial r'}\right) = r'\left(\frac{\partial S}{\partial r'}\right) + \delta^2 r'\left(\frac{\partial S'}{\partial r'}\right),$$

$$r'\left(\frac{\partial S}{\partial r'}\right) = -S - r\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right), \quad r'\left(\frac{\partial S'}{\partial r'}\right) = -3S' - r\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right).$$

En désignant donc par $(\partial' R)$ la différentielle de R, relative aux élémens de Saturne, et faisant, pour abréger (§. 201.),

$$K - 2\mathfrak{P}^{(IV)}\mathfrak{l} + 2\mathfrak{P}^{(II)}\mathfrak{m} + L = M, \quad K' - 2\mathfrak{P}^{(IV)}\mathfrak{l}' + 2\mathfrak{P}^{(II)}\mathfrak{m}' + L' = M',$$

on aura par les formules (5) (6) (7) (§. 201.),

$$(1) \ldots\ldots \frac{a'}{m'}\, r'\left(\frac{\partial R}{\partial r'}\right) = a' M \sin\psi + a' M' \cos\psi,$$

$$\frac{1}{m'}(\partial' R) = 5n'\partial t\,(K'\sin\psi - K\cos\psi) = -\frac{5n'}{2nm'}(\partial R).$$

Il en suit $\int(\partial' R) = -\frac{5n'}{2n}\int(\partial R)$, $\quad \int\partial t\int(\partial' R) = -\frac{5n'}{2n}\int\partial t\int(\partial R)$,

et à cause de $\partial\psi = (5n' - 2n)\partial t = \xi n \partial t$, par la formule (B) (§. 191.)

$$(2) \ldots\ldots \frac{2n'}{m'}\, a'\int r'\left(\frac{\partial R}{\partial r'}\right)\partial t = \frac{2\lambda}{\xi}\, a'\sin\psi\left\{M' + \frac{1}{\xi}\left(\frac{\partial M}{n\,\partial t}\right) - \frac{1}{\xi^2}\left(\frac{\partial\partial M'}{n^2\,\partial t^2}\right)\right\}$$
$$- \frac{2\lambda}{\xi}\, a'\cos\psi\left\{M - \frac{1}{\xi}\left(\frac{\partial M'}{n\,\partial t}\right) - \frac{1}{\xi^2}\left(\frac{\partial\partial M}{n^2\,\partial t^2}\right)\right\},$$

λ étant $= \frac{n'}{n} = 0,402693$. Les formules (8) (10) (§. 201.) donneront

$$(3) \ldots\ldots \frac{2a'}{m'}\int(\partial' R) = -\frac{10\lambda}{\xi}\, a' \left\{\begin{array}{l} \sin\psi\left[K - \frac{1}{\xi}\left(\frac{\partial K'}{n\,\partial t}\right) - \frac{1}{\xi^2}\left(\frac{\partial\partial K}{n^2\,\partial t^2}\right)\right] \\ +\cos\psi\left[K' + \frac{1}{\xi}\left(\frac{\partial K}{n\,\partial t}\right) - \frac{1}{\xi^2}\left(\frac{\partial\partial K'}{n^2\,\partial t^2}\right)\right] \end{array}\right\},$$

$$(4) \ldots\ldots \frac{3n'a'}{m'}\int\partial t\int(\partial' R) = \frac{15\lambda^2}{\xi^2}\, a' \left\{\begin{array}{l} \cos\psi\left[K - \frac{2}{\xi}\left(\frac{\partial K'}{n\,\partial t}\right) - \frac{3}{\xi^2}\left(\frac{\partial\partial K}{n^2\,\partial t^2}\right)\right] \\ -\sin\psi\left[K' + \frac{2}{\xi}\left(\frac{\partial K}{n\,\partial t}\right) - \frac{3}{\xi^2}\left(\frac{\partial\partial K'}{n^2\,\partial t^2}\right)\right] \end{array}\right\}.$$

Faisons encore pour abréger (§. 201.),

$$\frac{53}{8}\, u\gamma'^3\cos 3(\mu' - \varpi') + \frac{9}{4}\,\frac{\partial u}{n'\partial t}\,\gamma'^3\sin 3(\mu' - \varpi') - \frac{3}{8}\cdot\frac{\partial\partial u}{n'^2\,\partial t^2}\,\gamma'^3\cos 3(\mu' - \varpi') = T,$$

$$\frac{9}{4}\, u'\gamma'^2\cos 2(\mu' - \varpi') + \frac{2\,\partial u'}{n'\,\partial t}\,\gamma'^2\sin 2(\mu' - \varpi') - \frac{\partial\partial u'}{2n'^2\,\partial t^2}\,\gamma'^2\cos 2(\mu' - \varpi') = T',$$

$$3u'\gamma'\cos(\mu'-\varpi')+\frac{2\partial u''}{n'\partial t}\gamma'\sin(\mu'-\varpi')-\frac{\partial\partial u''}{n'^2\partial t^2}\gamma'\cos(\mu'-\varpi')=\mathrm{T}'',$$

$$\frac{9}{8}u\gamma'^3\sin 3(\mu'-\varpi')-\frac{3}{4}\cdot\frac{\partial u}{n'\partial t}\gamma'^3\cos 3(\mu'-\varpi')=\mathfrak{T},$$

$$u'\gamma'^2\sin 2(\mu'-\varpi')-\frac{\partial u'}{n'\partial t}\gamma'^2\cos 2(\mu'-\varpi')=\mathfrak{T}',$$

$$u''\gamma'\sin(\mu'-\varpi')-\frac{2\partial u''}{n'\partial t}\gamma'\cos(\mu'-\varpi')=\mathfrak{T}'',$$

$$\mathrm{T}+\mathrm{T}'+\mathrm{T}''=(5),\qquad \mathfrak{T}+\mathfrak{T}'+\mathfrak{T}''=(6).$$

Cela posé les équations IV, VI (§. 201.), prendront la forme,

$$\text{IV. } 0=\frac{\partial\partial u'''}{n'^2\partial t^2}+u'''+(1)+(3)+(5),\quad \text{VI. } \mathrm{U}'''=\frac{2\partial u'''}{n'\partial t}+(2)+(4)+(6);$$

les lettres sans trait se rapportant à Jupiter.

Dans la formation de la grande inégalité il ne faut employer que les combinaisons de u avec $3\mu'$, de u' avec $2\mu'$, et de u'' avec μ', qui produisent l'angle $\psi=5♄-2♃=5\mu'-2\mu$. Pour cet effet il faut faire $i=-2$ dans les fonctions u et u', parceque l'argument de la première est $iw=i(♃-♄)$ (§. 182. 169), et celui de la seconde $i(♃-♄)+♄$ (§. 183.). La valeur de u' est donnée par l'équation XX (§. 195.). On aura donc, en substituant $n=\frac{5}{2}n'$ (§. 182. 183. 195.),

$$\mathrm{T}=\frac{13}{4}\mathrm{B}^{(2)}\gamma'^3\cos(\psi-3\varpi'),\ \mathrm{T}'=-\frac{5}{4}\mathrm{M}^{(-2)}\gamma'^3\cos(\psi-3\varpi')+\frac{5}{4}\mathrm{N}^{(-2)}\gamma'^2\gamma\cos(\psi-2\varpi'-\varpi),$$

$$\mathrm{T}''=\frac{\gamma'}{5\xi}\left\{\begin{matrix}\text{V. }\gamma'^2\cos(\psi-3\varpi')-\text{VI. }\gamma'\gamma\cos(\psi-2\varpi'-\varpi)\\+\text{VII. }\gamma^2\cos(\psi-\varpi'-2\varpi)-\text{VIII. }\delta^2\cos(\psi-\varpi'-2\Pi)\end{matrix}\right\},$$

$$\mathfrak{T}=-\frac{9}{8}\mathrm{B}^{(2)}\gamma'^3\sin(\psi-3\varpi'),\ \mathfrak{T}'=\frac{1}{2}\mathrm{M}^{(-2)}\gamma'^3\sin(\psi-3\varpi')-\frac{1}{2}\mathrm{N}^{(-2)}\gamma'^3\sin(\psi-2\varpi'-\varpi'),$$

$$\mathfrak{T}''=-\frac{1}{10\xi}\left\{\begin{matrix}\text{V. }\gamma'^3\sin(\psi-3\varpi')-\text{VI. }\gamma'^2\gamma\sin(\psi-2\varpi'-\varpi)\\+\text{VII. }\gamma'\gamma^2\sin(\psi-\varpi'-2\varpi)-\text{VIII. }\delta^2\gamma'\sin(\psi-\varpi'-2\Pi)\end{matrix}\right\}.$$

On trouvera (§. 182. 183.)

$$\mathrm{B}^{(2)}=-\frac{a'}{32}\mathrm{A}^{(2)}+\frac{a'^2}{16}\frac{\partial\mathrm{A}^{(2)}}{\partial a'},\quad \mathrm{M}^{(-2)}=\frac{13}{6}a'\mathrm{A}^{(2)}-\frac{9}{8}a'^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(2)}}{\partial a'}+\frac{a'^3}{6}\frac{\partial\partial\mathrm{A}^{(2)}}{\partial a'^2},$$

$$\mathrm{N}^{(-2)}=\frac{5}{2}a'\mathrm{A}^{(3)}-\frac{7}{6}a'^2\frac{\partial\mathrm{A}^{(3)}}{\partial a'}+\frac{a'^3}{6}\frac{\partial\partial\mathrm{A}^{(3)}}{\partial a'^2},$$

ou par les formules (II) (§. 175.),

$$\mathrm{B}^{(2)}=-\frac{7}{48}a'\mathrm{A}^{(2)}-\frac{a\,a'}{16}\frac{\partial\mathrm{A}^{(2)}}{\partial a},\quad \mathrm{M}^{(-2)}=\frac{29}{8}a'\mathrm{A}^{(2)}+\frac{23}{24}aa'\frac{\partial\mathrm{A}^{(2)}}{\partial a}+\frac{a^2a'}{6}\frac{\partial\partial\mathrm{A}^{(2)}}{\partial a^2},$$

$$N^{(-2)} = 4a' A^{(3)} + \frac{11}{6}\, a a' \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + \frac{a^2 a'}{6} \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2}, \text{ et (§. 195.)}$$

$$V = \frac{59}{2} a' A^{(2)} - \frac{111}{8} a'^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a'} + \frac{9}{4} a'^3 \frac{\partial \partial A^{(2)}}{\partial a^2} - \frac{a'^4}{8} \cdot \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3}, \text{ ou par (H) (J) (§. 175.)}$$

$$V = \frac{a'}{8} \left\{ 389 \,.\, A^{(2)} + 201 \,.\, a \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 27 \,.\, a^2 \frac{\partial \partial A^{(2)}}{\partial a^2} + a^3 \,.\, \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3} \right\},$$

$$VI = \frac{a'}{4} \left\{ 402 \,.\, A^{(3)} + 193 \,.\, a \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 26 \,.\, a^2 \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2} + a^3 \,.\, \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} \right\},$$

$$VII = a' \left\{ \frac{99}{2} A^{(4)} + 23 \,.\, a \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + \frac{25}{8} a^2 \frac{\partial \partial A^{(4)}}{\partial a^2} + \frac{a^3}{8} \,.\, \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3} \right\},$$

$$VIII = \frac{a a'^2}{8} \left\{ 10\, \mathfrak{A}^{(3)} + a \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a} \right\}.$$

En substituant $\frac{1}{5\xi} = 14,8527$ et faisant

$(\;) = a' \sin\psi\, (P^{(2)} \mathfrak{f} - P^{(3)} \mathfrak{h} + P^{(4)} \mathfrak{g} - P^{(0)} \mathfrak{m}) + a' \cos\psi\, (P^{(2)} \mathfrak{f}' - P^{(3)} \mathfrak{h}' + P^{(4)} \mathfrak{g}' - P^{(0)} \mathfrak{m}'),$

$(6) = a' \cos\psi\, (\mathfrak{P}^{(2)} \mathfrak{f} - \mathfrak{P}^{(3)} \mathfrak{h} + \mathfrak{P}^{(4)} \mathfrak{g} - \mathfrak{P}^{(0)} \mathfrak{m}) - a' \sin\psi\, (\mathfrak{P}^{(2)} \mathfrak{f}' - \mathfrak{P}^{(3)} \mathfrak{h} + \mathfrak{P}^{(4)} \mathfrak{g}' - \mathfrak{P}^{(0)} \mathfrak{m}');$

on trouvera

$$P^{(2)} = 717,22 \,.\, A^{(2)} + 370,73 \,.\, a \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 49,92 \,.\, a^2 \frac{\partial \partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 1,86 \,.\, a^3 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3},$$

$$P^{(3)} = 1487,7 \,.\, A^{(3)} + 714,36 \,.\, a \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 96,33 \,.\, a^2 \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 3,71 \,.\, a^3 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$P^{(4)} = 735,21 \,.\, A^{(4)} + 341,62 \,.\, a \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 46,41 \,.\, a^2 \frac{\partial \partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 1,86 \,.\, a^3 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3},$$

$$P^{(0)} = 18,57 \,.\, a a' \mathfrak{A}^3 + 1,86 \,.\, a^2 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a};$$

$$\mathfrak{P}^{(2)} = 359,1 \,.\, A^{(2)} + 185,6 \,.\, a \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 25 \,.\, a^2 \frac{\partial \partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 0,93 \,.\, a^3 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3},$$

$$\mathfrak{P}^{(3)} = 744,35 \,.\, A^{(3)} + 357,4 \,.\, a \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 48,2 \,.\, a^2 \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 1,86 \,.\, a^3 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$\mathfrak{P}^{(4)} = 367,6 \,.\, A^{(4)} + 170,8 \,.\, a \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 23,21 \,.\, a^2 \frac{\partial \partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 0,93 \,.\, a^3 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3},$$

$$\mathfrak{P}^{(0)} = 9,28 \,.\, a a' \mathfrak{A}^{(3)} + 0,93 \,.\, a^2 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a}.$$

Si on substitue maintenant les valeurs de K, L (§. 201.), dans les formules (1) (3), et qu'on fasse pour abréger,

$\left(\frac{10\lambda}{\xi} - 1\right) P^{V} - Q^{V} = p^{V}$, $\left(\frac{10\lambda}{\xi} - 1\right) P^{IV} - Q^{IV} + P^{(4)} = p^{IV}$, $\left(\frac{10\lambda}{\xi} - 1\right) P^{III} - Q^{III} + P^{(3)} = p^{III}$,

$\left(\frac{10\lambda}{\xi}-1\right)P^{II}-Q^{II}+P^{(2)}=p^{II}$, $\left(\frac{10\lambda}{\xi}-3\right)\mathfrak{P}^{IV}-\mathfrak{Q}^{IV}=p^{I}$, $\left(\frac{10\lambda}{\xi}-3\right)\mathfrak{P}^{III}-\mathfrak{Q}^{III}+P^{(0)}=p^{0}$,

l'équation IV. deviendra

$$\text{IV.}\quad o=\frac{\partial\partial u'''}{n'^2\partial t^2}+u'''$$

$$-a'\sin\psi\left\{\begin{array}{l}p^{V}\mathfrak{f}-p^{IV}\mathfrak{g}+p^{III}\mathfrak{h}-p^{II}\mathfrak{k}-p^{I}\mathfrak{l}+p^{0}\mathfrak{m}\\ -\frac{10\lambda}{\xi^2}\left(P^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}'}{n\partial t}-P^{IV}\frac{\partial\mathfrak{g}'}{n\partial t}+P^{III}\frac{\partial\mathfrak{h}'}{n\partial t}-P^{II}\frac{\partial\mathfrak{k}'}{n\partial t}-\mathfrak{P}^{IV}\frac{\partial\mathfrak{l}'}{n\partial t}+\mathfrak{P}^{III}\frac{\partial\mathfrak{m}'}{n\partial t}\right)\\ -\frac{10\lambda}{\xi^2}\left(P^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}-P^{IV}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}}{n^2\partial t^2}+P^{III}\frac{\partial\partial\mathfrak{h}}{n^2\partial t^2}-P^{II}\frac{\partial\partial\mathfrak{k}}{n^2\partial t^2}-\mathfrak{P}^{IV}\frac{\partial\partial\mathfrak{l}}{n^2\partial t^2}+\mathfrak{P}^{III}\frac{\partial\partial\mathfrak{m}}{n^2\partial t^2}\right)\end{array}\right\}$$

$$-a'\cos\psi\left\{\begin{array}{l}p^{V}\mathfrak{f}'-p^{IV}\mathfrak{g}'+p^{III}\mathfrak{h}'-p^{II}\mathfrak{k}'-p^{I}\mathfrak{l}'+p^{0}\mathfrak{m}'\\ +\frac{10\lambda}{\xi^2}\left(P^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}}{n\partial t}-P^{IV}\frac{\partial\mathfrak{g}}{n\partial t}+P^{III}\frac{\partial\mathfrak{h}}{n\partial t}-P^{II}\frac{\partial\mathfrak{k}}{n\partial t}-\mathfrak{P}^{IV}\frac{\partial\mathfrak{l}}{n\partial t}+\mathfrak{P}^{III}\frac{\partial\mathfrak{m}}{n\partial t}\right)\\ -\frac{10\lambda}{\xi^2}\left(P^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}'}{n^2\partial t^2}-P^{IV}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}'}{n^2\partial t^2}+P^{III}\frac{\partial\partial\mathfrak{h}'}{n^2\partial t^2}-P^{II}\frac{\partial\partial\mathfrak{k}'}{n^2\partial t^2}-\mathfrak{P}^{IV}\frac{\partial\partial\mathfrak{l}'}{n^2\partial t^2}+\mathfrak{P}^{III}\frac{\partial\partial\mathfrak{m}'}{n^2\partial t^2}\right)\end{array}\right\}.$$

Intégrons cette équation par rapport à $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$, et supposons son intégrale

$$u'''=\left\{E^{V}\mathfrak{f}-e^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}'}{n\partial t}-\varepsilon^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}\right\}a'\sin\psi+\left\{E^{V}\mathfrak{f}'+e^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}}{n\partial t}-\varepsilon^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}'}{n^2\partial t^2}\right\}a'\cos\psi.$$

Si l'on différentie cette valeur de u''', en observant que $\partial\psi=\xi n\partial t=\frac{\xi}{\lambda}n'\partial t$, on aura

$$\frac{\partial u'''}{n'\partial t}=\left\{\frac{\xi}{\lambda}\left(E^{V}\mathfrak{f}-e^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}'}{n\partial t}-\varepsilon^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}\right)+E^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}'}{n'\partial t}+e^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{nn'\partial t^2}\right\}a'\cos\psi$$

$$-\left\{\frac{\xi}{\lambda}\left(E^{V}\mathfrak{f}'+e^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}}{n\partial t}-\varepsilon^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}'}{n^2\partial t^2}\right)-E^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}}{n'\partial t}+e^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}'}{nn'\partial t^2}\right\}a'\sin\psi,$$

$$\frac{\partial\partial u'''}{n'^2\partial t^2}=-a'\sin\psi\left\{\frac{\xi^2}{\lambda^2}\left(E^{V}\mathfrak{f}-e^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}'}{n\partial t}-\varepsilon^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}\right)+\frac{2\xi}{\lambda}\left(E^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}'}{n'\partial t}+e^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{nn'\partial t^2}\right)-E^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n'^2\partial t^2}\right\}-\text{cet.}$$

Si on substitue ces valeurs de u''' et de $\frac{\partial\partial u'''}{n'^2\partial t^2}$ dans les termes de l'équation IV, qui renferment $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$, on trouvera, en mettant $\lambda n\partial t$ au lieu de $n'\partial t$,

$$o=\left(1-\frac{\xi^2}{\lambda^2}\right)E^{V}-p^{V},\quad o=\left(\frac{\xi^2}{\lambda^2}-1\right)e^{V}-\frac{2\xi}{\lambda^2}E^{V}+\frac{10\lambda}{\xi^2}P^{V},$$

$$o=\left(\frac{\xi^2}{\lambda^2}-1\right)\varepsilon^{V}-\frac{2\xi}{\lambda^2}e^{V}+\frac{E^{V}}{\lambda^2}+\frac{10\lambda}{\xi^2}P^{V}.$$

Or on a $\xi=0,013466$, $\lambda=0,402693$; d'où il viendra

$E^{V}=1,00112.p^{V}$, $e^{V}=22233,6.P^{V}-0,1663.E^{V}$, $\varepsilon^{V}=1651147.P^{V}+6,174\,E^{V}-0,166.e^{V}$.

Il en est de même des autres coefficiens E^{IV}, e^{IV}, ε^{IV}, etc. Ainsi on trouvera

$$E^{V} = 2362,2.A^{(5)} + 1070,1.a\frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 144,56.a^2\frac{\partial\partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 5,616.a^3\frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3} - 0,021.a^4\frac{\partial^4 A^{(5)}}{\partial a^4},$$

$$E^{IV} = 8121,1.A^{(4)} + 3737,1.a\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 498,04.a^2\frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 18,756.a^3\frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3} - 0,062.a^4\frac{\partial^4 A^{(4)}}{\partial a^4},$$

$$E^{III} = 8986,1.A^{(3)} + 4177,1.a\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 566,03.a^2\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 20,562.a^3\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} - 0,062.a^4\frac{\partial^4 A^{(3)}}{\partial a^4},$$

$$E^{II} = 3136,2.A^{(2)} + 1602,4.a\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 212,53.a^2\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 7,448.a^3\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3} - 0,021.a^4\frac{\partial^4 A^{(2)}}{\partial a^4},$$

$$E^{I} = 130,13.aa'\mathfrak{A}^{(4)} + 18,09.a^2a'\frac{\partial\mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a} - 0,062.a^3a'\frac{\partial\partial\mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a^2},$$

$$E^{0} = 204,48.aa'\mathfrak{A}^{(3)} + 19,76.a^2a'\frac{\partial\mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a} - 0,062.a^3a'\frac{\partial\partial\mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a^2};$$

$$e^{V} = 175623.A^{(5)} + 80419.a\frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 11093.a^2\frac{\partial\partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 462.a^3\frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3},$$

$$e^{IV} = 547931.A^{(4)} + 255065.a\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 34658.a^2\frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 1386.a^3\frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3},$$

$$e^{III} = 557125.A^{(3)} + 267482.a\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 36036.a^2\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 1386.a^3\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$e^{II} = 179663.A^{(2)} + 92836.a\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 12471.a^2\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 462.a^3\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3},$$

$$e^{I} = 9706.aa'\mathfrak{A}^{(4)} + 1337.a^2a'\frac{\partial\mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a},\quad e^{0} = 13862.aa'\mathfrak{A}^{(3)} + 1386.a^2a'\frac{\partial\mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a};$$

$$\frac{\varepsilon^{V}}{1000} = 13057.A^{(5)} + 5979.a\frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 825.a^2\frac{\partial\partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 34,4.a^3\frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{\varepsilon^{IV}}{1000} = 40825.A^{(4)} + 18969.a\frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 2577.a^2\frac{\partial\partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 103.a^3\frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{\varepsilon^{III}}{1000} = 41448.A^{(3)} + 19899.a\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 2681.a^2\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 103.a^3\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{\varepsilon^{II}}{1000} = 13371.A^{(2)} + 6909.a\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 928.a^2\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 34,4.a^3\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{\varepsilon^{I}}{1000} = 722.aa'\mathfrak{A}^{(4)} + 103.a^2a'\frac{\partial\mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a},\quad \frac{\varepsilon^{0}}{1000} = 1031.aa'\mathfrak{A}^{(3)} + 103.a^2a'\frac{\partial\mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a}.$$

Cela posé, si on fait

$$W = E^{V}\mathfrak{f} - E^{IV}\mathfrak{g} + E^{III}\mathfrak{h} - E^{II}\mathfrak{k} - E^{I}\mathfrak{l} + E^{0}\mathfrak{m}$$

$$- e^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}'}{n\partial t} + e^{IV}\frac{\partial\mathfrak{g}'}{n\partial t} - e^{III}\frac{\partial\mathfrak{h}'}{n\partial t} + e^{II}\frac{\partial\mathfrak{k}'}{n\partial t} + e^{I}\frac{\partial\mathfrak{l}'}{n\partial t} - e^{0}\frac{\partial\mathfrak{m}'}{n\partial t}$$

$$- \varepsilon^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2} + \varepsilon^{IV}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}}{n^2\partial t^2} - \varepsilon^{III}\frac{\partial\partial\mathfrak{h}}{n^2\partial t^2} + \varepsilon^{II}\frac{\partial\partial\mathfrak{k}}{n^2\partial t^2} + \varepsilon^{I}\frac{\partial\partial\mathfrak{l}}{n^2\partial t^2} - \varepsilon^{0}\frac{\partial\partial\mathfrak{m}}{n^2\partial t^2}$$

on aura XXXIII. $u''' = \mathrm{W} a' \sin \psi + \mathrm{W}' a' \cos \psi$,

W' étant ce que devient W, si l'on change $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, etc. en $\mathfrak{f}'$, etc. $\partial \mathfrak{f}'$, en $-\partial \mathfrak{f}$, et $\partial\partial \mathfrak{f}$ en $\partial\partial \mathfrak{f}'$, etc.

§. 207. La valeur précédente de u''' donne, en négligeant les termes inconsidérables,

$$\frac{2\partial u'''}{n'\partial t} = \frac{2\xi}{\lambda} a' \cos\psi (\mathrm{E}^{\mathrm{V}}\mathfrak{f} - \mathrm{E}^{\mathrm{IV}}\mathfrak{g} + \mathrm{E}^{\mathrm{III}}\mathfrak{h} - \mathrm{E}^{\mathrm{II}}\mathfrak{k} - \mathrm{E}^{\mathrm{I}}\mathfrak{l} + \mathrm{E}^{0}\mathfrak{m}) - \frac{2\xi}{\lambda} a' \sin\psi (\mathrm{E}^{\mathrm{V}}\mathfrak{f}' - \mathrm{E}^{\mathrm{IV}}\mathfrak{g}' + \text{cet.}).$$

En ajoutant cela avec (2) + (4) + (6) (§. 206.), et faisant

$$\mathrm{Z} = \mathrm{F}^{\mathrm{V}}\mathfrak{f} - \mathrm{F}^{\mathrm{IV}}\mathfrak{g} + \mathrm{F}^{\mathrm{III}}\mathfrak{h} - \mathrm{F}^{\mathrm{II}}\mathfrak{k} - \mathrm{F}^{\mathrm{I}}\mathfrak{l} + \mathrm{F}^{0}\mathfrak{m} - f^{\mathrm{V}}\frac{\partial \mathfrak{f}'}{n\partial t} + f^{\mathrm{IV}}\frac{\partial \mathfrak{g}'}{n\partial t} - f^{\mathrm{III}}\frac{\partial \mathfrak{h}'}{n\partial t} + f^{\mathrm{II}}\frac{\partial \mathfrak{k}'}{n\partial t} + f^{\mathrm{I}}\frac{\partial \mathfrak{l}'}{n\partial t}$$
$$- f^{0}\frac{\partial \mathfrak{m}'}{n\partial t} - \Phi^{\mathrm{V}}\frac{\partial\partial \mathfrak{f}}{n^2\partial t^2} + \Phi^{\mathrm{IV}}\frac{\partial\partial \mathfrak{g}}{n^2\partial t^2} - \Phi^{\mathrm{III}}\frac{\partial\partial \mathfrak{h}}{n^2\partial t^2} + \Phi^{\mathrm{II}}\frac{\partial\partial \mathfrak{k}}{n^2\partial t^2} + \Phi^{\mathrm{I}}\frac{\partial\partial \mathfrak{l}}{n^2\partial t^2} - \Phi^{0}\frac{\partial\partial \mathfrak{m}}{n^2\partial t^2},$$

on aura XXXIV. $\mathrm{U}''' = \mathrm{Z} a' \cos \psi - \mathrm{Z}' a' \sin \psi$,

Z' étant ce que devient Z par la permutation précédente. Or les valeurs de (2) (4) (6) et $\frac{2\partial u'''}{n'\partial t}$ donnent

$$\mathrm{F}^{\mathrm{II}} = \frac{15\lambda^2}{\xi^2}\mathrm{P}^{\mathrm{II}} - \frac{2\lambda}{\xi}(\mathrm{P}^{\mathrm{II}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{II}}) + \frac{2\xi}{\lambda}\mathrm{E}^{\mathrm{II}} - \mathfrak{P}^{(2)},$$

$$f^{\mathrm{II}} = \frac{30\lambda^2}{\xi^2}\mathrm{P}^{\mathrm{II}} - \frac{2\lambda}{\xi^2}(\mathrm{P}^{\mathrm{II}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{II}}), \quad \Phi^{\mathrm{II}} = \frac{45\lambda^2}{\xi^4}\mathrm{P}^{\mathrm{II}} - \frac{2\lambda}{\xi^2}(\mathrm{P}^{\mathrm{II}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{II}}),$$

et ainsi du reste. En substituant donc les valeurs précédentes de P^{II}, Q^{II}, etc. (§ 201.), de E^{II}, $\mathfrak{P}^{\mathrm{II}}$, etc. (§. 206), et $\xi = 0{,}013466$, $\lambda = 0{,}402693$; on trouvera

$$\mathrm{F}^{\mathrm{V}} = 105887.\mathrm{A}^{(5)} + 47794.a\frac{\partial \mathrm{A}^{(5)}}{\partial a} + 6411.a^2\frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(5)}}{\partial a^2} + 245.a^3\frac{\partial^3 \mathrm{A}^{(5)}}{\partial a^3} - \frac{5}{4}a^4\frac{\partial^4 \mathrm{A}^{(5)}}{\partial a^4},$$

$$\mathrm{F}^{\mathrm{IV}} = 330718.\mathrm{A}^{(4)} + 151497.a\frac{\partial \mathrm{A}^{(4)}}{\partial a} + 20002.a^2\frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(4)}}{\partial a^2} + 730.a^3\frac{\partial^3 \mathrm{A}^{(4)}}{\partial a^3} - \frac{15}{4}a^4\frac{\partial^4 \mathrm{A}^{(4)}}{\partial a^4},$$

$$\mathrm{F}^{\mathrm{III}} = 335412.\mathrm{A}^{(3)} + 158803.a\frac{\partial \mathrm{A}^{(3)}}{\partial a} + 20785.a^2\frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(3)}}{\partial a^2} + 726.a^3\frac{\partial^3 \mathrm{A}^{(3)}}{\partial a^3} - \frac{15}{4}a^4\frac{\partial^4 \mathrm{A}^{(3)}}{\partial a^4},$$

$$\mathrm{F}^{\mathrm{II}} = 108082.\mathrm{A}^{(2)} + 55109.a\frac{\partial \mathrm{A}^{(2)}}{\partial a} + 7183.a^2\frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(2)}}{\partial a^2} + 240.a^3\frac{\partial^3 \mathrm{A}^{(2)}}{\partial a^3} - \frac{5}{4}a^4\frac{\partial^4 \mathrm{A}^{(2)}}{\partial a^4},$$

$$\mathrm{F}^{\mathrm{I}} = 5825\,.\,aa'\,\mathfrak{A}^{(4)} + 802\,.\,a^2 a'\frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a} - \frac{15}{4}a^3 a'\frac{\partial\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a^2},$$

$$\mathrm{F}^{0} = 83.4\,.\,aa'\,\mathfrak{A}^{(3)} + 790\,.\,a^2 a'\frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a} - \frac{15}{4}a^3 a'\frac{\partial\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a^2};$$

$$\frac{f^{\mathrm{V}}}{1000} = 15739\,.\,\mathrm{A}^{(5)} + 7155\,.\,a\frac{\partial \mathrm{A}^{(5)}}{\partial a} + 973{,}5\,.\,a^2\frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(5)}}{\partial a^2} + 39\,.\,a^3\frac{\partial^3 \mathrm{A}^{(5)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{f^{IV}}{1000} = 49204 \, . \, A^{(4)} + 22701 \, . \, a \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 3041 \, . \, a^2 \frac{\partial \partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 116{,}5 \, . \, a^3 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{f^{III}}{1000} = 49949 \, . \, A^{(3)} + 23815 \, . \, a \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 3162 \, . \, a^2 \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 116 \, . \, a^3 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{f^{II}}{1000} = 16111 \, . \, A^{(2)} + 8270 \, . \, a \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 1095 \, . \, a^2 \frac{\partial \partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 38{,}6 \, . \, a^3 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{f^{I}}{1000} = 868 \, . \, aa' \mathfrak{A}^{(4)} + 122 \, . \, a^2 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a}, \quad \frac{f^{0}}{1000} = 1240 \, . \, aa' \mathfrak{A}^{(3)} + 121 \, . \, a^2 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a};$$

$$\frac{\Phi^{V}}{1000000} = 1754{,}5 \, . \, A^{(5)} + 799{,}6 \, . \, a \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} + 109{,}3 \, . \, a^2 \frac{\partial \partial A^{(5)}}{\partial a^2} + 4{,}4 \, . \, a^3 \frac{\partial^3 A^{(5)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{\Phi^{IV}}{1000000} = 5485{,}2 \, . \, A^{(4)} + 2536{,}7 \, . \, a \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} + 341{,}5 \, . \, a^2 \frac{\partial \partial A^{(4)}}{\partial a^2} + 13{,}3 \, . \, a^3 \frac{\partial^3 A^{(4)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{\Phi^{III}}{1000000} = 5568{,}3 \, . \, A^{(3)} + 2661{,}1 \, . \, a \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} + 355{,}1 \, . \, a^2 \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2} + 13{,}3 \, . \, a^3 \frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{\Phi^{II}}{1000000} = 1796{,}1 \, . \, A^{(2)} + 924 \, . \, a \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + 122{,}9 \, . \, a^2 \frac{\partial \partial A^{(2)}}{\partial a^2} + 4{,}4 \, . \, a^3 \frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3},$$

$$\frac{\Phi^{I}}{1000000} = 96{,}8 \, . \, aa' \mathfrak{A}^{(4)} + 13{,}7 \, . \, a^2 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a}, \quad \frac{\Phi^{0}}{1000000} = 138{,}3 \, . \, aa' \mathfrak{A}^{(3)} + 13{,}6 \, . \, a^2 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a}.$$

§. 208. Nous avons maintenant trouvé les grandes inégalités du rayon vecteur et de la longitude de Jupiter et de Saturne, $m' \delta r = m' a u'''$, $m \delta r' = m a' u'''$, en parties de la distance moyenne a ou a', et $m' \delta v = \frac{m' U'''}{\sin 1''}$; $m \delta v' = \frac{m U'''}{\sin 1''}$, en secondes d'un degré; savoir

$$\text{XXVIII (§. 202.)} \ldots\ldots m' \delta r = - m' a^2 \{X \sin (5 \text{♄} - 2 \text{♃}) + X' \cos (5 \text{♄} - 2 \text{♃})\},$$

$$\text{XXIX (§. 203.)} \ldots\ldots m' \delta v = - \frac{m' a}{\sin 1''} \{Y \cos (5 \text{♄} - 2 \text{♃}) - Y' \sin (5 \text{♄} - 2 \text{♃})\},$$

$$\text{XXXIII (§. 206.)} \ldots\ldots m \delta r' = m a'^2 \{W \sin (5 \text{♄} - 2 \text{♃}) + W' \cos (5 \text{♄} - 2 \text{♃})\},$$

$$\text{XXXIV (§. 207.)} \ldots\ldots m \delta v' = \frac{m a'}{\sin 1''} \{Z \cos (5 \text{♄} - 2 \text{♃}) - Z' \sin (5 \text{♄} - 2 \text{♃})\};$$

les lettres sans trait se rapportant à Jupiter, et celles marquées d'un trait à Saturne. Les coefficiens X, Y, etc. sont fonctions des élémens qui déterminent les plans et les ellipses des deux orbites. Or ces élémens étant variables, on demandera, quelles valeurs il faut leur attribuer; et il est visible qu'il faut substituer dans les coefficiens X, etc. les valeurs que les élémens, ou plutôt leurs fonctions $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, etc. auront à l'époque, pour laquelle on se propose de calculer la grande inégalité: cette substitution ayant été

faite, les équations précédentes n'auront besoin d'aucune correction. Mais la grande inégalité étant ordinairement employée comme une correction de la longitude moyenne, on fera mieux de suivre l'usage adopté dans l'astronomie, c'est-à-dire de partir d'une époque fixe, et de corriger les élémens qui répondent à cette époque, par la variation séculaire. Soient donc 'X, X, les valeurs d'un coefficient, qui répondent à l'époque d'où l'on part, par ex. l'an 1800, et à l'époque pour laquelle on cherche la grande inégalité, et désignons par t le nombre d'années, écoulées depuis la première epoque jusqu'à la seconde. Cela posé on aura

$$X = {}'X + t\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right) + \frac{t^2}{2}\left(\frac{\partial\partial X}{\partial t^2}\right).$$

Or 'X étant $= C^{v}\mathfrak{f} - c^{v}\frac{\partial\mathfrak{f}'}{n\partial t} - \gamma^{v}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2} + \text{cet.}$ (§. 202.), il viendra

$$X = C^{v}\mathfrak{f} - c^{v}\frac{\partial\mathfrak{f}'}{n\partial t} - \gamma^{v}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2} + t\left(C^{v}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial t} - c^{v}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}'}{n\partial t^2}\right) + \frac{t^2}{2}C^{v}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{\partial t^2} + \text{cet.}$$

les rapports différentiels étant donnés par les formules (§. 203.),

$$(1)\ldots\ldots\frac{\partial\mathfrak{f}}{n\partial t} = \frac{4(\mathfrak{f}) - 3\mathfrak{f} - (\mathfrak{f})}{529{,}691}, \quad (2)\ldots\ldots\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2} = \frac{\mathfrak{f} + (\mathfrak{f}) - 2(\mathfrak{f})}{70143}.$$

Il en est de même des autres coefficiens différentiels $\frac{\partial\mathfrak{g}}{n\partial t}$, etc. On aura donc

$$(3)\ldots\ldots X = C^{v}\mathfrak{f} - C^{iv}\mathfrak{g} + C^{iii}\mathfrak{h} - C^{ii}\mathfrak{k} - C^{i}\mathfrak{l} + C^{0}\mathfrak{m} - c^{v}\frac{\partial\mathfrak{f}'}{n\partial t} + c^{iv}\frac{\partial\mathfrak{g}'}{n\partial t} - c^{iii}\frac{\partial\mathfrak{h}'}{n\partial t} + c^{ii}\frac{\partial\mathfrak{k}'}{n\partial t}$$
$$+ c^{i}\frac{\partial\mathfrak{l}'}{n\partial t} - c^{0}\frac{\partial\mathfrak{m}'}{n\partial t} - \gamma^{v}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2} + \gamma^{iv}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}}{n^2\partial t^2} - \gamma^{iii}\frac{\partial\partial\mathfrak{h}}{n^2\partial t^2} + \gamma^{ii}\frac{\partial\partial\mathfrak{k}}{n^2\partial t^2} + \gamma^{i}\frac{\partial\partial\mathfrak{l}}{n\partial t^2} - \gamma^{0}\frac{\partial\partial\mathfrak{m}}{n^2\partial t^2}$$
$$+ nt\left\{\begin{array}{l} C^{v}\frac{\partial\mathfrak{f}}{n\partial t} - C^{iv}\frac{\partial\mathfrak{g}}{n\partial t} + C^{iii}\frac{\partial\mathfrak{h}}{n\partial t} - C^{ii}\frac{\partial\mathfrak{k}}{n\partial t} - C^{i}\frac{\partial\mathfrak{l}}{n\partial t} + C^{0}\frac{\partial\mathfrak{m}}{n\partial t} \\ - c^{v}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}'}{n^2\partial t^2} + c^{iv}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}'}{n^2\partial t^2} - c^{iii}\frac{\partial\partial\mathfrak{h}'}{n^2\partial t^2} + c^{ii}\frac{\partial\partial\mathfrak{k}'}{n^2\partial t^2} + c^{i}\frac{\partial\partial\mathfrak{l}'}{n^2\partial t^2} - c^{0}\frac{\partial\partial\mathfrak{m}'}{n^2\partial t^2} \end{array}\right\}$$
$$+ \frac{n^2}{2}t^2\left\{C^{v}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2} - C^{iv}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}}{n^2\partial t^2} + C^{iii}\frac{\partial\partial\mathfrak{h}}{n^2\partial t^2} - C^{ii}\frac{\partial\partial\mathfrak{k}}{n^2\partial t^2} - C^{i}\frac{\partial\partial\mathfrak{l}}{n^2\partial t^2} + C^{0}\frac{\partial\partial\mathfrak{m}}{n^2\partial t^2}\right\},$$

$$(4)\ldots\ldots Y = D^{v}\mathfrak{f} - D^{iv}\mathfrak{g} + \text{cet.} - d^{v}\frac{\partial\mathfrak{f}}{n\partial t} + d^{iv}\frac{\partial\mathfrak{g}'}{n\partial t} - \text{cet.} - \delta^{v}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2} + \delta^{iv}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}}{n^2\partial t^2} - \text{cet.}$$
$$+ nt\left\{D^{v}\frac{\partial\mathfrak{f}}{n\partial t} - D^{iv}\frac{\partial\mathfrak{g}}{n\partial t} + \text{cet.} - d^{v}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}'}{n^2\partial t^2} + d^{iv}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}'}{n^2\partial t^2} - \text{cet.}\right\}$$
$$+ \frac{n^2}{2}t^2\left\{D^{v}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2} - D^{iv}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}}{n^2\partial t^2} + \text{cet.}\right\},$$

CHAPITRE VII.

Calcul numérique.

§. 209. Nous négligerons dans le développement des inégalités périodiques, celles qui sont au-dessous d'une seconde; mais les inégalités séculaires, quand même elles ne monteraient qu'à la centième partie d'une seconde, ne devront pas être négligées, parcequ'au bout de quelques siècles elles deviendront sensibles. Les masses de plusieurs planètes n'étant pas bien connues, il est nécessaire d'exprimer séparément les perturbations dues à l'action de chaque planète, afin qu'on puisse les corriger, à proportion de la masse, quand elle sera mieux connue. Nous avons réduit en tables le calcul des perturbations de chaque planète, en employant les mêmes désignations que dans les Chapitres précédens. Les quantités qui serviront de base au calcul des perturbations, et qui ont été développées précédemment, sont les suivantes:

$$\alpha = \frac{a}{a'},\quad b^{(0)},\ b^{(1)},\ b^{(i)},\ c^{(i)};\ a\mathrm{A}^{(i)},\ a^3\,\mathfrak{A}^{(i)}\ (\text{§. 171. 172.}),$$

$$\frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha},\ \frac{\partial c^{(i)}}{\partial \alpha},\ \frac{\partial\partial b^{(i)}}{\partial \alpha^2},\ \frac{\partial\partial c^{(i)}}{\partial \alpha^2},\ \text{etc. } a^2\frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a},\quad a^4\frac{\partial\,\mathfrak{A}^{(i)}}{\partial \alpha},\ \text{etc. (§. 173.).}$$

Toutes ces quantités sont fonctions des élémens des orbites, que la Table I. présente pour l'époque du commencement du siècle présent ou de l'an 1801, tels qu'on les a trouvés dans cet ouvrage. Il faut cependant en excepter les moyens mouvemens et les moyennes distances, pour lesquels on trouvera dans la Table I. les valeurs employées dans la *Mécanique Céleste;* ce qui donne aussi les mêmes valeurs des coefficiens $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $a\mathrm{A}^{(i)}$, $a^3\,\mathfrak{A}^{(i)}$, et de leurs rapports différentiels. Nous avons cru devoir adopter les mêmes valeurs, pour faciliter la comparaison de notre calcul avec les résultats que donne l'ouvrage cité.

TABLE I.

Elémens de toutes les Planètes.

	Massse par rapport au soleil $=m$	*Demi-grand axe* $=a$	*Moy. mouv sidér. dans le quart d'un an* $=\frac{N}{4}$	*Excentricité* $=\gamma$	*Périhélie* $=\varpi$	*Inclinaison* $=\eta$	*Noeud ascendant* $=J$
♅	$\frac{1}{19504}$	19,183305	3856″,2	0,0466703	5ˢ.17°.21′.42″.	0°.46′.25″.	2ˢ.12°.51′.14″.
♄	$\frac{1}{3534,08}$	9,537871	10999″,2	0,056:683	2. 29. 8. 59.	2. 29. 38.	3. 21. 55. 47.
♃	$\frac{1}{1067,09}$	5,2011664	27314″,1	0,0481784	0. 11. 8. 35.	1. 18. 52.	3. 8. 25. 34.
♂	$\frac{1}{2610000}$	1,5236935	172262″,8	0,0931340	11. 2. 24. 24.	1. 51. 0.	1. 18. 1. 28.
♁	$\frac{1}{354790}$	1,000000	323994″,3	0,0167798	3. 9. 30. 5.	0. 0. 0.	- - - -
♀	$\frac{1}{367440}$	0,7233323	526660″,4	0,0068530	4. 8. 37. 1.	3. 23. 35.	2. 14. 52. 40.
☿	$\frac{1}{2025810}$	0,3870981	1345254″,2	0,2055149	1. 14. 21. 47.	7. 0. 0.	1. 15. 57. 31.

§. 210. Les inégalités séculaires sont données par les l'équations XIV — XVII (§. 185. 187.), dont les deux dernières peuvent être mises sous une forme plus simple. On trouvera par ce qui précède,

$$2aA^{(1)}-2a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}-a^3\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}=-2\alpha b^{(1)}+2\alpha^2\frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha}+\alpha^3\frac{\partial\partial b^{(1)}}{\partial \alpha^2}\ (\S.171\,(1).\S.173\,(12.))=$$

$$\frac{\alpha^2(1+\alpha^2)b^{(0)}-2\alpha(1-\alpha^2+\alpha^4)b^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2}\ (\S.173.\,(7)\,(8))=2\alpha(1+\alpha^2)c^{(1)}-3\alpha^2c^{(0)}(\S.172.(3)),\ \text{et}$$

$$2a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}+a^3\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}=-2\alpha^2\frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha}-\alpha^3\frac{\partial\partial b^{(0)}}{\partial \alpha^2}=\frac{\alpha^2(1+\alpha^2)b^{(1)}-2\alpha^3b^{(0)}}{(1-\alpha^2)^2}=-\alpha^2c^{(1)}.$$

On aura donc

$$\text{XIV.}\ \delta\theta=\frac{N}{4}\,\alpha^2c^{(1)}\theta'\sin(J-J'),\qquad \text{XV.}\ \delta J=\frac{N}{4}\,\alpha^2c^{(1)}\left\{\frac{\theta'}{\theta}\cos(J-J')-1\right\},$$

$$\text{XVI.}\ \delta\gamma=\frac{N}{4}\,\alpha\left\{2(1+\alpha^2)c^{(1)}-3\alpha c^{(0)}\right\}\gamma'\sin(\varpi'-\varpi),$$

$$\text{XVII. } \delta\varpi = \frac{N}{4}\,\alpha^2 c^{(1)} - \frac{N}{4}\,\alpha\,\{2\,(1+\alpha^2)\,c^{(1)} - 3\alpha\,c^{(0)}\}\,\frac{\gamma'}{\gamma}\cos(\varpi' - \varpi).$$

Les valeurs numériques des quantités précédentes, relativement à Mercure, sont renfermées dans la table suivante.

TABLE II.

Inégalités séculaires de MERCURE, dues à l'action des Planètes

	Vénus	*La Terre*	*Mars*	*Jupiter*	*Saturne*	*Uranus*
J — J'	−28°.55'.9"	— — —	−2°.3'.57"	−52°.28'.3	−65°.58'.16"	−26°.53'.43
$\varpi' - \varpi$	+54.15.14	+25°.8'.18'	−101.57.2[illegible]	−63.13.1[illegible]	+14.47.12	+92.59.55
α	0,535608	0,3870981	0,2540531	0,0744255	0,0405855	0,0201790
$b^{(0)}$	2,1721751	4,081980	2,033500	2,002778	2,000823	2,000182
$b^{(1)}$	0,6007052	0,411140	0,260462	0,074581	0,040610	0,020183
$c^{(0)}$	1,214154	2,871833	2,322536	[illegible],025143	2,007430	2,001811
$c^{(1)}$	5,035376	1,576062	0,863876	0,225613	0,122133	0,060581
$\delta\theta$	−33529".	0	−87",334	−30",59	−10",766	−0",203
δJ	−675173"	−317702"	−55288",5	−1489",77	−231",54	−29",93
$\delta\gamma$	+4179"	+1074",3	−2152",6	−6",717	+0",975	+0",036
$\delta\varpi$	+1154816"	+306562"	+77225",2	+1664",66	+266",99	+33",194
$m'\delta\theta$	−0",09125	0	−0",0000[illegible]3	−0",02867	−0",00305	−0",00001
$m'\delta J$	−1",83751	−0",89546	−0",02118	−1",3961[illegible]	−0",06552	−0",00153
$m'\delta\gamma$	+0",01137	+0",003[illegible]3	−0",000[illegible]2	−0",0063[illegible]	+0",00006	+0",00000
$m'\delta\varpi$	+3",14288	+0",86407	+0",0295[illegible]	+1",5600[illegible]	+0",0755[illegible]	+0",0017[illegible]

Si l'on ajoute ensemble les valeurs de $m'\delta\theta$, etc. dues aux actions des différentes planètes, on trouvera ce qui suit:

Variation annuelle de l'inclinaison de Mercure, $m'\delta\theta = -0'',12301$;

Mouvement annuel des noeuds relativement aux étoiles fixes, $m'\delta J = -4'',21735$;

Variation annuelle de l'excentricité, $m'\delta\gamma = +0'',00734 = +0,0000000355$8;

Mouvement annuel des apsides relativement aux étoiles, $m'\delta\varpi = +5'',67375$.

§. 211. Les inégalités périodiques, indépendantes des excentricités, et celles qui dépendent de leur première puissance, sont données par les for-

mules X—XIII (§. 182. 183.). Si l'on fait $\frac{n}{n'}=\nu$, $\frac{\nu}{\nu-1}=\lambda$, et qu'on multiplie les inégalités du rayon vecteur par 1000000, celles de la longitude par $\frac{1}{\sin 1''}$ (§. 182.), on aura

$$\text{X. } m'au = m'a.1000000\left\{\frac{a^2}{6}\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}+\frac{\nu^2\cos i(\mu'-\mu)}{\{(i+1)\nu-i\}\{(i-1)\nu-i\}}\left(2\lambda a A^{(i)}+a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\right\},$$

$$\text{XI. } m'U=\frac{m'\nu^2.206264'',8}{i\{(i+1)\nu-i\}\{(i-1)\nu-i\}}\left\{(i^2+3\lambda^2)aA^{(i)}+2\lambda a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right\}\sin i(\mu'-\mu),$$

$$\text{XII. } m'au'=$$

$$-m'a.1000000\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}+\frac{a^3}{4}\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right)\gamma\cos(\mu-\varpi)\\+\left(\frac{a}{4}A^{(1)}-\frac{a^2}{4}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}-\frac{a^3}{4}\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}\right)\gamma'\cos(\mu-\varpi')\end{array}\right\}$$

$$-m'a.1000000\{M^{(i)}\gamma\cos(i\mu'-(i-1)\mu-\varpi)-N^{(i)}\gamma'\cos(i\mu'-(i-1)\mu-\varpi')\},$$

$$\text{XIII. } m'U'=-m'.206264'',8\{\mathfrak{M}^{(i)}\gamma\sin(i\mu'-(i-1)\mu-\varpi)-\mathfrak{N}^{(i)}\gamma'\sin(i\mu'-(i-1)\mu-\varpi')\};$$

$$M^{(i)}=\frac{\left(2i^2-i-\frac{3}{i}\right)\nu^2-4i(i-1)\nu+i(2i-3)}{\{(i+1)\nu-i\}\{(i-1)\nu-i\}\{(i-2)\nu-i\}}\lambda^2\nu aA^{(i)}$$

$$+\frac{\left(i^2+i-\frac{3}{i}\right)\nu^2-i(2i+1)\nu+i^2}{\{(i+1)\nu-i\}\{(i-1)\nu-i\}\{(i-2)\nu-i\}}\lambda\nu a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}+\frac{\lambda\nu a^3}{2i\{(i-2)\nu-i\}}\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2},$$

$$N^{(i)}=\frac{(i-1)(2i-1)\lambda\nu^2aA^{(i-1)}}{i\{(i-1)\nu-i\}\{(i-2)\nu-i\}}+\frac{(i^2-\lambda)\nu^2a^2}{i\{(i-1)\nu-i\}\{(i-2)\nu-i\}}\cdot\frac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a}$$

$$+\frac{\lambda\nu a^3}{2i\{(i-2)\nu-i\}}\cdot\frac{\partial\partial A^{(i-1)}}{\partial a^2}$$

$$\mathfrak{M}^{(i)}=\frac{\left\{\begin{array}{l}(i-1)\left(i^3-i^2+3i-4+\frac{6}{i}\right)\nu^4-(4i^4-7i^3+10i^2-18i+10)\nu^3\\+i(6i^3-9i^2+8i-11)\nu^2-i^2(4i^2-5i+2)\nu+i^3(i-1)\end{array}\right\}}{\{(i+1)\nu-i\}\{(i-1)\nu-i\}^2\{(i-2)\nu-i\}}\lambda^2aA^{(i)}$$

$$+\frac{(i-1)\left(i^2+4i+\frac{12}{i}\right)\nu^3-(3i^3+6i^2-10i+12)\nu^2+3i(i+2)(i-1)\nu-i^3}{2\{(i+1)\nu-i\}\{(i-1)\nu-i\}^2\{(i-2)\nu-i\}}\lambda\nu a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}$$

$$+\frac{\lambda\nu^2a^3}{i\{(i-1)\nu-i\}\{(i-2)\nu-i\}}\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2},$$

$$\mathfrak{N}^{(i)} = \frac{(i-1)(2i-1)\left\{\left(i-2+\frac{4}{i}\right)\nu^2 - 2(i-1)\nu + i\right\}}{2\{(i-1)\nu - i\}\,.\,\{(i-2)\nu - i\}}\lambda\nu a A^{(i-1)}$$

$$+ \frac{(i-1)\left(i+2+\frac{4}{i}\right)\nu^2 - 2(i^2+1)\nu + i(i-1)}{2\{(i-1)\nu - i\}^2\,.\,\{(i-2)\nu - i\}}\,.\,\lambda\nu a^2\frac{\partial A^{(i-1)}}{\partial a}$$

$$+ \frac{\lambda\nu^2 a^3}{i\{(i-1)\nu - i\}\,.\,\{(i-2)\nu - i\}}\frac{\partial\partial A^{(i-1)}}{\partial a^2}.$$

Il faut observer que, dans les formules XII, XIII, i s'étend à tous les nombres entiers, soit positifs, soit négatifs, mais dans les formules X, XI, seulement aux nombres positifs, parceque nous les avons multipliées par 2 (§. 182.).

Les seules planètes qui puissent produire des dérangemens sensibles du mouvement de Mercure, sont Vénus et Jupiter; et nous nous sommes assurés par le calcul, que l'action de Vénus n'est sensible que dans les termes de u et U, qui dépendent de $i = 1$ et $i = 2$, et dans ceux de u', U', qui dépendent de $M^{(\pm 3)}$, $\mathfrak{M}^{(\pm 2)}$, $\mathfrak{M}^{(\pm 3)}$; et que l'action de Jupiter n'est sensible que dans les termes $M^{(\pm 2)}$, $\mathfrak{M}^{(\pm 2)}$, $\mathfrak{N}^{(\pm 1)}$. Si l'on fait donc pour abréger,

$$\frac{\nu^2\left(2\lambda a A^{(i)} + a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)}{\{(i+1)\nu - i\}\,.\,\{(i-1)\nu - i\}} = B^{(i)}, \quad \frac{\nu^2\left\{(i^2+3\lambda^2)aA^{(i)} + 2\lambda a^2\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right\}}{i\{(i+1)\nu - i\}\,.\,\{(i-1)\nu - i\}} = C^{(i)},$$

de sorte que

$$m'au = m'a\,.\,1000000\left\{\frac{a^2}{6}\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + B^{(i)}\cos i(\mu' - \mu)\right\},$$

$$m'U = m'\,.\,206264'',8\,.\,C^{(i)}\sin i(\mu' - \mu),$$

on n'a qu'à chercher les coefficiens $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $M^{(3)}$, $\mathfrak{M}^{(2)}$, $\mathfrak{M}^{(3)}$, relativement à l'action de Vénus, et $M^{(2)}$, $\mathfrak{M}^{(2)}$, $\mathfrak{N}^{(1)}$, relativement à l'action de Jupiter. Pour cet effet nous aurons besoin, outre les quantités renfermées dans la Table II, de celles qu'on trouvera dans la Table III.

TABLE III.

Inégalités périodiques de Mercure, dues aux actions de Vénus et de Jupiter.

	Vénus	*Jupiter*		*Vénus*	*Jupiter*
ν	2,554311	49,251273	$a^2 \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}$	−0,223448	−0,000415
λ	1,643372	1,020725	$a^2 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}$	−0,131138	....
$b^{(2)}$	0,246588	0,004164	$a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}$	−0,306464	−0,000617
$b^{(3)}$	0,110766	....	$a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}$	−0,198039	....
$\frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha}$	0,780206	0,074891	$a^3 \frac{\partial \partial A^{(0)}}{\partial a^2}$	....	−0,000420
$\frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha}$	1,457891	....	$a^3 \frac{\partial \partial A^{(2)}}{\partial a^2}$	−0,520346	−0,000618
$\frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha}$	1,070071	0,111380	$a^3 \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2}$	−0,518208	....
$\frac{\partial b^{(3)}}{\partial \alpha}$	0,691487	....	$B^{(1)}$	0,4082	....
$\frac{\partial \partial b^{(0)}}{\partial \alpha^2}$	....	1,018876	$B^{(2)}$	−1,5377	....
$\frac{\partial \partial b^{(2)}}{\partial \alpha^2}$	3,395022	1,499780	$C^{(1)}$	1,2292	....
$\frac{\partial \partial b^{(3)}}{\partial \alpha^2}$	3,381072	....	$C^{(2)}$	−2,7077	....
$a A^{(0)}$	....	−0,149057	$M^{(2)}$	....	0,39478
$a A^{(1)}$	−0,037753	....	$M^{(3)}$	6,4662	....
$a A^{(2)}$	−0,131961	−0,000310	$\mathfrak{M}^{(2)}$	36,4055	0,82064
$a A^{(3)}$	−0,059278	....	$\mathfrak{M}^{(3)}$	15,2556	....
			$\mathfrak{N}^{(1)}$	....	−0,06121

On en tirera, par les formules X — XIII, ce qui suit:

Inégalité du rayon vecteur de Mercure =

$$-0{,}04 + 0{,}43 . \cos(♀ - ☿) - 1{,}62 . \cos 2(♀ - ☿) - 1{,}40 . \cos(3♀ - 2☿ - \varpi)$$
$$- 2{,}95 . \cos(2♃ - ☿ - \varpi),$$

Inégalité de la longitude de Mercure =

$0'',69 . \sin(♀ - ☿) - 1'',52 . \sin 2(♀ - ☿) - 4'',20 . \sin(2♀ - ☿ - \varpi) - 1'',76 . \sin(3♀ - 2☿ - \varpi) - 3'',26 . \sin(2♃ - ☿ - \varpi) - 0'',57 . \sin(♃ - \varpi')$;

☿, ♀, ♃, étant les moyennes longitudes héliocentriques de ces trois planètes, ϖ, ϖ', les longitudes des périhélies de Mercure et de Jupiter.

§. 212. On trouvera par le même procédé ce qui suit:

TABLE IV.

Inégalités séculaires de VENUS dues aux actions des Planètes

	Mercure	*La Terre*	*Mars*	*Jupiter*	*Saturne*	*Uranus*
J — J	+28°.55'.9"	— — —	+26°.51'.12"	-23°.32'.54"	-37°.3'.7"	+2°.1'.26"
$\varpi' - \varpi$	-54.15.14	-29°.6'.56"	-156.12.37	-117.28.26	-39.28.2	+38.44.41
a	1,868602	0,723332	0,474723	0,139071	0,075838	0,037706
$b^{(0)}$	1,26460	2,386343	2,129668	2,009778	2,002886	2,000712
$b^{(1)}$	0,324149	0,942413	0,521624	0,140091	0,076002	0,037725
$c^{(0)}$	0,645892	9,992539	3,523572	2,089736	2,026116	2,006413
$c^{(1)}$	0.465224	8,871894	2,304481	0,432801	0,229988	0,113423
$\delta\theta$	+50796",5	0	+3990",64	-40",4138	-18",2819	+0",04050[illegible]
δJ	+695274",4	-2444684"	-140577",5	-2844",47	-288",215	-65",59943
$\delta\gamma$	-91681",1	-16621"	-5912",62	-32",8027	-2",35594	+0",118678
$\delta\varpi$	-8774061"	-1909915"	+2230648"	+6897",51	+279",112	+63",34833
$m'\delta\theta$	+0",025075	0	+0",001529	-0",03787	-0",005173	+0",00000[illegible]
$m'\delta J$	+0",343208	-6",890510	-0",053861	-2",665634	-0",081555	-0",00336[illegible]
$m'\delta\gamma$	-0",045257	-0",046846	-0",00226	-0",03074	-0",00066[illegible]	+0",000006
$m'\delta\varpi$	-4",331137	-5",383305	+0",854654	+6",46385[illegible]	+0",078977	+0",00324[illegible]

Variation annuelle de l'inclinaison de Vénus = $-0'',01644$;

Mouvement des nœuds par rapport aux étoiles fixes = $-9'',35171$;

Variation de l'excentricité = $-0'',12577 = -0,0000000060975$;

Mouvement des apsides par rapport aux étoiles = $-2'',31371$.

§. 213. Les inégalités périodiques de Vénus sont dues principalement aux actions de la Terre et de Jupiter: les termes les plus sensibles des premières sont ceux qui dépendent des coefficiens $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, $B^{(3)}$, $B^{(4)}$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, $C^{(4)}$, $M^{(+5)}$, $N^{(+3)}$, $N^{(+5)}$, $\mathfrak{M}^{(+3)}$, $\mathfrak{N}^{(+3)}$, $\mathfrak{N}^{(+4)}$, $\mathfrak{N}^{(+5)}$; les perturbations les plus considérables de Jupiter dépendent de $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $\mathfrak{N}^{(+1)}$. On trouvera pour l'action de la Terre:

$$\nu = 1,625523;\ \lambda = 2,598662;\ b^{(2)} = 0,527589;\ b^{(3)} = 0,323359;$$

$$b^{(4)} = 0,206811;\ b^{(5)} = 0,135616;\ \frac{\partial b^{(0)}}{\partial\alpha} = 1,643709;\ \frac{\partial b^{(1)}}{\partial\alpha} = 2,272414;\ \frac{\partial b^{(2)}}{\partial\alpha} = 2,06977;$$

$$\frac{\partial b^{(3)}}{\partial\alpha} = 1,738781;\ \frac{\partial b^{(4)}}{\partial\alpha} = 1,407491;\ \frac{\partial b^{(5)}}{\partial\alpha} = 1,113704;\ \frac{\partial\partial b^{(2)}}{\partial\alpha^2} = 8,558595;\ \frac{\partial\partial b^{(3)}}{\partial\alpha^2} = 9,112527;$$

$$\frac{\partial\partial b^{(4)}}{\partial\alpha^2} = 9,1074;\ \frac{\partial\partial b^{(5)}}{\partial\alpha^2} = 8,63403;\ B^{(1)} = 1,7462;\ B^{(2)} = 7,5193;\ B^{(3)} = -6,3862;$$

$$B^{(4)} = -1,1036;\ C^{(1)} = 9,684;\ C^{(2)} = 18,250;\ C^{(3)} = -11,593;\ C^{(4)} = -1,6857;$$

$$M^{(5)} = 75,1523;\ N^{(3)} = 44,7237;\ N^{(5)} = 98,8015;\ \mathfrak{M}^{(3)} = 359,308;$$

$$\mathfrak{N}^{(3)} = 453,044;\ \mathfrak{N}^{(4)} = 89,011;\ \mathfrak{N}^{(5)} = 208,767;$$

et pour l'action de *Jupiter*,

$$\nu = 19,28163;\ \lambda = 1,0547;\ b^{(2)} = 0,014623;\ \frac{\partial b^{(0)}}{\partial\alpha} = 0,14216;\ \frac{\partial b^{(1)}}{\partial\alpha} = 1,022206;$$

$$\frac{\partial b^{(2)}}{\partial\alpha} = 0,212046;\ \frac{\partial\partial b^{(0)}}{\partial\alpha^2} = 1,067532;\ B^{(1)} = 0,007215;\ B^{(2)} = -0,003232;$$

$$C^{(1)} = 0,015061;\ C^{(2)} = -0,00454;\ \mathfrak{N}^{(+1)} = -0,161829;$$

d'où l'on a conclu

l'inégalité du rayon vecteur de Vénus =

$$-0,6 + 3,56.\cos(♁ - ♀) + 15,33\cos 2(♁ - ♀) - 13,02.\cos 3(♁ - ♀)$$
$$-2,25.\cos 4(♁ - ♀) + 1,53.\cos(3♁ - 2♀ - \varpi') - 1,05.\cos(5♁ - 4♀ - \varpi)$$
$$+ 3,38.\cos(5♁ - 4♀ - \varpi') + 4,89.\cos(♃ - ♀) - 2,19.\cos 2(♃ - ♀),$$

l'inégalité de la longitude de Vénus =

$$5'',63.\sin(♁ - ♀) + 10'',61.\sin 2(♁ - ♀) - 6'',74.\sin 3(♁ - ♀) - 0'',98.\sin 4(♁ - ♀)$$
$$- 1'',43.\sin(3♁ - 2♀ - \varpi) + 4'',42.\sin(3♁ - 2♀ - \varpi')$$
$$+ 0'',87.\sin(4♁ - 3♀ - \varpi') + 2'',04.\sin(5♁ - 4♀ - \varpi')$$
$$+ 2'',91.\sin(♃ - ♀) - 0'',88.\sin 2(♃ - ♀) - 1'',51.\sin(♃ - \varpi');$$

ϖ et ϖ' étant les périhélies des planètes troublée et perturbatrice.

§. 214. Le plan de l'orbite de la terre est déplacé par l'action des planètes, aussi bien que les autres orbites. Mais comme les astronomes rapportent à ce plan tous les autres, il est impossible qu'il soit en mouvement, sans que les noeuds et l'inclinaison de chaque autre planète relativement à ce plan soient changés: d'où il naîtra un mouvement *apparent* des orbites planétaires et des étoiles même, dont il sera parlé dans le §. suivant. Le *vrai* mouvement de l'orbe terrestre, dû à l'action d'une planète m', consiste dans une rétrogradation de la commune section des deux plans, tandis que leur inclinaison mutuelle n'est point altérée, ainsi qu'on l'a vu (§. 185.). Pour déterminer ce mouvement, on peut prendre pour base le plan qui coïncidait avec l'orbite de la terre à une certaine époque, et qu'on appelle *écliptique fixe; l'écliptique vraie* étant le plan que l'orbe terrestre, déplacé par l'action des planètes, occupe dans chaque instant. La variation des noeuds et de l'inclinaison de l'écliptique vraie relativement à l'écliptique fixe est le vrai mouvement de l'orbite de la terre, qu'on trouvera facilement par l'action de chaque planète sur la terre; et il est aisé de voir, que le mouvement apparent des planètes relativement à l'écliptique fixe est nul. On peut aussi prendre pour base l'écliptique vraie; et c'est ce que nous ferons, en regardant le mouvement des noeuds de l'orbe terrestre sur l'orbite de la planète m', comme un mouvement des noeuds de cette planète sur l'écliptique; de sorte que le vrai mouvement de l'orbe terrestre consistera dans une rétrogradation des noeuds de chaque planète, due à l'action de cette planète même sur la terre. On a vu (§. 185.) que cette rétrogradation est de $\frac{N}{4} m' a^2 a' \mathfrak{A}^{(1)}$ par an; et nous allons la calculer. La variation de l'excentricité et des apsides de la terre est donnée par les mêmes formules, que celle des autres planètes.

TABLE V.

Inégalités séculaires de la TERRE, dues à l'action des Planètes

	Mercure	*Vénus*	*Mars*	*Jupiter*	*Saturne*	*Uranus*
$\varpi'-\varpi$	-25°.8'.18"	+29°.6'.56"	-127°.5'.41"	-88°.21'.10"	-10°.21'.6"	+67°.51'.37"
a	2,583324	1,382490	0,6[illegible]6300	0,192265	0,104845	0,052129
$b^{(0)}$	0,805931	1,726119	2,291132	2,018885	2,005535	2,001355
$b^{(1)}$	0,159152	0,681678	0,804563	0,195003	0,105283	0,052182
$c^{(0)}$	0,166580	3,781721	6,856336	2,176460	2,050321	2,012275
$c^{(1)}$	0,091419	3,357607	5,727893	0,619[illegible]6[illegible]	0,321144	0,157185
$\delta J'$	-197666"	-2079177"	-799350"	-7409",68	-1143",76	-138",389
$\delta \gamma$	-8186",22	+5773",10	-42662",1	-86",6377	-1",52549	+0",389279
$\delta \varpi$	-841996"	+146431"	+2857026"	+7261",70	+646",051	+128",95[illegible]3
$m'\delta J'$	-0",097574	-5",658549	-0",306264	-6",913819	-0",323637	-0",00709
$m\,\delta\gamma$	-0",004041	+0",015712	-0",017495	-0",08119	-0",00043[illegible]	+0",0000[illegible]
$m'\delta\varpi$	-0",415634	+3",977341	+1",094646	+6",805143	+0",18286	+0",0066[illegible]

Variation annuelle de l'excentricité de la Terre $=-0'',087430=-0,00000041903$;
Mouvement des apsides relativement aux étoiles fixes $=+\ 11'',650913$.

§. 215. La rétrogradation des noeuds, $m'\delta J'$ (*Tab. V.*), d'une planète m', due à sa propre action sur la terre, n'est qu'un mouvement apparent de l'orbite de cette planète; et il résulte de la même action un mouvement apparent de l'orbite de chaque autre planète m, que nous désignerons par $m'\Delta\eta$ et $m'\Delta J$. On a vu que l'action de m' n'altère point l'inclinaison η' du plan de l'orbite de m' relativement à l'écliptique et aux plans des autres orbites. En nommant donc α l'angle formé par les plans des orbites m' et m, on a $m'\delta\eta'=0$, et le problème est de déduire de $m'\delta J'$ (*Tab. V.*) les variations $m'\Delta\eta$ et $m'\Delta J$, en regardant η' et α comme constans.

Soit (*Fig.* 42.) ♈NC l'écliptique, νN'J l'orbite de la planète perturbatrice m', νNJ celle d'une autre planète m. Supposons qu'en vertu de l'action de m', l'écliptique ait pris la position ♈νC, et appelons la longitude des noeuds ascendans des planètes m et m', J et J', leurs in-

clinaisons sur l'écliptique, η, η', les tangentes de ces inclinaisons, θ, θ', l'angle que font entre eux les deux plans, α, la distance de leur commune section au noeud de m', Φ: cela posé on aura

$$\text{INC} = \eta,\ \text{IN'C} = \eta',\ \text{N'N} = \text{J} - \text{J}' = i,\ \text{NIN'} = \alpha,\ \text{N'I} = \Phi.$$

Le noeud de m' a rétrogradé sur son orbite du petit arc $\text{N}'\nu' = \partial\Phi$, et sur l'écliptique de l'arc $\text{N}'n' = m'\delta\text{J}'$, $\nu'n'$ étant perpendiculaire à l'écliptique. Or on a dans le petit triangle $\text{N}'n'\nu'$, $\text{tang N}'\nu' = \frac{\text{tang N}'n'}{\cos \text{N}'}$, d'où l'on tire

$$\partial\Phi = -\frac{m'\delta\text{J}'}{\cos\eta'}.$$

Le triangle NIN' fournit les équations,

$$(1)\ldots\ldots \sin\alpha = \frac{\sin\eta\sin i}{\sin\Phi},\quad (2)\ldots\ldots \cos\eta = \cos\alpha\cos\eta' - \sin\alpha\sin\eta'\cos\Phi,$$

$$(3)\ldots\ldots \text{tang}\,\Phi = \frac{\theta\sin i}{(\theta\cos i - \theta')\cos\eta'}.$$

La différentiation des deux premières donnera

$$(4)\ldots\ldots \partial i = -\frac{\text{tg}\,i\,(\partial\eta\,\text{tg}\,\Phi - \theta.\partial\Phi)}{\theta\,\text{tang}\,\Phi},\quad (5)\ldots\ldots \partial\eta = -\frac{\partial\Phi\sin\alpha\sin\Phi\sin\eta'}{\sin\eta}.$$

Si l'on substitue (3) dans (4), et (1) dans (5), il viendra

$$(6)\ldots\ldots \partial i = -\frac{\text{tg}\,i}{\theta}\left\{\partial\eta - \frac{\partial\Phi\cos\eta'(\theta\cos i - \theta')}{\sin i}\right\},\quad (7)\ldots\ldots \partial\eta = -\partial\Phi\sin\eta'\sin i,$$

et la substitution de (7) en (6) donnera

$$(8)\ldots\ldots \partial i = -\frac{\partial\Phi(\sin\eta'\cos i - \theta\cos\eta')}{\theta}.$$

En mettant $-\frac{m'\delta\text{J}'}{\cos\eta'}$ à la place de $\partial\Phi$ dans les équations (7) (8), on aura

$$\partial\eta = m'\delta\text{J}'.\theta'\sin i,\quad \partial i = m'\delta\text{J}'\left(\frac{\theta'}{\theta}\cos i - 1\right).$$

Mais $i = \text{J} - \text{J}'$, $\partial i = m'\Delta\text{J} - m'\delta\text{J}'$, $\partial\eta = m'\Delta\eta$, partant

$$(9)\ldots\ldots m'\Delta\eta = m'\delta\text{J}'.\theta'\sin(\text{J} - \text{J}'),\quad (10)\ldots\ldots m'\Delta\text{J} = m'\delta\text{J}'\frac{\theta'\cos(\text{J} - \text{J}')}{\theta}.$$

On multipliera donc les valeurs de $m'\delta\text{J}'$ (*Tab. V.*) par θ' et ensuite par $\sin(\text{J} - \text{J}')$ et par $\frac{\cos(\text{J} - \text{J}')}{\theta}$: le premier produit donnera la variation de l'inclinaison, le second donnera celle du noeud de chaque planète m, qui résultent de l'action de la planète m' sur la terre.

Outre ce mouvement apparent, chaque orbite m a un mouvement réel, dû à l'action de toutes les autres planètes m' sur la planète m, qu'il faut

ajouter avec le mouvement apparent, pour avoir la position de chaque orbite relativement à l'écliptique vraie: nous avons donné ce mouvement réel de Mercure et de Vénus (*Tab.* II. IV.). Les corrections, dues au mouvement réel, donnent ce que Lagrange a appelé noeud *moyen* et inclinaison *moyenne:* la combinaison des mouvemens réel et apparent donne le noeud *vrai* et l'inclinaison *vraie.*

Les valeurs de $m'\delta J'$ (*Tab.* V.), et les élémens J, η, (Tab. I.) ont donné par les formules (9) (10) les résultats suivans.

TABLE VI.

Inégalités apparentes de chaque planète, dues à l'action des autres planètes sur la Terre.

MERCURE *par l'action de*	*Vénus*	*Mars*	*Jupiter*	*Saturne*	*Uranus*
$\Delta\eta$	+59611″,75	+930″,7126	+134″,91	+45″,4983	+0″,84531
ΔJ	−878784″,6	−210141″	−844″,094	−165″,2054	−13″,5728
$m'\Delta\eta$	+0″,162235	+0″,000357	+0″,126428	+0″,012874	+0″,000043
$m'\Delta J$	−2″,391642	−0″,080514	−0″,791024	−0″,046746	−0″,000696

VENUS *par l'action de*	*Mercure*	*Mars*	*Jupiter*	*Saturne*	*Uranus*
$\Delta\eta$	−11736″,8	−11662″,6	+67″,96853	+30″,0157	−0″,06994
ΔJ	−358309″	−388513″,6	−2630″,44	−670″,561	−31″,4979
$m'\Delta\eta$	−0″,005794	−0″,004468	+0″,063695	+0″,008493	−0″,000003
$m'\Delta J$	−0″,176872	−0″,148856	−2″,465060	−0″,189741	−0″,001615

MARS *par l'action de*	*Mercure*	*Vénus*	*Jupiter*	*Saturne*	*Uranus*
$\Delta\eta$	−874″,891	+55683″,4	+131″,0862	+44″,7576	+0″,78465
ΔJ	−750919″	−3404971″	−3357″,22	−678″,3816	−52″,50552
$m'\Delta\eta$	−0″,000432	+0″,151544	+0″,122845	+0″,01[illegible]6[illegible]9	+0″,0000[illegible]
$m'\Delta J$	−0″,370676	−9″,266740	−3″,146145	−[illegible]″1019[illegible]	−0″,002692

JUPITER *par l'action de*

	Mercure	*Vénus*	*Mars*	*Saturne*	*Uranus*
Δη	−19246″,6	−49250″,3	−19894″,2	+11″,6322	−0″,8066
ΔJ	−6443[illegible]9″	−4925047″	−717223″,5	−2111″,02	−73′,461
m′Δη	−0″,009501	−0″,134036	−0″,007612	+0″,003291	−0″,000041
m′ΔJ	−0″,318089	−13″,403680	−0″,274798	−0″,597333	−0″,003766

SATURNE *par l'action de*

	Mercure	*Vénus*	*Mars*	*Jupiter*	*Uranus*
Δη	−22167″,1	−74276″,7	−23187″,2	−39″,7252	−1′,17790
ΔJ	−2269[illegible]9″	−2258867″	−26[illegible]747″	−3798″,07	−33″,3071
m′Δη	−0″,010942	−0″,202147	−0″,008884	−0″,03722	−0″,00006
m′ΔJ	−0″,112009	−6″,147581	−0′,[illegible]99903	−3″,559277	−0″,001708

URANUS *par l'action de*

	Mercure	*Vénus*	*Mars*	*Jupiter*	*Saturne*
Δη	−1[illegible]979″	+4353[illegible],53	−10841″,8	+7[illegible]′,4[illegible]9	+31′,401
ΔJ	−1630000″	−912[illegible]6[illegible]8′	−17[illegible]549″	−11[illegible]64′,9	−2[illegible]64′,0
m′Δη	−0″,00542	+0′,011848	−0′,0041[illegible]4	+0′,068817	+0″,00888
m′ΔJ	−0″,7[illegible]12	−24″,83[illegible]417	−0′,664[illegible]85	−1[illegible]″,650[illegible]97	−0″,810395

Si l'on ajoute les valeurs précédentes de $m'\Delta J$ avec le mouvement des noeuds de chaque planète, qui résulte de sa propre action sur la terre, $m\delta J$ (*Tab. V.*), on aura ce qui suit:

Variation apparente de l'inclinaison, pour une année:

de ☿ = + 0″,3[illegible]1[illegible]37; ♀ = + 0″,061923; ♂ = + 0″,206656;
♃ = − 0″,1479[illegible]9; ♄ = − 0″,2[illegible]9261; ♅ = + 0″,079976;

Mouvement apparent des noeuds relativement aux étoiles fixes:

de ☿ = − 3′,408196; ♀ = − 8″,640693; ♂ = − 13″,284471;
♃ = − 21″,54[illegible]20; ♄ = − 10″,244115; ♅ = − 37″,754477.

§ 216. En vertu de l'action de chaque planète m sur la terre, que nous avons développée (§. 214.), le pole de l'écliptique décrit un arc de cer-

cle $m\delta J$ autour du pole de l'orbite m, d'où il résultera nécessairement une altération de la position du pole de l'écliptique relativement à celui de l'équateur, ainsi que de la distance entre ces deux poles: la première produira un mouvement des points équinoxiaux, la seconde un changement de l'obliquité de l'écliptique.

Soient (*Fig.* 43.) E, P, L, les poles de l'ecliptique, de l'équateur, et de l'orbite de la planète m, dont l'inclinaison est $EL = \eta$, et la longitude de son noeud ascendant $\Upsilon N = J$. Si l'on nomme l'obliquité $PE = \varepsilon$, l'angle $ELP = \Phi$, l'arc $PL = \alpha$, on aura $LEN = 90°$, $\Upsilon EP = 90°$, $LEP = 180° - J$, et le triangle ELP fournira les équations,

$$(1) \ldots\ldots \sin\alpha = \frac{\sin\varepsilon \sin J}{\sin\Phi}, \qquad (2) \ldots\ldots \cos\alpha = \cos\varepsilon\cos\eta - \sin\varepsilon\sin\eta\cos J,$$

$$(3) \ldots\ldots \sin J \cot\Phi = \cot\varepsilon\sin\eta + \cos\eta\cos J.$$

Comme le pole L est supposé immobile, tandis que le pole E tourne autour de lui, sans changer sa distance EL, les arcs α et η sont constans: ainsi la différentiation de (1) et (2) donnera

$$(4) \ldots\ldots 0 = \partial\varepsilon\cos\varepsilon\sin J + \partial J\sin\varepsilon\cos J - \partial\Phi\sin\varepsilon\sin J\cot\Phi,$$

$$(5) \ldots\ldots 0 = \partial\varepsilon(\sin\varepsilon\cos\eta + \cos\varepsilon\sin\eta\cos J) - \partial J\sin\varepsilon\sin\eta\sin J.$$

Or l'accroissement de la longitude du noeud J relativement aux étoiles fixes est $\partial\Phi = m\delta J$; et si l'on nomme $\Delta\Upsilon$ la précession des points équinoxiaux qui en résulte, la longitude du noeud J par rapport à ces points croitra de l'arc $m\delta J - \Delta\Upsilon$: d'où l'on tire

$$(6) \ldots\ldots \partial J = m\delta J - \Delta\Upsilon, \quad \text{et} \quad \partial\Phi = m\delta J.$$

Si l'on substitue les valeurs (3) et (6) dans les équations (4) et (5), elles prendront la forme

$$(4) \ldots\ldots 0 = \partial\varepsilon\cos\varepsilon\sin J + m\delta J\{\sin\varepsilon\cos J(1-\cos\eta) - \cos\varepsilon\sin\eta\} - \Delta\Upsilon\sin\varepsilon\cos J,$$

$$(5) \ldots\ldots 0 = \partial\varepsilon(\sin\varepsilon\cos\eta + \cos\varepsilon\sin\eta\cos J) + (\Delta\Upsilon - m\delta J)\sin\varepsilon\sin\eta\sin J.$$

En ajoutant ensemble ces deux équations, après avoir multiplié la première par $\sin\eta\sin J$, la seconde par $\cos J$, on aura

$$0 = \partial\varepsilon(\cos\varepsilon\sin\eta + \sin\varepsilon\cos\eta\cos J) - m\delta J\sin\eta\sin J(\cos\varepsilon\sin\eta + \sin\varepsilon\cos\eta\cos J),$$

d'où l'on tirera $\partial\varepsilon$ ou

$$(7) \ldots\ldots \Delta\varepsilon = m\delta J\sin\eta\sin J.$$

Si l'on met cela à la place de $\partial\varepsilon$, l'équation (5) deviendra

$$0 = m\delta J \{\cos\varepsilon \sin\eta \cos J - (1 - \cos\eta) \sin\varepsilon\} + \Delta\Upsilon \sin\varepsilon,$$

d'où l'on conclura, à cause de $\cos\eta = 1$ à fort peu près,

$$(8) \ldots\ldots \Delta\Upsilon = - m\delta J \cot\varepsilon \sin\eta \cos J.$$

Si l'on désigne les masses par les signes des planètes, les valeurs précédentes de η, J, δJ (Tab. I. V.) donneront

l'accroissement annuel de l'obliquité de l'écliptique, $\Delta\varepsilon =$

— ☿ . 17316″ — ♀ . 118796″ — ♂ . 19184″ — ♃ . 168″,2435
— ♄ . 46″,167 — ♅ . 1″,7854 = — 0″,510025;

la *précession annuelle des points équinoxiaux*, $\Delta\Upsilon =$

☿.38576″+♀.73949″+♂.39756″—♃.57″,4089—♄.41″,815+♅.1″,669=+0″,169681.

La précession des équinoxes, connue par les observations, est l'effet composé de l'attraction du soleil et de la lune sur le sphéroide du globe terrestre (§. 118.), et de l'action des planètes sur l'orbite de la terre. L'effet total qui résulte de ces deux actions, est d'après les observations, une rétrogradation des points équinoxiaux de 50″,1 par an (I. §. 90.), et l'action des planètes produit, comme nous venons de le voir, un mouvement direct de 0″,17: d'où il suit que la précession luno-solaire est de 50″,27 par an.

La diminution séculaire de l'obliquité de 51″, que nous venons de trouver, est parfaitement d'accord avec les observations (I. §. 85.); mais cette quantité n'est exacte que dans l'état actuel du système solaire, et elle doit être corrigée par les différentielles secondes, lorsqu'il s'agit d'un tems fort éloigné. Quand nous aurons déterminé le vrai mouvement des noeuds de toutes les planètes, on pourra calculer les valeurs (J) et (δJ), que J et δJ auront au bout de 500 ans: cela posé on aura, en négligeant la variation de l'inclinaison,

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = m\delta J . \sin\eta \sin J, \quad \frac{\partial\partial\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{m \sin\eta}{500} \{(\delta J) \sin (J) - \delta J \sin J\};$$

d'où l'on conclura la variation de l'obliquité pour t ans,

$$\Delta\varepsilon = mt \sin\eta \left\{\left(1 - \frac{t}{1000}\right) \delta J \sin J + \frac{t}{1000} (\delta J) \sin (J)\right\}.$$

§. 217. Il est visible que le mouvement de l'écliptique doit altérer la longitude et la latitude des étoiles, ainsi que les observations l'ont indiqué (I. §. 82.). Soient (*Fig.* 43.) E, L, les poles de l'écliptique et de l'orbite

NC de la planète perturbatrice m, P le lieu d'une étoile, dont la latitude est β, la longitude λ: cela posé on aura

$EL = \eta$, $EP = 90° - \beta$, $LEN = 90°$, $PEN = \lambda - J$, donc $LEP = 90° + (\lambda - J)$. Si on fait $PL = \alpha$, $\lambda - J = \psi$, il faut mettre dans les formules précédentes (§. 216), $90° - \beta$ au lieu de ε, $90° + \psi$ ou lieu de $180° - J$, ou $90° - \psi$ au lieu de J, $-\partial\beta$ au lieu de $\partial\varepsilon$, $-\partial\psi$ ou $\partial J - \partial\lambda$ au lieu de $\partial J = m\,\delta J - \Delta\,\text{♈}$. Cela posé, les équations (7) (8) prendront la forme

$$\partial\beta = -m\,\delta J \sin\eta\cos\psi,\quad \partial J - \partial\lambda = m\,\delta J\,(1 + \sin\eta\,\text{tg}\,\beta\sin\psi).$$

Or $\partial\lambda$ est l'accroissement de la longitude relativement aux points équinoxiaux, y compris la partie $-\Delta\,\text{♈}$, commune à toutes les étoiles, qui est donnée par la précession. En nommant donc $\Delta\lambda$, $\Delta\beta$, les accroissemens de la longitude et de la latitude, qui dépendent de la position particulière de chaque étoile, on aura

$$\partial\lambda = \Delta\lambda - \Delta\,\text{♈},\ \partial J = m\,\delta J - \Delta\,\text{♈}\ (\text{§. }216.),\ \partial J - \partial\lambda = m\,\partial J - \Delta\lambda,$$

d'où l'on conclura

l'accroissement de la latitude, $\Delta\beta = -m\,\delta J \sin\eta\cos(\lambda - J)$,

et celui de la *longitude*, $\Delta\lambda = -m\,\delta J \sin\eta\,\text{tang}\,\beta\sin(\lambda - J)$.

Mais $m\,\delta J \sin\eta = \frac{\Delta\varepsilon}{\sin J}$ (§. 216 (7)), partant

$$\Delta\beta = -\Delta\varepsilon\cot J\cos\lambda - \Delta\varepsilon\sin\lambda,\ \Delta\lambda = -\Delta\varepsilon\,\text{tg}\,\beta\cot J\sin\lambda + \Delta\varepsilon\,\text{tg}\,\beta\cos\lambda.$$

Si on fait dans les derniers termes, qui sont indépendans de J, $\Delta\varepsilon = -0'',51$ et qu'on substitue dans les premiers termes la partie de $\Delta\varepsilon$, qui dépend de l'action de chaque planète, après l'avoir multipliée par la cotangente de la longitude du noeud de cette planète, on aura

l'accroissement annuel de la latitude $= 0'',51 . \sin\lambda$

$$+\left\{\begin{matrix}\text{☿} . 17316''.\cot\text{☊☿} + \text{♀} . 118796''.\cot\text{☊♀} + \text{♂} . 19184''.\cot\text{☊♂}\\ + \text{♃} . 168'',243.\cot\text{☊♃} + \text{♄} . 46'',167.\cot\text{☊♄} + \text{♅} . 1'',785.\cot\text{☊♅}\end{matrix}\right\}\cos\lambda,$$

et celui de la longitude $= -0''51 . \text{tang}\,\beta\cos\lambda$

$$+\{\text{☿} . 17316''.\cot\text{☊☿} + \text{♀} . 118796''.\cot\text{☊♀} + \text{cet}\}\,\text{tang}\,\beta\sin\lambda.$$

Si l'on substitue les valeurs précédentes des masses et des noeuds, on aura l'accroissement *séculaire*

de la latitude des étoiles $= 51''.\sin\lambda + 7'',37.\cos\lambda = 51'',53.\sin(\lambda + 8°13'17'')$,

et de la *longitude* $= -(51''.\cos\lambda - 7'',37.\sin\lambda)\,\text{tg}\,\beta = -51'',53.\text{tg}\,\beta.\cos(\lambda + 8^\circ 13' 17'')$. Ces formules nous font connaître, que la variation de la latitude est un *maximum*, lorsque la longitude est donnée par l'équation $\text{tang}\,\lambda = \frac{51}{7,37}$, c'est-à-dire si la longitude est 82° ou 262°, et que les premières étoiles approchent du pole boréal, tandis que les dernières s'en éloignent. Tout cela est parfaitement d'accord avec les observations de Tycho et des astronomes modernes (I. §. 82.).

§. 218. Nous développerons dans ce §. les inégalités périodiques de la terre, dues à l'action de Vénus, de Mars, de Jupiter, et de la Lune, celle des autres planètes étant inconsidérable. Pour cet effet nous aurons besoin des quantités suivantes.

Perturbations de la TERRE par l'action de VENUS.

$$\alpha = 1,38249;\ \nu = 0,615164;\ \lambda = -1,598661;\ b^{(1)} = 0,6816778;$$

$$b^{(2)} = 0,381622;\ b^{(3)} = 0,233896;\ b^{(4)} = 0,149793;\ \frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} = -1,890628;$$

$$\frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = -1,353086;\ \frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha} = -1,05912;\ \frac{\partial b^{(3)}}{\partial \alpha} = -0,827219;\ \frac{\partial b^{(4)}}{\partial \alpha} = -0,640877;$$

$$\frac{\partial\partial b^{(2)}}{\partial \alpha^2} = 4,260449,\ \frac{\partial\partial b^{(3)}}{\partial \alpha^2} = 3,912997;\ \frac{\partial\partial b^{(4)}}{\partial \alpha^2} = 3,496242;$$

$$B^{(1)} = -2,29929;\ B^{(2)} = 6,56703;\ B^{(3)} = 1,03704;\ B^{(4)} = 0,35855;$$

$$C^{(1)} = 9,82773;\ C^{(2)} = -11,17268;\ C^{(3)} = -1,38072;\ C^{(4)} = -0,41874;$$

$$M^{(-2)} = 69,35075;\ M^{(-3)} = 114,9663;\ N^{(-3)} = 88,45964;$$

$$\mathfrak{M}^{(-2)} = 405,054;\ \mathfrak{M}^{(-3)} = 251,787;\ \mathfrak{N}^{(-2)} = 320,096;\ \mathfrak{N}^{(-3)} = 194,875.$$

Perturbations de la TERRE par l'action de MARS.

$$\alpha = 0,6563003;\ \nu = 1,8808143;\ b^{(1)} = 0,804563;\ b^{(2)} = 0,405584;$$

$$b^{(3)} = 0,224598;\ \frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} = 1,228078;\ \frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = 1,871211;\ \frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha} = 1,601236;$$

$$\frac{\partial b^{(3)}}{\partial \alpha} = 1,24099;\ \frac{\partial\partial b^{(1)}}{\partial \alpha^2} = 4,744671;\ \frac{\partial\partial b^{(2)}}{\partial \alpha^2} = 5,731111;\ \frac{\partial\partial b^{(3)}}{\partial \alpha^2} = 6,05786;$$

$$B^{(1)} = 1,012974;\ B^{(2)} = 14,88294;\ B^{(3)} = -1,195265;\ C^{(2)} = 31,1729;$$

$$N^{(4)} = 35,62545;\ \mathfrak{M}^{(2)} = 583,165;\ \mathfrak{N}^{(2)} = 205,52;\ \mathfrak{N}^{(3)} = 63,503;\ \mathfrak{N}^{(4)} = 77,714.$$

Perturbations de la TERRE par l'action de JUPITER.

$$\alpha = 0,1922646;\ \nu = 11,8618;\ b^{(1)} = 0,195003;\ b^{(2)} = 0,028195;$$

$$\frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} = 0{,}200586;\ \frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = 1{,}043204;\ \frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha} = 0{,}297995;\ \frac{\partial \partial b^{(0)}}{\partial \alpha^2} = 1{,}132355;$$

$$\frac{\partial \partial b^{(1)}}{\partial \alpha^2} = 0{,}466165;\ \frac{\partial \partial b^{(2)}}{\partial \alpha^2} = 1{,}628667;\ B^{(1)} = 0{,}017009;\ B^{(2)} = -0{,}009709;$$

$$C^{(1)} = 0{,}036523;\ C^{(2)} = -0{,}013826;\ M^{(1)} = 0{,}192988;\ N^{(2)} = 0{,}028082;$$

$$N^{(3)} = -0{,}040185;\ \mathfrak{M}^{(1)} = -0{,}092748;\ \mathfrak{M}^{(2)} = 0{,}4791;$$

$$\mathfrak{N}^{(1)} = -0{,}27331;\ \mathfrak{N}^{(2)} = 0{,}065257;\ \mathfrak{N}^{(3)} = -0{,}058491.$$

Les formules précédentes (§. 211.) ne sont pas applicables aux perturbations que la terre éprouve par l'action de la Lune, parceque ces deux planètes ne circulent pas autour du même corps central, ainsi que les formules précédentes le supposent. Mais l'action de la lune sur l'orbite de la terre est beaucoup moins considérable que celle que ce satellite exerce sur le sphéroïde de notre globe, et les inégalités de la terre, dues à l'attraction de la lune, qui dépendent de l'excentricité et de l'inclinaison, sont insensibles. On pourra donc déterminer ces perturbations d'une manière fort simple.

Soit (*Fig.* 39.) les soleil en S, la terre en Y, le lieu de la lune, réduit à l'écliptique, en Y'; supposons que les droites SA et Yy soient dirigées vers le point vernal, et nommons $\odot$, $☾$, les moyennes longitudes géocentriques du soleil et de la lune, $♁ = 180° + \odot$ la longitude héliocentrique de la terre, $r, e,$ les distances du soleil et de la lune à la terre, le demi-grand axe de l'orbite terrestre étant l'unité, m' la masse de la lune, celle du soleil étant l'unité. Cela posé on aura

$$SY = r,\ YY' = e,\ SYY' = ☾ - \odot = w,\ ASY = ♁,\ Y'Yy = ☾.$$

Comme l'action de la lune sur le soleil est insensible, les forces accélératrices qui sollicitent la terre, seront (§. 158.)

$$\frac{B}{r^2} \text{ suivant } YS, \text{ et } \frac{m' B}{e^2} \text{ suivant } YY',$$

qui se décomposeront en les forces

$$\frac{B}{r^2} \sin ♁ \text{ et } -\frac{m' B}{e^2} \sin ☾ \text{ suivant } YX,\ \frac{B}{r^2} \cos ♁ \text{ et } -\frac{m' B}{e^2} \cos ☾ \text{ suivant } XS.$$

Si on substitue $♁ = 180° + \odot$, et $☾ = w + \odot$, on aura les accélérations

$$\text{suivant } XS,\ 2gP = -\frac{m' B}{e^2} \cos (w + \odot) - \frac{B}{r^2} \cos \odot,$$

suivant YX, $2gQ = -\frac{m'B}{e^2}\sin(w+\odot) - \frac{B}{r^2}\sin\odot;$

d'où l'on déduira les équations (§. 17. *n.* 4),

$$o = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} + 2gP, \quad o = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + 2gQ,$$

et en substituant $B = n^2a^3 = n^2$ (§. 163.), n étant le moyen mouvement du soleil pour une seconde,

$$\frac{\partial\partial x}{n^2\partial t^2} = \frac{m'}{e^2}\cos(w+\odot) + \frac{\cos\odot}{r^2}, \quad \frac{\partial\partial y}{n^2\partial t^2} = \frac{m'}{e^2}\sin(w+\odot) + \frac{\sin\odot}{r^2};$$ d'où il viendra

$$\text{I. } o = \frac{\partial\partial x\sin\odot - \partial\partial y\cos\odot}{n^2\partial t^2} + \frac{m'\sin w}{e^2}, \quad \text{II. } o = \frac{\partial\partial x\cos\odot + \partial\partial y\sin\odot}{n^2\partial t^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{m'\cos w}{e^2}.$$

Mais $x = SX = r\cos\text{♉} = -r\cos\odot$, $y = XY = -r\sin\odot$, donc
$ddx\sin\odot - ddy\cos\odot = r\partial\partial\odot + 2dr\partial\odot$, $ddx\cos\odot + ddy\sin\odot = r\partial\odot^2 - ddr$,
d'où il viendra

$$\text{I. } o = \frac{r\partial\partial\odot + 2\partial r\partial\odot}{n^2\partial t^2} + \frac{m'\sin w}{e^2}, \quad \text{II. } o = \frac{r\partial\odot^2 - \partial\partial r}{n^2\partial t^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{m'\cos w}{e^2}.$$

Supposons $r = 1 + p$, $\frac{\partial\odot}{n\partial t} = 1 + q$, $\partial\odot$ et ndt étant les mouvemens vrai et moyen du soleil pour le tems dt, et p, q, exprimant les perturbations du rayon vecteur et de la longitude, que nous cherchons ici. Cela posé, les équations précédentes deviendront

$$\text{I. } o = \frac{(1+p)\partial q + 2(1+q)\partial p}{n\partial t} + \frac{m'\sin w}{e^2}, \quad \text{II. } o = \frac{\partial\partial p}{n^2\partial t^2} - (1+p)(1+q)^2 + \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{m'\cos w}{e^2};$$

d'où l'on tirera, en négligeant le carré de p, q, et substituant $dw = \partial☾ - \partial\odot = \lambda ndt$,

$$\text{I. } dq + 2dp = -\frac{m'\partial w\sin w}{\lambda e^2}, \quad \text{II. } \frac{\lambda^2\partial\partial p}{\partial w^2} = 3p + 2q - \frac{m'\cos w}{e^2}.$$

L'intégration de I. donne

$$\text{III. } q + 2p = C + \frac{m'\cos w}{\lambda e^2};$$

ce qui étant substitué en II, donnera

$$\text{II. } \frac{\lambda^2\partial\partial p}{\partial w^2} + p = 2C - \frac{m'}{e^2}\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)\cos w,$$

équation dont l'intégrale doit avoir la forme

$$p = A + B\cos w; \text{ d'où il vient } \frac{\partial\partial p}{\partial w^2} = -B\cos w, \text{ donc}$$

$$\text{II. } o = A - 2C + B(1-\lambda^2)\cos w + \frac{m'(\lambda-2)}{\lambda e^2}\cos w, \text{ partant}$$

$$A = 2C, \quad B = \frac{m'(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda^2 - 1)e^2}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation III, il viendra

$$q \text{ ou } \frac{\partial \odot}{n\,\partial t} - 1 = -3C + \frac{m'}{\lambda e^2}\left\{1 - \frac{2(\lambda - 2)}{\lambda^2 - 1}\right\} \cos w, \text{ donc}$$

$$\partial \odot = (1 - 3C)\, n\,dt + \frac{m' \partial w (\lambda^2 - 2\lambda + 3)}{\lambda^2(\lambda^2 - 1)e^2} \cos w.$$

Le premier terme du second membre, qui exprime le moyen mouvement du soleil, doit être égal à $n\,dt$, d'où l'on conclura $C = 0$ et $A = 0$. On aura donc les inégalités

du *rayon vecteur*, $m'au = p = B \cos w = \frac{m'(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda^2 - 1)e^2} \cos w$,

et de la *longitude*, $m'U = f\partial \odot = \frac{m'(\lambda^2 - 2\lambda + 3)}{\lambda^2(\lambda^2 - 1)e^2} \sin w$.

Si l'on suppose les moyens mouvemens diurnes, du soleil $= 59' \, 8'',3$, de la lune $= 13^\circ 10' 35''$, le mouvement synodique sera $13^\circ 10' 35'' - 59' 8'',3 = 43886'',7$; donc

$$\lambda = \frac{\partial w}{n\,\partial t} = \frac{43886,7}{3548,3} = 12,368373.$$

Les valeurs des parallaxes moyennes de la lune et du soleil, $57' \, 1''$ et $8'',6$ donnent

$$e = \frac{6,6}{3421} = 0,002514.$$

Ainsi en supposant (§. 65.) $m' = \frac{1}{27673626}$, on aura

$$m'au = 31,54 \,.\, \cos(\text{☾} - \odot), \quad m'U = 6'',66 \sin(\text{☾} - \odot).$$

Si l'on ajoute ces inégalités avec celles qui résultent des perturbations des planètes, à l'aide des formules X — XIII (§. 211.) et des quantités précédentes, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$, $M^{(-2)}$, etc. on aura

l'inégalité du *rayon vecteur de la Terre* $=$

$$0,43 + 31,54.\cos(\text{☾} - \odot) - 6,26.\cos(\text{♀} - \text{♁}) + 17,87.\cos 2(\text{♀} - \text{♁}) + 2,82.\cos 3(\text{♀} - \text{♁})$$
$$+ 0,98 \,.\, \cos 4(\text{♀} - \text{♁}) - 3,17 \,.\, \cos(3\,\text{♁} - 2\,\text{♀} - \varpi)$$
$$- 5,25 \,.\, \cos(4\,\text{♁} - 3\,\text{♀} - \varpi) + 1,65 \,.\, \cos(4\,\text{♁} - 3\,\text{♀} - \varpi')$$
$$+ 0,39.\cos(\text{♂} - \text{♁}) + 5,70.\cos 2(\text{♂} - \text{♁}) - 0,43.\cos 3(\text{♂} - \text{♁}) + 1,27.\cos(4\,\text{♂} - 3\,\text{♁} - \varpi')$$
$$+ 15,94 \,.\, \cos(\text{♃} - \text{♁}) - 9,10 \,.\, \cos 2(\text{♃} - \text{♁}) - 3,04 \,.\, \cos(2\,\text{♃} - \text{♁} - \varpi)$$
$$+ 1,27 \,.\, \cos(2\,\text{♃} - \text{♁} - \varpi') - 1,81 \,.\, \cos(3\,\text{♃} - 2\,\text{♁} - \varpi');$$

et de la *longitude de la Terre* $=$

$6'',66 . \sin(☾ - ⊙) + 5'',52 . \sin(♀ - ♁) - 6'',27 . \sin 2(♀ - ♁) - 0'',78 . \sin 3(♀ - ♀)$
$- 0'',24 . \sin 4(♀ - ♁) - 3'',82 . \sin(3♁ - 2♀ - ϖ) + 1'',23 . \sin(3♁ - 2♀ - ϖ')$
$- 2'',37 . \sin(4♁ - 3♀ - ϖ) + 0'',75 . \sin(4♁ - 3♀ - ϖ') + 2'',46 . \sin(♂ - ♁)$
$- 0'',77 . \sin(2♂ - ♁ - ϖ) + 1'',51 . \sin(2♂ - ♁ - ϖ') + 0'',47 . \sin(3♂ - 2♁ - ϖ')$
$+ 0'',57 . \sin(4♂ - 3♁ - ϖ') + 7'',06 . \sin(♃ - ♁) - 2'',67 . \sin 2(♃ - ♁)$
$+ 0'',30 . \sin(♃ - ϖ) - 2'',45 . \sin(♃ - ϖ') - 1'',49 . \sin(2♃ - ♁ - ϖ)$
$+ 0'',61 . \sin(2♃ - ♁ - ϖ') - 0'',54 . \sin(3♃ - 2♁ - ϖ').$

§. 219. TABLE VII.

Inégalités séculaires de MARS, dues à l'action des Planètes

	Mercure	*Vénus*	*La Terre*	*Jupiter*	*Saturne*	*Uranus*
I − I′	+ 2°.3′.57″.	−26°.51′.12″.	— — —	− 50°.24′.6″.	−63°.54′.19″.	−24°.49′.46″.
I′ − ϖ	+101.57.23.	+ 156.12.37.	+127°.5′.41″.	+ 38.44.11.	+ 116.44.35.	− 165.2.42.
α	3,936194	2,106490	1,523693	0,292952	0,159752	0,079428
$b^{(0)}$	0,516616	1,011002	1,503670	2,045112	2,012945	2,003167
$b^{(1)}$	0,066171	0,247627	0,528035	0,302922	0,161305	0,079617
$c^{(0)}$	0,038083	0,376967	1,938202	2,444762	2,119585	2,028674
$c^{(1)}$	0,014165	0,246544	1,619204	1,040206	0,503071	0,241129
δθ	+167″,3358	− 5047″,018	0	− 271″,8886	− 86″,50702	− 1″,48587
δJ	+105817″,8	+ 120168″,1	− 647572″,1	− 8414″,89	− 899″,8781	− 162″,629
δγ	+2394″,208	+ 299″,7594	+ 6664″,79	+ 167″,8951	+ 22″,08026	− 0″,31298
δϖ	+43250″,3	+ 195754″,8	+ 701683″,2	+ 13130″,92	+ 2331″,096	+ 274″,635
m′δθ	+0″,000083	− 0″,01[illegible]	0	− 0″,254791	− 0″,024478	− 0″,000976
m′δJ	+0″,052235	+ 0″,327041	− 1″,825229	− 7″,885832	− 0″,254229	− 0″,008338
n′δγ	+0″,001182	+ 0″,000816	+ 0″,018785	+ 0″,157339	+ 0″,016248	− 0″,000016
n′δϖ	+0″,021350	+ 0″,532703	+ 1″,97774	+12″,305357	+ 0″,659605	+ 0″,014081

Variation annuelle de l'inclinaison de Mars = − 0″,293001;
Mouvement des noeuds relativement aux étoiles fixes = − 9″,594752;
Variation de l'excentricité = + 0″,184354 = + 0,000000893773;
Mouvement des apsides relativement aux étoiles = + 15″,510888.

§. 220. Pour les inégalités périodiques de *Mars*, nous aurons besoin des quantités suivantes.

Perturbations de MARS par l'action de VÉNUS.

$\nu = 0{,}3270851$; $b^{(1)} = 0{,}247627$; $\frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = -0{,}259927$; $\frac{\partial \partial b^{(1)}}{\partial \alpha^2} = 0{,}425741$;

$M^{(-1)} = -11{,}9340$; $\mathfrak{M}^{(-1)} = -21{,}3375$.

Perturbations de MARS par l'action de la TERRE.

$\nu = 0{,}5316846$; $b^{(1)} = 0{,}528035$; $b^{(2)} = 0{,}216185$; $b^{(3)} = 0{,}147404$;

$b^{(4)} = 0{,}085301$; $\frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} = -1{,}33402$; $\frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = -0{,}875518$; $\frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha} = -0{,}627347$;

$\frac{\partial b^{(3)}}{\partial \alpha} = -0{,}447554$; $\frac{\partial b^{(4)}}{\partial \alpha} = -0{,}316256$; $\frac{\partial \partial b^{(1)}}{\partial \alpha^2} = 2{,}421244$; $\frac{\partial \partial b^{(2)}}{\partial \alpha^2} = 2{,}115448$;

$\frac{\partial \partial b^{(3)}}{\partial \alpha^2} = 1{,}78557$; $\frac{\partial \partial b^{(4)}}{\partial \alpha^2} = 1{,}460097$; $B^{(1)} = -4{,}05753$; $B^{(2)} = 1{,}1303$; $B^{(3)} = 0{,}2589$;

$C^{(1)} = 11{,}1686$; $C^{(2)} = -1{,}5446$; $M^{(1)} = 5{,}3136$; $M^{(-1)} = -20{,}0641$; $M^{(-2)} = 46{,}4651$;

$M^{(-3)} = -7{,}1727$; $N^{(-1)} = -40{,}2315$; $N^{(-2)} = 32{,}7501$; $N^{(-3)} = -5{,}1773$;

$\mathfrak{M}^{(1)} = -11{,}9989$; $\mathfrak{M}^{(-1)} = 173{,}6895$; $\mathfrak{M}^{(-2)} = 111{,}651$;

$\mathfrak{N}^{(-1)} = 486{,}921$; $\mathfrak{N}^{(-2)} = 80{,}4095$.

Perturbations de MARS par l'action de JUPITER.

$\nu = 6{,}3067343$; $b^{(1)} = 0{,}302922$; $b^{(2)} = 0{,}066812$; $b^{(3)} = 0{,}016357$;

$\frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} = 0{,}324004$; $\frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = 1{,}105998$; $\frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha} = 0{,}473717$; $\frac{\partial b^{(3)}}{\partial \alpha} = 0{,}172096$;

$\frac{\partial \partial b^{(0)}}{\partial \alpha^2} = ,338759$; $\frac{\partial \partial b^{(1)}}{\partial \alpha^2} = 0{,}794557$; $\frac{\partial \partial b^{(2)}}{\partial \alpha^2} = 1{,}871538$, $\frac{\partial \partial b^{(3)}}{\partial \alpha^2} = 1{,}258858$;

$B^{(1)} = 0{,}054932$; $B^{(2)} = -0{,}047584$; $B^{(3)} = -0{,}004869$; $C^{(1)} = 0{,}126441$;

$C^{(2)} = -0{,}070372$; $C^{(3)} = -0{,}005666$; $M^{(1)} = 0{,}0813$; $M^{(-1)} = -0{,}06568$; $M^{(2)} = 0{,}45096$;

$M^{(-2)} = 0{,}0414$; $M^{(3)} = -0{,}0862$; $N^{(1)} = 0{,}04579$; $N^{(2)} = 0{,}10111$; $N^{(3)} = -0{,}24606$;

$N^{(4)} = -0{,}02963$; $\mathfrak{M}^{(1)} = -0{,}3042$, $\mathfrak{M}^{(-1)} = 0{,}15943$; $\mathfrak{M}^{(2)} = 1{,}30811$, $\mathfrak{M}^{(-2)} = -0{,}103$;

$\mathfrak{M}^{(3)} = -0{,}12788$; $\mathfrak{N}^{(1)} = -0{,}57753$; $\mathfrak{N}^{(2)} = 0{,}27903$; $\mathfrak{N}^{(3)} = -0{,}38401$.

Perturbations de MARS par l'action de SATURNE.

$\nu = 15{,}661394$; $b^{(1)} = 0{,}261305$; $b^{(2)} = 0{,}029347$; $\frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} = 0{,}164463$;

$\frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = 1{,}029493$; $\frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha} = 0{,}244843$; $\frac{\partial \partial b^{(0)}}{\partial \alpha^2} = 1{,}090095$; $\frac{\partial \partial b^{(1)}}{\partial \alpha^2} = 1{,}596248$;

$B^{(1)} = 0{,}010376$; $B^{(2)} = -0{,}005129$; $C^{(1)} = 0{,}021885$; $C^{(2)} = -0{,}007243$;

$M^{(2)} = 0{,}138565$; $\mathfrak{M}^{(2)} = 0{,}31467$; $\mathfrak{N}^{(1)} = -0{,}201895$.

Il en résulte

l'inégalité du rayon vecteur de Mars =

$$\begin{gathered}
-4{,}4 + 4{,}61 \,.\, \cos(2♂ - ♀ - \varpi) \\
-17{,}43 \,.\, \cos(♁ - ♂) + 4{,}85 \,.\, \cos 2(♁ - ♂) + 1{,}11 \,.\, \cos 3(♁ - ♂) \\
-2{,}12 \,.\, \cos(♁ - \varpi) \\
+8{,}02 \,.\, \cos(2♂ - ♁ - \varpi) - 2{,}9 \,.\, \cos(2♂ - ♁ - \varpi') \\
-18{,}58 \,.\, \cos(3♂ - 2♁ - \varpi) + 2{,}36 \,.\, \cos(3♂ - 2♁ - \varpi') \\
+2{,}87 \,.\, \cos(4♂ - 3♁ - \varpi) - 0{,}37 \,.\, \cos(4♂ - 3♁ - \varpi') \\
+78{,}44 \,.\, \cos(♃ - ♂) - 67{,}94 \,.\, \cos 2(♃ - ♂) - 6{,}95 \,.\, \cos 3(♃ - ♂) \\
+3{,}58 \,.\, \cos(♂ - \varpi) - 10{,}81 \,.\, \cos(♃ - \varpi) \\
-59{,}97 \,.\, \cos(2♃ - ♂ - \varpi) + 11{,}46 \,.\, \cos(3♃ - 2♂ - \varpi) \\
+3{,}15 \,.\, \cos(♃ - \varpi') + 7{,}0 \,.\, \cos(2♃ - ♂ - \varpi') \\
-16{,}93 \,.\, \cos(3♃ - 2♂ - \varpi') - 2{,}04 \,.\, \cos(4♃ - 3♂ - \varpi') \\
+8{,}73 \,.\, \cos(2♂ - ♃ - \varpi) - 6{,}4 \,.\, \cos(3♂ - 2♃ - \varpi) \\
+4{,}47 \,.\, \cos(♄ - ♂) - 2{,}21 \,.\, \cos 2(♄ - ♂) \\
-5{,}56 \,.\, \cos(2♄ - ♂ - \varpi);
\end{gathered}$$

l'inégalité de la longitude de Mars =

$$\begin{gathered}
1'',12 \,.\, \sin(2♂ - ♀ - \varpi) \\
+6'',49 \,.\, \sin(♁ - ♂) - 0'',9 \,.\, \sin 2(♁ - ♂) \\
+0'',65 \,.\, \sin(♁ - \varpi) \\
-9'',4 \,.\, \sin(2♂ - ♁ - \varpi) + 4'',75 \,.\, \sin(2♂ - ♁ - \varpi') \\
-6'',05 \,.\, \sin(3♂ - 2♁ - \varpi) + 0'',78 \,.\, \sin(3♂ - 2♁ - \varpi') \\
+24'',44 \,.\, \sin(♃ - ♂) - 13'',6 \,.\, \sin 2(♃ - ♂) - 1'',1 \,.\, \sin 3(♃ - ♂) \\
+5'',49 \,.\, \sin(♃ - \varpi) - 5'',38 \,.\, \sin(♃ - \varpi') \\
-23'',56 \,.\, \sin(2♃ - ♂ - \varpi) + 2'',6 \,.\, \sin(2♃ - ♂ - \varpi') \\
+2'',3 \,.\, \sin(3♃ - 2♂ - \varpi) - 3'',58 \,.\, \sin(3♃ - 2♂ - \varpi') \\
-2'',87 \,.\, \sin(2♂ - ♃ - \varpi) + 1'',85 \,.\, \sin(3♂ - 2♃ - \varpi) \\
+1'',28 \,.\, \sin(♄ - ♂) - 0'',42 \,.\, \sin 2(♄ - ♂) \\
-0'',66 \,.\, \sin(♄ - \varpi') \\
-1'',71 \,.\, \sin(2♄ - ♂ - \varpi).
\end{gathered}$$

§. 221.

TABLE VIII.

Inégalités séculaires de JUPITER, dues à l'action des Planètes

	Mercure	*Vénus*	*La Terre*	*Mars*	*Saturne*	*Uranus*
J − J′	+52°.28′.3″.	+23°.32′.54″.	— — —	+50°.24′.6″.	−13°.30′.13″.	+25°.34′.20″.
ϖ′ − ϖ	+63. 13.12.	+117.28.26.	+88°.21′.30″.	−38. 44.11.	+78. 0. 24.	+156.13. 7.
α	13,4363	7,190563	5,2011664	3,413526	0,545317	0,2711298
$b^{(0)}$	0,149057	0,279502	0,388160	0,599120	2,180235	2,038359
$b^{(1)}$	0,005551	0,019483	0,037492	0,088742	0,620641	0,278966
$c^{(0)}$	0,000835	0,005621	0,015468	0,061465	4,358387	2,372983
$c^{(1)}$	0,000092	0,001164	0,004400	0,026152	3,185493	0,938794
δθ	+44″,6573	+38″,943	0	+207″,15	−263″,14	+10″,987
δJ	+1036″,52	+2250″,28	−3251″,03	−855″,16	+21881″,24	−884″,382
δγ	+7″,81756	+1″,74	+13″,07	−175″,67	+929″,178	+11″,91
δϖ	+376″,746	+1662″,82	+3243″,26	+3778″,13	+21776″,85	+2445″,98
m′δθ	+0″,000022	+0″,000106	0	+0″,000079	−0″,074451	+0″,000563
m′δJ	+0″,000512	+0″,006124	−0″,009163	−0″,000328	+6″,191497	−0″,045344
mδγ	+0″,000004	+0″,000005	+0″,000037	−0″,000067	+0″,262919	+0″,000611
mδϖ	+0″,000186	+0″,004525	+0″,009141	+0″,001448	+0″,161951	+0″,125409

Variation annuelle de l'inclinaison de Jupiter = − 0″,073688;
Mouvement des noeuds par rapport aux étoiles fixes = + 6″,143298;
Variation de l'excentricité = + 0″,263509 = + 0,00000127753;
Mouvement des apsides par rapport aux étoiles = + 6″,302667.

§. 222.

TABLE IX.

Inégalités séculaires de SATURNE, dues à l'action des Planètes

	Mercure	*Vénus*	*La Terre*	*Mars*	*Jupiter*	*Uranus*
$I-J'$	+65°.58′.16″.	+37°.3′.7″.	— — —	+63°.54′.19″.	+13°.30′.23″.	+39°.4′.33″.
$\varpi'-\varpi$	−14. 47. 12.	+39.28. 2.	+10°.21′.6″.	−116.44.3[illegible]	−78. 0. 24.	+78. 12.43.
α	24,63941	13,18601	9,53787	6,25970	1,833795	0,497[illegible]96
$b^{(0)}$	0,081204	0,151895	0,210271	0,321572	1,188920	2,144440
$b^{(1)}$	0,001648	0,005764	0,011038	0,025769	0,338446	0,552007
$c^{(0)}$	0,000134	0,000884	0,002363	0,008641	0,706761	3,750905
$c^{(1)}$	0,000008	0,000100	0,000370	0,002051	0,516[illegible]64	2,547952
$\delta\theta$	+6″,114	+6″,8535	0	+25″,64	+102″,372	+58″,9688
δJ	[illegible]8″,066	+16″,580	−370″,348	−595″,62	−9319″,089	−5260″,68
$\delta\gamma$	−0″,146	+0″,079	+0″,1476	−14″,63	−588″,55[illegible]	+19[illegible]″,113
$\delta\varpi$	+44″,673	+190″,134	+355″,965	+1015″,25	+16880″,79	+6221″,75
$n'\delta\theta$	+0″,000003	+0″,000019	0	+0″,000010	+0″,0959[illegible]6	+0″,003023
$n'\delta J$	+0″,000004	+0″,000045	−0″,001044	−0″,00022[illegible]	−8″,733182	−0″,269723
$n'\delta\gamma$	−0,0000000	+0″,00000[illegible]	+0″,00000[illegible]	−0″,00000[illegible]	−0″,551549	+0″,009747
$n'\delta\varpi$	+0″,000022	+0″,000517	+0″,00100[illegible]	+0″,000389	+15″,819465	+0″,318999

Variation annuelle de l'inclinaison de Saturne = + 0″,098991;

Mouvement des noeuds relativement aux étoiles fixes = − 9″,004128;

Variation de l'excentricité = − 0″,541808 = − 0,000002626 76;

Mouvement des apsides relativement aux étoiles = + 16″,140395.

§. 223. TABLE X.

Inégalités séculaires d'URANUS, dues à l'action des Planètes

	Mercure	*Vénus*	*La Terre*	*Mars*	*Jupiter*	*Saturne*
J—J'	+26°.53'.43".	-2°. 1'. 26'.	— — —	+24°.49'.46".	-25°.34'.20".	-39°. 4'.33".
ϖ'—ϖ	-92. 59. 55.	-38. 44. 41.	-67°.51'.37".	+165. 2. 42.	-156.13. 7.	-78. 12.43.
a	49,55669	26,52073	19,1833	12,5900	3,68827	2,011277
$b^{(0)}$	0,040361	0,075440	0,104328	0,159108	0,552660	1,066208
$b^{(1)}$	0,000407	0,001422	0,002710	0,006324	0,075636	0,274456
$c^{(0)}$	0,000016	0,000108	0,000285	0,001017	0,047296	0,461020
$c^{(1)}$	0,000001	0,000006	0,000022	0,000121	0,018711	0,313171
$\delta\theta$	+0",2618	-0",0345	0	+1",002	-9",7215	-134",12
δJ	+33",515	+55",877	-31",597	+86",481	+523"	+73[illegible]",524
$\delta\gamma$	-0",0224	-0",0034	-0",032	+0",176	-6",4020	-161",337
$\delta\varpi$	+4",7397	+16",402	+31",319	+87",977	+1292",83	+4163",795
$m'\delta\theta$	+0",000000	-0",000000	0	+0",000000	-0",009110	-0",037951
$m'\delta J$	+0",000017	+0",000152	-0",000089	+0",000033	+0",490118	+2",079049
$m'\delta\gamma$	-0",000000	-0",000000	-0",000000	+0",000000	-0",005999	-0",045652
$m'\delta\varpi$	+0",000002	+0",000045	+0",000088	+0",000034	+1",211546	+1",178184

Variation annuelle de l'inclinaison d'Uranus $= -0'',047061$;

Mouvement des noeuds relativement aux étoiles fixes $= +2'',569280$;

Variation de l'excentricité $= -0'',051651 = -0,0000002504 1$;

Mouvement des apsides relativement aux étoiles $= +2'',389898$.

§. 224. Développons maintenant, suivant les formules X — XIII (§. 211.), les inégalités périodiques de Jupiter, qui sont indépendantes des excentricités, et celles qui dépendent de leur première puissance. Nous ne considèrerons que celles qui sont dues à l'action de Saturne, toutes les autres étant au dessous d'une seconde: pour cela nous aurons besoin des quantités suivantes.

$r = 2,4832806$; $b^{(1)} = 0,6206406$; $b^{(2)} = 0,2576379$; $b^{(3)} = 0,117975$; $b^{(4)} = 0,0565522$;

$b^{(5)} = 0{,}027836$; $b^{(6)} = 0{,}0139345$; $b^{(7)} = 0{,}0070481$; $\frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} + 0{,}808789$; $\frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = 1{,}483154$;

$\frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha} = 1{,}10516$; $\frac{\partial b^{(3)}}{\partial \alpha} = 0{,}72655$; $\frac{\partial b^{(4)}}{\partial \alpha} = 0{,}453285$; $\frac{\partial b^{(5)}}{\partial \alpha} = 0{,}274717$; $\frac{\partial b^{(6)}}{\partial \alpha} = 0{,}163506$;

$\frac{\partial b^{(7)}}{\partial \alpha} = 0{,}096019$; $\frac{\partial \partial b^{(0)}}{\partial \alpha^2} = 2{,}875229$; $\frac{\partial \partial b^{(1)}}{\partial \alpha^2} = 2{,}552788$; $\frac{\partial \partial b^{(2)}}{\partial \alpha^2} = 3{,}52104$;

$\frac{\partial \partial b^{(3)}}{\partial \alpha^2} = 3{,}533622$; $\frac{\partial \partial b^{(4)}}{\partial \alpha^2} = 2{,}995647$; $\frac{\partial \partial b^{(5)}}{\partial \alpha^2} = 2{,}302428$;

$aA^{(1)} = -0{,}041075$; $aA^{(2)} = -0{,}140494$; $aA^{(3)} = -0{,}064334$; $aA^{(4)} = -0{,}030839$;

$aA^{(5)} = -0{,}01518$; $aA^{(6)} = -0{,}007599$; $aA^{(7)} = -0{,}003843$; $a^2 \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} = -0{,}24051$;

$a^2 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} = -0{,}143676$; $a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} = -0{,}328643$; $a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a} = -0{,}216055$;

$a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a} = -0{,}134794$; $a^2 \frac{\partial A^{(5)}}{\partial a} = -0{,}081693$; $a^2 \frac{\partial A^{(6)}}{\partial a} = -0{,}048622$;

$\frac{\partial A^{(7)}}{\partial a} = -0{,}028553$; $a^3 \frac{\partial \partial A^{(0)}}{\partial a^2} = -0{,}466252$; $a^3 \frac{\partial \partial A^{(1)}}{\partial a^2} = -0{,}413964$;

$a^3 \frac{\partial \partial A^{(2)}}{\partial a^2} = -0{,}570977$; $a^3 \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2} = -0{,}573018$; $a^3 \frac{\partial \partial A^{(4)}}{\partial a^2} = -0{,}485779$;

$a^3 \frac{\partial \partial A^{(5)}}{\partial a^2} = -0{,}373365$; $B^{(1)} = 0{,}438196$; $B^{(2)} = -1{,}870908$;

$B^{(3)} = -0{,}195148$; $B^{(4)} = -0{,}050559$; $B^{(5)} = -0{,}016733$; $B^{(6)} = -0{,}006253$;

$B^{(7)} = -0{,}002513$; $C^{(1)} = 1{,}351847$; $C^{(2)} = -3{,}329135$; $C^{(3)} = -0{,}277915$;

$C^{(4)} = -0{,}063932$; $C^{(5)} = -0{,}019715$; $M^{(1)} = 1{,}06838$; $M^{(-1)} = -0{,}77807$;

$M^{(2)} = 3{,}92579$; $M^{(-2)} = 1{,}80876$; $M^{(3)} = 6{,}18691$; $M^{(4)} = -1{,}69152$;

$M^{(5)} = -0{,}35854$; $N^{(1)} = 0{,}56531$; $N^{(2)} = 1{,}93922$; $N^{(3)} = 10{,}39194$;

$N^{(4)} = -2{,}78485$; $N^{(5)} = -0{,}59299$; $\mathfrak{M}^{(1)} = -2{,}91627$; $\mathfrak{M}^{(-1)} = 1{,}76434$;

$\mathfrak{M}^{(2)} = 46{,}87836$; $\mathfrak{M}^{(-2)} = 4{,}36148$; $\mathfrak{M}^{(3)} = 15{,}06034$; $\mathfrak{M}^{(-3)} = -0{,}43414$;

$\mathfrak{M}^{(4)} = -2{,}68564$; $\mathfrak{M}^{(5)} = -0{,}47082$; $\mathfrak{N}^{(1)} = -2{,}80763$; $\mathfrak{N}^{(2)} = 16{,}40544$;

$\mathfrak{N}^{(3)} = 24{,}60579$; $\mathfrak{N}^{(4)} = -4{,}52715$; $\mathfrak{N}^{(5)} = -0{,}80599$; $\mathfrak{N}^{(6)} = -0{,}25103$;

$m\,a \,.\, 1000000 = 1471{,}7174$; $\frac{m'}{\sin 1''} = 58{,}3645$; $\gamma = 0{,}048178$; $\gamma' = 0{,}056168$.

On en a conclu

l'inégalité du rayon vecteur de Jupiter =

$-58{,}99 + 644{,}9 . \cos(\text{♄} - \text{♃}) - 2753{,}45 . \cos 2(\text{♄} - \text{♃}) - 287{,}2 . \cos 3(\text{♄} - \text{♃})$
$-74{,}41 . \cos 4(\text{♄} - \text{♃}) - 24{,}63 . \cos 5(\text{♄} - \text{♃}) - 9{,}2 . \cos 6(\text{♄} - \text{♃}) - 3{,}7 . \cos 7(\text{♄} - \text{♃})$

Inégalités périodiques de SATURNE, dues à l'action de JUPITER.

$\nu = 0,4026932$; $a\text{A}^{(1)} = 2,742162$; $a\text{A}^{(2)} = -0,257638$; $a\text{A}^{(3)} = -0,117975$;
$a\text{A}^{(4)} = -0,056552$; $a\text{A}^{(5)} = -0,027836$; $a\text{A}^{(6)} = -0,013934$; $a^2\frac{\partial \text{A}^{(0)}}{\partial a} = 2,621282$;
$a^2\frac{\partial \text{A}^{(1)}}{\partial a} = 4,792234$; $a^2\frac{\partial \text{A}^{(2)}}{\partial a} = 0,860301$; $a^2\frac{\partial \text{A}^{(3)}}{\partial a} = 0,514176$; $a^2\frac{\partial \text{A}^{(4)}}{\partial a} = 0,303737$;
$a^2\frac{\partial \text{A}^{(5)}}{\partial a} = 0,177644$; $a^2\frac{\partial \text{A}^{(6)}}{\partial a} = 0,103097$; $a^3\frac{\partial \partial \text{A}^{(0)}}{\partial a^2} = -6,980667$;
$a^3\frac{\partial \partial \text{A}^{(1)}}{\partial a^2} = -5,23556$; $a^3\frac{\partial \partial \text{A}^{(2)}}{\partial a^2} = -3,972983$; $a^3\frac{\partial \partial \text{A}^{(3)}}{\partial a^2} = -2,871548$;
$a^3\frac{\partial \partial \text{A}^{(4)}}{\partial a^2} = -1,992662$; $a^3\frac{\partial \partial \text{A}^{(5)}}{\partial a^2} = -1,339579$;
$\text{B}^{(1)} = 0,912246$; $\text{B}^{(2)} = 0,154822$; $\text{B}^{(3)} = 0,035809$; $\text{B}^{(4)} = 0,01111$; $\text{B}^{(5)} = 0,003984$;
$\text{B}^{(6)} = 0,001559$; $\text{C}^{(1)} = 0,016331$; $\text{C}^{(2)} = -0,162929$; $\text{C}^{(3)} = -0,033968$;
$\text{C}^{(4)} = -0,010171$; $\text{C}^{(5)} = -0,003605$; $\text{M}^{(-1)} = 4,1341$; $\text{M}^{(-2)} = -2,30723$;
$\text{M}^{(-3)} = -0,40238$; $\text{N}^{(-1)} = 12,53283$; $\text{N}^{(-2)} = -1,44658$; $\mathfrak{M}^{(1)} = 1,05902$;
$\mathfrak{M}^{(2)} = 0,18995$; $\mathfrak{M}^{(-1)} = 16,75257$; $\mathfrak{M}^{(-2)} = -3,15989$; $\mathfrak{M}^{(-3)} = -0,44149$;
$\mathfrak{M}^{(-4)} = -0,128265$; $\mathfrak{N}^{(1)} = 0,13547$; $\mathfrak{N}^{(2)} = 0,30968$; $\mathfrak{N}^{(-1)} = 44,87295$;
$\mathfrak{N}^{(-2)} = -1,89945$; $\mathfrak{N}^{(-3)} = -0,26215$; $\mathfrak{N}^{(-4)} = -0,07551$;

$m'a \,.\, 1000000 = 8938,21$; $\frac{m'}{\sin 1''} = 193,2965$; $\gamma = 0,056168$; $\gamma' = 0,048178$.

Inégalités de SATURNE, dues à l'action d'URANUS.

$\nu = 2,8523413$; $\alpha = 0,4971964$; $b^{(1)} = 0,552007$; $b^{(2)} = 0,208313$; $b^{(3)} = 0,086834$;
$b^{(4)} = 0,037909$; $\frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} = 0,683055$; $\frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = 1,373806$; $\frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha} = 0,949128$; $\frac{\partial b^{(3)}}{\partial \alpha} = 0,572896$;
$\frac{\partial b^{(4)}}{\partial \alpha} = 0,327198$; $\frac{\partial \partial b^{(0)}}{\partial \alpha^2} = 3,377102$; $\frac{\partial \partial b^{(1)}}{\partial \alpha^2} = 2,017767$; $\frac{\partial \partial b^{(2)}}{\partial \alpha^2} = 2,992245$;
$\frac{\partial \partial b^{(3)}}{\partial \alpha^2} = 2,881218$; $\text{B}^{(1)} = 0,304936$; $\text{B}^{(2)} = -0,805899$; $\text{B}^{(3)} = -0,09822$;
$\text{B}^{(4)} = -0,024171$; $\text{C}^{(1)} = 0,8745$; $\text{C}^{(2)} = -1,36376$; $\text{C}^{(3)} = -0,13495$;
$\text{M}^{(3)} = 13,63777$; $\text{N}^{(3)} = 24,5393$; $\mathfrak{M}^{(1)} = -1,92131$; $\mathfrak{M}^{(2)} = 16,79187$;
$\mathfrak{M}^{(3)} = 28,4771$; $\mathfrak{M}^{(-1)} = 1,1306$; $\mathfrak{M}^{(-2)} = -1,8829$; $\mathfrak{N}^{(1)} = -2,4481$;
$\mathfrak{N}^{(2)} = 5,57764$; $\mathfrak{N}^{(3)} = 51,0211$; $\mathfrak{N}^{(4)} = -1,53244$;

$m'a \,.\, 1000000 = 489,0213$; $\frac{m'}{\sin 1''} = 10,5755$; $\gamma = 0,056168$; $\gamma' = 0,04667$.

Inégalité du rayon vecteur de Saturne $=$

$$3891,17+8153,84.\cos(\text{♃}-\text{♄})+1383,84.\cos 2(\text{♃}-\text{♄})+320,07.\cos 3(\text{♃}-\text{♄})$$
$$+99,3.\cos 4(\text{♃}-\text{♄})+35,61.\cos 5(\text{♃}-\text{♄})+13,93.\cos 6(\text{♃}-\text{♄})-342,94.\cos(\text{♄}-\varpi')$$
$$-2075,5.\cos(2\text{♄}-\text{♃}-\varpi)+5397.\cos(2\text{♄}-\text{♃}-\varpi')+1158,33.\cos(3\text{♄}-2\text{♃}-\varpi)$$
$$-622,94.\cos(3\text{♄}-2\text{♃}-\varpi')+202,01.\cos(4\text{♄}-3\text{♃}-\varpi)$$
$$+149,12.\cos(\text{♅}-\text{♄})-394,1.\cos 2(\text{♅}-\text{♄})-48,03.\cos 3(\text{♅}-\text{♄})-11,82.\cos 4(\text{♅}-\text{♄})$$
$$-374,6.\cos(3\text{♅}-2\text{♄}-\varpi)+560,05.\cos(3\text{♅}-2\text{♄}-\varpi');$$

Inégalité de la longitude de Saturne $=$

$$3'',16.\sin(\text{♃}-\text{♄})-31'',49.\sin 2(\text{♃}-\text{♄})-6'',57.\sin 3(\text{♃}-\text{♄})-1'',97.\sin 4(\text{♃}-\text{♄})$$
$$-0'',7.\sin 5(\text{♃}-\text{♄})-11'',5.\sin(\text{♃}-\varpi)+1'',26.\sin(\text{♃}-\varpi')-2'',06.\sin(2\text{♃}-\text{♄}-\varpi)$$
$$+2'',88.\sin(2\text{♃}-\text{♄}-\varpi')-181'',89.\sin(2\text{♄}-\text{♃}-\varpi)+417'',89.\sin(2\text{♄}-\text{♃}-\varpi')$$
$$+34'',31.\sin(3\text{♄}-2\text{♃}-\varpi)-17'',69.\sin(3\text{♄}-2\text{♃}-\varpi')+4'',79.\sin(4\text{♄}-3\text{♃}-\varpi)$$
$$-2'',44.\sin(4\text{♄}-3\text{♃}-\varpi')+1'',39.\sin(5\text{♄}-4\text{♃}-\varpi)-0'',7.\sin(5\text{♄}-4\text{♃}-\varpi')$$
$$+9'',25.\sin(\text{♅}-\text{♄})-14'',42.\sin 2(\text{♅}-\text{♄})-1'',43.\sin 3(\text{♅}-\text{♄})+1'',14.\sin(\text{♅}-\varpi)$$
$$-1'',21.\sin(\text{♅}-\varpi')-9''.97.\sin(2\text{♅}-\text{♄}-\varpi)+2'',75.\sin(2\text{♅}-\text{♄}-\varpi')$$
$$-16'',92.\sin(3\text{♅}-2\text{♄}-\varpi)+25'',18.\sin(3\text{♅}-2\text{♄}-\varpi')-0'',76.\sin(4\text{♅}-3\text{♄}-\varpi')$$
$$-0'',67.\sin(2\text{♄}-\text{♅}-\varpi)+1'',09.\sin(3\text{♄}-2\text{♅}-\varpi).$$

Les grandes inégalités, $-181'',89.\sin(2\text{♄}-\text{♃}-\varpi)+417'',89.\sin(2\text{♄}-\text{♃}-\varpi')$, qui dépendent des excentricités de Saturne et de Jupiter, ont besoin de la correction, due à la variation de ces excentricités, dont il a été parlé (§. 224.). Ces deux termes deviendront, par ce qui précède,

$$-(181'',89-0'',008506.t)\sin(2\text{♄}-\text{♃}-\varpi)+(417'',89+0'',01108.t)\sin(2\text{♄}-\text{♃}-\varpi').$$

§. 226. Les inégalités périodiques qu'Uranus éprouve par l'action de Jupiter et de Saturne, les seules qui soient sensibles, seront calculées avec les quantités suivantes.

Inégalités d'URANUS, dues à l'action de JUPITER.

$$\nu=0,14118;\ \alpha=3,68827;\ aA^{(1)}=13,32437;\ aA^{(0)}=-0,05691;\ a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}=2,11845;$$
$$a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}=14,1777;\ a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}=0,17445;\ a^3\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}=-1,7921;\ B^{(1)}=0,2721;$$
$$B^{(2)}=0,00131;\ C^{(1)}=0,27061;\ \mathfrak{M}^{(1)}=0,136665;\ \mathfrak{M}^{(-1)}=0,40289;\ \mathfrak{R}^{(2)}=0,13561;$$
$$m'a.1000000=17977,2;\ \frac{m'}{\sin 1''}=193,297;\ \gamma=0,04667;\ \gamma'=0,048178.$$

Inégalités d'URANUS, dues à l'action de SATURNE.

$$v = 0{,}3505892;\ \alpha = 2{,}0112774;\ a\mathrm{A}^{(1)} = 3{,}49323;\ a\mathrm{A}^{(2)} = -0{,}20831;$$

$$a\mathrm{A}^{(3)} = -0{,}08683;\ a\mathrm{A}^{(4)} = -0{,}03791;\ a^2\frac{\partial \mathrm{A}^{(0)}}{\partial a} = 2{,}48405;\ a^2\frac{\partial \mathrm{A}^{(1)}}{\partial a} = 5{,}2803;$$

$$a^2\frac{\partial \mathrm{A}^{(2)}}{\partial a} = 0{,}68022;\ a^2\frac{\partial \mathrm{A}^{(3)}}{\partial a} = 0{,}37168;\ a^2\frac{\partial \mathrm{A}^{(4)}}{\partial a} = 0{,}20059;\ a^3\frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(1)}}{\partial a^2} = -4{,}33509;$$

$$a^3\frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(2)}}{\partial a^2} = -3{,}04393;\ a^3\frac{\partial\partial \mathrm{A}^{(3)}}{\partial a^2} = -2{,}02528;\ \mathrm{B}^{(1)} = 0{,}6205.8;\ \mathrm{B}^{(2)} = 0{,}071132;$$

$$\mathrm{B}^{(3)} = 0{,}015576;\ \mathrm{B}^{(4)} = 0{,}004481;\ \mathrm{C}^{(1)} = 0{,}348094;\ \mathrm{C}^{(2)} = -0{,}068757;$$

$$\mathrm{C}^{(3)} = -0{,}014042;\ \mathrm{M}^{(-1)} = 6.03319;\ \mathrm{N}^{(-1)} = 19.24837;\ \mathfrak{M}^{(1)} = 0{,}48909;$$

$$\mathfrak{M}^{(-1)} = 15{,}3543;\ \mathfrak{M}^{(-2)} = -0{,}8604;\ \mathfrak{N}^{(2)} = 0{,}25457;$$

$$\mathfrak{N}^{(-1)} = 43{,}36931;\ \mathfrak{N}^{(-2)} = -0{,}47551;$$

$$m'a\,.\,1000000 = 5428{,}09;\ \frac{m'}{\sin 1''} = 58{,}3645;\ \gamma = 0{,}04667;\ \gamma' = 0{,}056168.$$

Inégalité du rayon vecteur d'Uranus =

$$8594{,}6 + 4891{,}62\,.\cos(\text{♃} - \text{♅}) + 23{,}62\,.\cos 2(\text{♃} - \text{♅})$$
$$+ 3368{,}28.\cos(\text{♄} - \text{♅}) + 386{,}11.\cos 2(\text{♄} - \text{♅}) + 84{,}55.\cos 3(\text{♄} - \text{♅}) + 24{,}32.\cos 4(\text{♄} - \text{♅})$$
$$- 1528{,}39\,.\cos(2\,\text{♅} - \text{♄} - \varpi) + 5868{,}57\,.\cos(2\,\text{♅} - \text{♄} - \varpi');$$

Inégalité de la longitude d'Uranus =

$$52'',31.\sin(\text{♃} - \text{♅}) - 1'',23.\sin(\text{♃} - \varpi) - 3'',63.\sin(2\,\text{♅} - \text{♃} - \varpi) + 1'',26.\sin(2\,\text{♃} - \text{♅} - \varpi')$$
$$+ 20'',32\,.\sin(\text{♄} - \text{♅}) - 4'',01\,.\sin 2(\text{♄} - \text{♅}) - 0'',82\,.\sin 3(\text{♄} - \text{♅})$$
$$- 1'',33\,.\sin(\text{♄} - \varpi) + 0'',83\,.\sin(2\,\text{♄} - \text{♅} - \varpi) - 41'',82\,.\sin(2\,\text{♅} - \text{♄} - \varpi)$$
$$+ 142'',17.\sin(2\,\text{♅} - \text{♄} - \varpi') + 2'',34.\sin(3\,\text{♅} - 2\,\text{♄} - \varpi) - 1'',56.\sin(3\,\text{♅} - 2\,\text{♄} - \varpi').$$

En ajoutant au terme $142'',17\,.\sin(2\,\text{♅} - \text{♄} - \varpi')$ la correction, due à la variation de l'excentricité de Saturne, il deviendra

$$+ (142'',17 - 0'',006649\,.\,t)\sin(2\,\text{♅} - \text{♄} - \varpi').$$

§. 227. Pour calculer les inégalités des trois grandes planètes, qui dépendent de la seconde et de la troisieme puissance des excentricités et des inclinaisons, il faut connaître les variations des fonctions de leurs élémens, que nous avons désignées par $f, g,$ etc. $\mathfrak{f}, \mathfrak{g},$ etc. Ces variations seront calculées par la méthode exposée dans le §. 192. Si l'on multiplie par 200 les variations annuelles, données plus haut (§. 210. 212. 214. 219. 221. 222. 223.),

et qu'on les ajoute avec les élémens, renfermés dans la Table I, on trouvera, pour l'an 2000, les élémens suivans.

TABLE XI.

Elémens des Planètes à l'époque de l'an 2000.

	Inclinaison $=\eta$	*Noeud* $=\text{J}$	*Excentricité* $=\gamma$	*Périhélie* $=\varpi$
☿	6°.59'.35",4	1ˢ.15°.43'.27",5	0,20552202	2ˢ.14°.40'.41",8
♀	3. 23.31, 7	2. 14. 21. 29, 7	0,00673105	4. 8. 29.18, 3
♁	0	— — — —	0,01669600	3. 10. 8.56, 4
♂	1. 50. 1, 4	1. 17. 29. 29.	0,09331275	1. 3. 16. 6, 2
♃	1. 18.37, 3	3. 8. 46. 2,7	0,04843391	0. 11. 29. 35, 5
♄	2. 29.57, 8	3. 21. 25.46,2	0,05564295	3. 0. 2. 47, 1
♅	0. 46.35, 6	2. 12. 59.47,9	0,04662022	5. 17. 29. 40.

Si l'on substitue les valeurs précédentes pour $\theta, \theta', \text{J}, \text{J}', \gamma, \gamma', \varpi, \varpi'$, dans les formules XIV — XVII (§. 210.), on trouvera les variations annuelles des élémens de Jupiter, de Saturne, et d'Uranus, qui auront lieu l'an 2000, ainsi qu'on le verra dans les Tables suivantes.

TABLE XII.

Inégalités séculaires de JUPITER, dues à l'action des Planètes

2000	*Mercure*	*Vénus*	*La Terre*	*Mars*	*Saturne*	*Uranus*
$m'\delta\theta$	+0",000022	+0",000110	0	+0",000080	-0",07005	+0",000565
$m'\delta\text{J}$	+0",000504	+0",006084	—0",009163	—0",000397	+6",31002	-0",045443
$m'\delta\gamma$	+0",000004	+0",000005	+0",000037	—0",000067	+0",260976	+0",000615
$m'\delta\varpi$	+0",000186	+0",00452[illegible]	+0",009145	+0",00144	+6",23[illegible]	[illegible]",125.79

TABLE XIII.

Inégalités séculaires de SATURNE, dues à l'action des Planètes

·000	*Mercure*	*Vénus*	*La Terre*	*Mars*	*Jupiter*	*Uranus*
$n'\delta e$	+0″,000003	+0″,000019	0	+0″,00001	+0″,08977	+0″,00297
$n'\delta J$	+0″,000004	+0″,000045	−0″,001044	−0″,000228	−8″,750664	−0″,26943
$n'\delta\gamma$	−0″,000000	+0″,000000	+0″,00000	−0″,000006	−0″,555572	+0″,009709
$n'\delta\varpi$	+0″,000022	+0″,000517	+0″,001003	+0″,000389	+15″,883750	+0″,316366

TABLE XIV.

Inégalites séculaires d'URANUS, dues à l'action des Planètes

2000	*Mercure*	*Vénus*	*La Terre*	*Mars*	*Jupiter*	*Saturne*
$m'\delta e$	+0″,000000	−0″,00000	0	+0″,000000	−0″,00914	−0″,037506
$m'\delta J$	+0″,000017	+0″,00015	−0″,000089	+0″,000033	+0″,488146	+2″,1299
$m'\delta\gamma$	−0″,000000	−0″,00000	−0″,00000	+0″,000000	−0″,006083	−0″,045095
$m'\delta\varpi$	+0″,000002	+0″,000045	+0″,0000	+0″,000034	+1″,212915	+1″,166960

Si on ajoute ensemble les quantités précédentes, on aura pour l'an 2000, les variations annuelles des élémens de *Jupiter*

$(\delta e) = -0'',069274$; $(\delta J) = +6'',261608$; $(\delta\gamma) = +0'',261570$; $(\delta\varpi) = +6'',370684$;

de *Saturne*

$(\delta e) = +0'',092781$; $(\delta J) = -9'',021317$; $(\delta\gamma) = -0'',545869$; $(\delta\varpi) = +16'',202047$;

d'*Uranus*

$(\delta e) = -0'',046654$; $(\delta J) = +2'',618197$; $(\delta\eta) = -0'',051178$; $(\delta\varpi) = +2'',380044$.

En ôtant ces valeurs de celles qu'on a trouvées pour l'an 1800 (§. 221. 222. 223.), et divisant le résidu par 200 (§. 188.) on trouvera

pour *Jupiter*, $\frac{\partial\partial e}{\partial t^2} = +0'',00002207$; $\frac{\partial\partial J}{\partial t^2} = +0'',00059155$;

$$\frac{\partial\partial\gamma}{\partial t^2} = -0'',000009695 = -0,000000000047; \quad \frac{\partial\partial\varpi}{\partial t^2} = +0'',000340085;$$

pour *Saturne*, $\frac{\partial\partial\theta}{\partial t^2} = -0'',00003105$; $\frac{\partial\partial J}{\partial t^2} = -0'',00008595$;

$\frac{\partial\partial\gamma}{\partial t^2} = -0'',0000203 = -0,00000000000984$; $\frac{\partial\partial\varpi}{\partial t^2} = +0'',00030826$;

pour *Uranus*, $\frac{\partial\partial\theta}{\partial t^2} = +0'',000002035$; $\frac{\partial\partial J}{\partial t^2} = +0'',00044585$;

$\frac{\partial\partial\gamma}{\partial t^2} = +0'',000002365 = +0'',000000000001147$; $\frac{\partial\partial\varpi}{\partial t^2} = -0'',00004927$.

Maintenant on calculera, à l'aide des formules (a) (§. 188.), $[\theta] = \theta + t\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{t^2}{2}\cdot\frac{\partial\partial\theta}{\partial t^2}$ etc. les valeurs des élémens qui répondent aux époques de 2300 et de 2800, savoir $(\theta) = \theta + 500.\delta\theta + 125000.\frac{\partial\partial\theta}{\partial t^2}$, $[\theta] = \theta + 1000.\delta\theta + 500000.\frac{\partial\partial\theta}{\partial t^2}$, etc. $\delta\theta, \delta J$, etc. étant les valeurs trouvées précédemment (§. 221. 222. 223.). On aura donc

pour *Jupiter*, (θ) ou $(\eta) = 1°18'17'',9$; $[\eta] = 1°17'50'',4$;

$(J) = 3^s 9°17'59'',6$; $[J] = 3^s 10°12'53'',1$;

$(\gamma) = 0,0488129$; $[\gamma] = 0,04943243$; $(\varpi) = 0^s 12°1'48'',8$; $[\varpi] = 0^s 12°56'27'',7$;

pour *Saturne*

$(\eta) = 2°30'23'',5$; $[\eta] = 2°31'1''$; $(J) = 3^s 20°40'34'',2$; $[J] = 3^s 19°25'0''$;

$(\gamma) = 0,05484262$; $[\gamma] = 0,05349234$; $(\varpi) = 3^s 1°24'7'',7$; $[\varpi] = 3^s 3°40'33'',4$;

pour *Uranus*

$(\eta) = 0°46'1'',7$; $[\eta] = 0°45'38'',9$; $(J) = 2^s 13°13'9'',2$; $[J] = 2^s 13°36'5'',6$;

$(\gamma) = 0,04654653$; $[\gamma] = 0,04642563$; $(\varpi) = 5^s 17°41'30'',8$; $[\varpi] = 5^s 18°1'7'',3$.

§. 228. Les valeurs de η (*Tab.* I.), (η), $[\eta]$, etc. donneront les quantités f, g, h, k, f, g, etc. (§. 192. 201. 203.) pour les mêmes époques de 1800, 2300, et 2800. On trouvera

pour les perturbations de *Jupiter* par l'action de *Saturne*,

$f = 0,0008802572$; $(f) = 0,0009713649$; $[f] = 0,0010667717$;

$f' = 0,0021477718$; $(f') = 0,0021755360$; $[f'] = 0,0021984111$;

$g = 0,0026625515$; $(g) = 0,0026037114$; $[g] = 0,0025338267$;

$g' = -0,0004835210$; $(g') = -0,0006218457$; $[g'] = -0,0007561840$;

$h = 0,0000936240$; $(h) = -0,0001471504$; $[h] = -0,0003661568$;

$h' = -0,0031534891$; $(h') = -0,0030041111$; $[h'] = -0,0028379065$;

$k = -0,0004569216$; $(k) = -0,0004350892$; $[k] = -0,0004064599$;

$k' = -0,0001469547$; $(k') = -0,0002026719$; $[k'] = -0,0002553911$;

$\mathfrak{f} = 0{,}00006\,6\,761$; $(\mathfrak{f}) = 0{,}0000685o525$; $[\mathfrak{f}] = 0{,}0000757\,6\,6$;
$\mathfrak{f}' = 0{,}0000933294 2$; $(\mathfrak{f}') = 0{,}00009\,97630$; $[\mathfrak{f}'] = 0{,}000094\,0683$;
$\mathfrak{g} = 0{,}000121357o9$; $(\mathfrak{g}) = 0{,}00011797\,6$; $[\mathfrak{g}] = 0{,}0001137o073$;
$\mathfrak{g}' = -0{,}00004764690$; $(\mathfrak{g}') = -0{,}000056\,7\,64$; $[\mathfrak{g}'] = -0{,}0000641\,3o83$;
$\mathfrak{h} = -0{,}00002493 6\,8$; $(\mathfrak{h}) = -0{,}000037587 54$; $[\mathfrak{h}] = -0{,}0000490 5677$;
$\mathfrak{h}' = -0{,}0001499\,759$; $(\mathfrak{h}') = -0{,}00014\,9\,7o6$; $[\mathfrak{h}'] = -0{,}00013 2 6681o$;
$\mathfrak{k} = -0{,}00017702854$; $(\mathfrak{k}) = -0{,}000164\,o652$; $[\mathfrak{k}] = -0{,}0001502 3817$;
$\mathfrak{k}' = -0{,}0000o7 48660$; $(\mathfrak{k}') = 0{,}000012o6658$; $[\mathfrak{k}'] = 0{,}0000\,9\,7909$;
$\mathfrak{l} = -0{,}0000296703$; $(\mathfrak{l}) = -0{,}0000 2283\,76$; $[\mathfrak{l}] = -0{,}00002\,4\,9\,3$;
$\mathfrak{l}' = -0{,}00000 69 20$; $(\mathfrak{l}') = -0{,}000005 4898$; $[\mathfrak{l}'] = -0{,}000007 8043$;
$\mathfrak{m} = -0{,}0000086\,414$; $(\mathfrak{m}) = -0{,}000010 5\,785$; $[\mathfrak{m}] = -0{,}00001 2 9\,7$;
$\mathfrak{m}' = 0{,}00002553921$; $(\mathfrak{m}') = 0{,}000024126\,7$; $[\mathfrak{m}'] = 0{,}0000 257 64$.

On en conclura, au moyen des formules (D) (§. 192.),

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1779163}{10^{13}}, \quad \frac{\partial f'}{\partial t} = \frac{604175}{10^{13}}, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{1066356}{10^{13}}, \quad \frac{\partial g'}{\partial t} = -\frac{2806558}{10^{13}}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{5033068}{10^{13}},$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = \frac{2819294}{10^{13}}, \quad \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{3686 79}{10^{13}}, \quad \frac{\partial k'}{\partial t} = -\frac{1141524}{10^{13}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = \frac{134 19}{10^{13}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{f}'}{\partial t} = \frac{18101}{10^{13}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = -\frac{58914}{10^{13}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{g}'}{\partial t} = -\frac{1 2810}{10^{13}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} = -\frac{264845}{10^{13}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{h}'}{\partial t} = \frac{148126}{10^{11}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial t} = \frac{252977}{10^{14}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{k}'}{\partial t} = \frac{426470}{10^{13}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{l}}{\partial t} = -\frac{407}{10^{13}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{l}'}{\partial t} = -\frac{51150}{10^{13}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} = -\frac{39696}{10^{13}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{m}'}{\partial t} = -\frac{26862}{10^{13}},$$

$$\frac{\partial\partial \mathfrak{f}}{\partial t^2} = \frac{12936}{10^{16}}, \quad \frac{\partial\partial \mathfrak{f}'}{\partial t^2} = -\frac{20654}{10^{16}}, \quad \frac{\partial\partial \mathfrak{g}}{\partial t^2} = -\frac{35500}{10^{16}}, \quad \frac{\partial\partial \mathfrak{g}'}{\partial t^2} = \frac{8942}{10^{16}}, \quad \frac{\partial\partial \mathfrak{h}}{\partial t^2} = \frac{47281}{10^{16}},$$

$$\frac{\partial\partial \mathfrak{h}'}{\partial t^2} = \frac{49137}{10^{16}}, \quad \frac{\partial\partial \mathfrak{k}}{\partial t^2} = \frac{69853}{10^{16}}, \quad \frac{\partial\partial \mathfrak{k}'}{\partial t^2} = -\frac{109627}{10^{16}}, \quad \frac{\partial\partial \mathfrak{l}}{\partial t^2} = \frac{11570}{10^{16}},$$

$$\frac{\partial\partial \mathfrak{l}'}{\partial t^2} = \frac{58}{10^{16}}, \quad \frac{\partial\partial \mathfrak{m}}{\partial t^2} = \frac{7288}{10^{16}}, \quad \frac{\partial\partial \mathfrak{m}'}{\partial t^2} = -\frac{5588}{10^{16}}.$$

Il est aisé de voir, que les nombres précédens donnent en même tems les quantités, relatives aux perturbations de Saturne par l'action de Jupiter, si l'on change f en h, $\mathfrak{f}$ en $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{l}$ en $\mathfrak{m}$, et réciproquement. Les différentielles premières $\frac{\partial f}{\partial t}$, etc. doivent être divisées par le moyen mouvement annuel de la planète troublée, n, et les différentielles secondes par n^2 (§. 194.); et l'on a (§. 203. et *Tab.* I.),

pour *Jupiter*, $n = 0{,}5296907$; $n^2 = 0{,}280572$;

pour *Saturne*, $n = 43996'',8 = 0{,}2133025$; $n^2 = 0{,}045498$;

pour *Uranus*, $n = 15424'',8 = 0{,}0747815$; $n^2 = 0{,}0055923$.

On trouvera par le même procédé, pour les perturbations de *Saturne* par *Uranus*,

$$f = 0{,}0000976240; \quad (f) = -0{,}0001471504; \quad [f] = -0{,}000366568;$$
$$f' = -0{,}0031534891; \quad (f') = -0{,}0030041111; \quad [f'] = -0{,}0028379065;$$
$$g = -0{,}0025490836; \quad (g) = -0{,}0025066293; \quad [g] = -0{,}0024573701;$$
$$g' = -0{,}00061144[illegible]1; \quad (g') = -0{,}0004829717; \quad [g'] = -0{,}0003587263;$$
$$h = -0{,}0009300334; \quad (h) = -0{,}0009024614; \quad [h] = -0{,}0008753702;$$
$$h' = 0{,}0019695768; \quad (h') = 0{,}0019697769; \quad [h'] = 0{,}0019695718;$$
$$k = -0{,}0011135728; \quad (k) = -0{,}0010872020; \quad [k] = -0{,}0010547290;$$
$$k' = -0{,}0003463063; \quad (k') = -0{,}0004183361; \quad [k'] = -0{,}0004875972;$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{50332}{10^{11}}, \quad \frac{\partial f'}{\partial t} = \frac{28193}{10^{11}}, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{7810}{10^{11}}, \quad \frac{\partial g'}{\partial t} = \frac{26117}{10^{11}},$$
$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{5562}{10^{11}}, \quad \frac{\partial h'}{\partial t} = \frac{41}{10^{11}}, \quad \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{4664}{10^{11}}, \quad \frac{\partial k'}{\partial t} = -\frac{14683}{10^{11}}.$$

On aura les quantités relatives aux perturbations d'Uranus par Saturne, si l'on change f en h, et h en f.

§. 229. Relativement à la première équation de Jupiter du second degré (XVIII. XIX. §. 193.), on a

$$c^{(4)} = 0{,}784084; \quad \frac{\partial c^{(4)}}{\partial \alpha} = 7{,}802247; \quad \frac{\partial^2 b^{(3)}}{\partial \alpha^2} = 15{,}45485; \quad \frac{\partial^2 b^{(4)}}{\partial \alpha^2} = 17{,}058155;$$
$$\frac{\partial^2 b^{(5)}}{\partial \alpha^2} = 16{,}655445; \quad a^2 a' \mathfrak{A}^{(4)} = 0{,}233164; \quad a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a} = 1{,}265224;$$
$$a^4 \frac{\partial^2 A^{(3)}}{\partial a^2} = -1{,}366665; \quad a^4 \frac{\partial^2 A^{(4)}}{\partial a^2} = -1{,}508444; \quad a^4 \frac{\partial^2 A^{(5)}}{\partial a^2} = -1{,}472832.$$

Au moyen de ces valeurs, et de celles de $aA^{(3)}$, $aA^{(4)}$, $aA^{(5)}$, $a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}$, etc. qui ont été données dans le §. 224, on trouvera (§. 193.),

$$E = -142{,}072 \,.\, f + 473{,}7702 \,.\, g - 392{,}364 \,.\, h - 13{,}5324 \,.\, k$$
$$+ 278{,}026 \,.\, \frac{\partial f'}{n \partial t} - 926{,}854 \,.\, \frac{\partial g'}{n \partial t} + 767{,}422 \,.\, \frac{\partial h'}{n \partial t} + 26{,}528 \,.\, \frac{\partial k'}{n \partial t};$$
$$F = -287{,}439 \,.\, f + 957{,}6 \,.\, g - 792{,}2 \,.\, h - 27{,}353 \,.\, k$$
$$+ 20635 \,.\, \frac{\partial f'}{n \partial t} - 68795{,}6 \,.\, \frac{\partial g'}{n \partial t} + 56959{,}2 \,.\, \frac{\partial h'}{n \partial t} + 1968{,}8 \,.\, \frac{\partial k'}{n \partial t}.$$

Si l'on substitue les valeurs précédentes de f, g, h, k, $\frac{\partial f'}{n\partial t}$, etc. (§. 228.), et qu'on multiplie E par $m'a.1000000 = 1471,7174$, et F par $\frac{m'}{\sin 1''} = 58,3645$ (§. 224.), on trouvera

$E = 1628,83$; $E' = 1038,35$; $F = 133'',62$; $F' = 84'',454$. On a donc (§. 193.)

$m'au'' = -1628,83.\sin\Phi - 1038,35.\cos\Phi$, $m'U'' = 133'',62.\cos\Phi - 84'',454.\sin\Phi$, Φ étant $5♄ - 3♃$ (§. 193.).

La correction de ces équations, due aux variations des élémens (§. 208.), se trouvera, en mettant $f + t\frac{\partial f}{\partial t}$ à la place de f, etc. Les valeurs précédentes de $\frac{\partial f}{\partial t}$, etc. (§. 228.) donneront

$$E = 1628,83 + t.0,1783;\ E' = 1038,35 - t.0,3688;$$

d'où il viendra

$$m'au'' = -(1628,83 + t.0,1783)\sin\Phi - (1038,35 - t.0,3688)\cos\Phi.$$

En faisant donc, suivant la méthode du §. 208.

$m'au'' = -(P + \zeta t)\cos(p - \Phi + \xi t) = -(P + \zeta t)\cos(p - \Phi) + P\xi t\sin(p - \Phi)$, on aura, en comparant ces deux valeurs de $m'au''$,

$$P\sin p = 1628,83;\quad P\cos p = 1038,35;$$

$$P\xi\sin p - \zeta\cos p = 0,3688;\ P\xi\cos p + \zeta\sin p = 0,1783.$$

Les deux dernières donnent

$$\zeta = 0,1783.\sin p - 0,3688.\cos p,\ \xi = \frac{0,3688.\sin p + 0,1783.\cos p}{P};$$

et l'on conclura des deux premières,

$$\text{tang}\, p = \frac{1628,83}{1038,35},\quad P = \frac{1628,83}{\sin p};\ \text{donc}\ p = 57°29',\ P = 1931,64.$$

En substituant ces valeurs de p et P, on aura

$$\zeta = -0,0479;\ \xi = 0,0002106 = 43'',44;\ \text{d'où il vient}$$

XVIII. $m'au'' = -(1931,64 - t.0,0479)\cos(3♃ - 5♄ + 57°29' + t.43'',44)$.

Par le même procédé on trouvera

$$F = 133'',62 + 0'',014268.t,\ F' = 84'',454 - 0'',029551.t,$$

donc en faisant

$$m'U'' = (P + \zeta t)\sin(p - \Phi + \xi t),\ \text{on aura}$$

$$p = 57°42'19'',\ P = 158'',072;\ \zeta = -0'',0037274;\ \xi = 0,00020625 = 42'',54;$$

XIX. $m'U' = (158'',07 - t.0'',003727) \sin (2♃ - 5♄ + 57°41'19'' + t.42'',54)$.

Pour la seconde inégalité de Jupiter, qui a l'argument $\omega = 3♄ - ♃$ (§. 196), on a besoin, outre les quantités données précédemment (§. 224.), des suivantes:

$$\frac{\partial^2 b^{(1)}}{\partial \alpha^2} = 12,873804; \; \frac{\partial^2 b^{(2)}}{\partial \alpha^2} = 12,83205; \; \frac{\partial^2 b^{(3)}}{\partial \alpha^2} = 15,45485;$$

$$c^{(2)} = 2,082131; \; \frac{\partial c^{(2)}}{\partial \alpha} = 13,416026;$$

$$a^4 \frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial a^2} = -1,138866; \; a^4 \frac{\partial^2 A^{(2)}}{\partial a^2} = -1,134732; \; a^4 \frac{\partial^2 A^{(3)}}{\partial a^2} = -1.366665;$$

$$a^2 a' \mathfrak{A}^{(2)} = 0,619165; \; a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a} = 2,175563.$$

Au moyen de ces valeurs on a conclu

$$\text{IX} = -3,50412; \; \text{X} = -1,30071; \; \text{XI} = -1,93804; \; \text{XII} = 0,42462;$$

$$F = -20,14585 \,.\, f + 84,14629 \,.\, g - 12,22197 \,.\, h - 2,48819 \,.\, k;$$

d'où il vient, si l'on substitue les valeurs précédentes de m', a, f, g, etc.

$$\text{XXII. } m'au'' = 10,0572 \,.\, \sin \omega + 20,0385 \,.\, \cos \omega,$$

$$\text{XXIII. } m'U'' = 2'',62915 \,.\, \sin \omega + 12'',04086 \,.\, \cos \omega,$$

ou suivant la méthode du §. 208,

$$\text{XXII. } m'au'' = 22,42 \,.\, \cos (3♄ - ♃ - 26°39'6''),$$

$$\text{XXIII. } m'U'' = 12'',325 \,.\, \sin (3♄ - ♃ + 77°40'57'').$$

§. 230. La première inégalité de Saturne, du second ordre, dépend de l'action de Jupiter et de l'argument $\phi' = 4♄ - 2♃$ (§. 195.). Pour cela, on a déjà trouvé (§. 225.) les quantités $aA^{(2)}$, $aA^{(3)}$, $aA^{(4)}$, $a^2 \frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}$, $a^2 \frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}$, $a^2 \frac{\partial A^{(4)}}{\partial a}$, $a^3 \frac{\partial \partial A^{(2)}}{\partial a^2}$, $a^3 \frac{\partial \partial A^{(3)}}{\partial a^2}$, $a^3 \frac{\partial \partial A^{(4)}}{\partial a^2}$; et l'on a, relativement aux perturbations de Jupiter par Saturne.

$$\frac{\partial^2 b^{(2)}}{\partial \alpha^2} = 12,83205; \; \frac{\partial^2 b^{(3)}}{\partial \alpha^2} = 15,45485; \; \frac{\partial^2 b^{(4)}}{\partial \alpha^2} = 17,058155;$$

$$c^{(3)} = 1,295672; \; \frac{\partial c^{(3)}}{\partial \alpha} = 10,598611;$$

$$a^4 \frac{\partial^2 A^{(2)}}{\partial a^2} = -1,134732; \; a^4 \frac{\partial^2 A^{(3)}}{\partial a^2} = -1,366665; \; a^4 \frac{\partial^2 A^{(4)}}{\partial a^2} = -1,508444;$$

$$a^2 a' \mathfrak{A}^{(3)} = 0,3852953; \; a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a} = 1,7186875;$$

d'où l'on conclura pour les perturbations de Saturne par Jupiter,

$$a^4 \frac{\partial^2 A^{(2)}}{\partial a^2} = 23,89813;\ a^4 \frac{\partial^2 A^{(3)}}{\partial a^2} = 19,80282;\ a^4 \frac{\partial^2 A^{(4)}}{\partial a^2} = 15,57219;$$

$$a^2 a' \mathfrak{A}^{(3)} = 0,7065525;\ a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a} = -5,371377.$$

Au moyen de ces valeurs on trouvera (§. 195.)

$$E = -4177013.\left(h + t\frac{\partial h}{\partial t}\right) + 5101811\left(g + t\frac{\partial g}{\partial t}\right) - 1541849\left(f + t\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$
$$- 169551\left(k + t\frac{\partial k}{\partial t}\right) + 569702730.\frac{\partial h'}{\partial t} - 701077580.\frac{\partial g'}{\partial t}$$
$$+ 210467050.\frac{\partial f'}{\partial t} + 231723390.\frac{\partial k'}{\partial t},$$

$$F = -190268'',7\left(h + t\frac{\partial h}{\partial t}\right) + 232888''.\left(g + t\frac{\partial g}{\partial t}\right)$$
$$- 70515'',8.\left(f + t\frac{\partial f}{\partial t}\right) - 7758'',6\left(k + t\frac{\partial k}{\partial t}\right)$$
$$+ 25420266''.\frac{\partial h'}{\partial t} - 31056138''.\frac{\partial g'}{\partial t} + 9395721''.\frac{\partial f'}{\partial t} + 1033709''.\frac{\partial k'}{\partial t};$$

d'où l'on tirera (XX. XXI. §. 195.)

$$m'au' = (12280,44 + t.1,2777)\sin(4\text{♄} - 2\text{♃}) + (7592,38 - t.2,6831)\cos(4\text{♄} - 2\text{♃}),$$
$$m'U' = (3441'',865 - t.0'',1215833)\sin(4\text{♄} - 2\text{♃}) - (560'',067 + t.0'',0580974)\cos(4\text{♄} - 2\text{♃}),$$

et suivant la méthode du §. 208,

$$\text{XX. } m'au'' = (14438 - t.0,3242)\cos(2\text{♃} - 4\text{♄} + 58^\circ16'25'' + t.42'',2027),$$
$$\text{XXI. } m'U'' = -(657'',73 - t.0'',01428)\sin(2\text{♃} - 4\text{♄} + 58^\circ22'37'' + t.42'',0202).$$

La seconde inégalité de Saturne a l'argument $\omega' = 3\text{♄} - \text{♃}$ (§. 197). On a, outre les quantités précédentes (§. 215.), par rapport aux perturbations de Jupiter,

$$\frac{\partial^2 b^{(3)}}{\partial \alpha^2} = 13,878804;\ c^{(2)} = 2,082131;\ \frac{\partial c^{(2)}}{\partial \alpha} = 13,416026;\ \text{donc}$$

$$a^4 \frac{\partial^2 A^{(3)}}{\partial a^2} = -1,138866;\ a^2 a' \mathfrak{A}^{(2)} = 0,6191653;\ a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a} = 2,175563;$$

d'où l'on a conclu pour les perturbations de Saturne,

$$a^4 \frac{\partial^2 A^{(3)}}{\partial a^2} = 27,20263;\ a^2 a' \mathfrak{A}^{(2)} = 1,135422;\ a^3 a' \frac{\partial \mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a} = -7,39580.$$

Ces valeurs donneront (XXIV. XXV. §. 197.)

$\text{XIII} = -9{,}858173$; $\text{XIV} = -39{,}710847$; $\text{XV} = -6{,}874188$; $\text{XVI} = 0{,}970586$;

$$F = -24{,}003404 \,.\, h + 117{,}76766 \,.\, g - 25{,}479984 \,.\, f - 3{,}206657 \,.\, k.$$

Si l'on substitue les valeurs de f, g, h, k, etc. (§. 228.), et qu'on multiplie les premières quantités par $m'a \,.\, 1000000$, et les dernières par $\frac{m'}{\sin 1''}$ (§. 225.), il viendra

$m'au'' = -1175{,}6264.\sin\omega' + 31{,}5339.\cos\omega'$, $m'U'' = -56'',1326.\cos\omega' - 6'',8409.\sin\omega'$,

et d'après la méthode précédente (§. 208.),

$$\text{XXIV.}\ m'au'' = 1176{,}05 \,.\, \cos(3\text{♄} - \text{♃} + 88°27'49''),$$

$$\text{XXV.}\ m'U'' = -56'',55 \,.\, \sin(3\text{♄} - \text{♃} + 83°\,3'6'').$$

§. 231. Pour calculer l'inégalité d'Uranus, qui dépend de l'action de Saturne et de l'argument $\omega' = 3\text{♅} - \text{♄}$ (§. 198.), on a besoin des quantités $aA^{(1)}$, $aA^{(2)}$, $aA^{(3)}$, $a^2\frac{\partial A^{(1)}}{\partial a}$, $a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a}$, $a^2\frac{\partial A^{(3)}}{\partial a}$, $a^3\frac{\partial\partial A^{(1)}}{\partial a^2}$, $a^3\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2}$, $a^3\frac{\partial\partial A^{(3)}}{\partial a^2}$, qui ont été données plus haut (§. 226.), et de $a^4\frac{\partial^3 A^{(1)}}{\partial a^3}$, $a^4\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3}$, $a^4\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3}$, $a^2a'\mathfrak{A}^{(2)}$, $a^3a'\frac{\partial \mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a}$. Or on a relativement aux perturbations de Saturne par Uranus,

$$\frac{\partial^3 b^{(1)}}{\partial \alpha^3} = 9{,}578267;\quad \frac{\partial^3 b^{(2)}}{\partial \alpha^3} = 9{,}42545;\quad \frac{\partial^3 b^{(3)}}{\partial \alpha^3} = 11{,}90414;$$

$$c^{(2)} = 1{,}520452;\quad \frac{\partial c^{(2)}}{\partial \alpha} = 9{,}75656;$$

d'où l'on a conclu

$$a^4\frac{\partial^3 A^{(1)}}{\partial a^3} = 21{,}27343;\ a^4\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3} = 17{,}55987;\ a^4\frac{\partial^3 A^{(3)}}{\partial a^3} = 13{,}52153;$$

$$a^2a'\mathfrak{A}^{(2)} = 0{,}760935;\ a^3a'\frac{\partial \mathfrak{A}^{(2)}}{\partial a} = -4{,}694669.$$

Au moyen de ces valeurs on trouvera (§. 198.),

$$E = -24{,}19248 \,.\, h + 105{,}61872 \,.\, g - 24{,}31914 \,.\, f - 3{,}37307 \,.\, k$$
$$+ 150{,}325.\frac{\partial b'}{n\partial t} - 631{,}0114.\frac{\partial g'}{n\partial t} + 178{,}0347.\frac{\partial f'}{n\partial t} + 25{,}178.\frac{\partial k'}{n\partial t};$$

$$F = -150{,}4187 \,.\, h + 906{,}6995 \,.\, g - 244{,}8854 \,.\, f - 33{,}7436 \,.\, k$$
$$+ 2513{,}26.\frac{\partial b'}{n\partial t} - 12449{,}83.\frac{\partial g'}{n\partial t} + 3430{,}57.\frac{\partial f'}{n\partial t} + 478{,}98.\frac{\partial k'}{n\partial t}.$$

En substituant les valeurs de f, g, etc. $\frac{\partial f}{n\partial t}$, etc. (§. 228.), et multipliant E, E', par $m'a.1000000 = 5428{,}09$, et F, F', par $\frac{m'}{\sin 1''} = 58'',3645$ (§. 226.), on aura

$E = -1345,058$; $E' = -175,015$; $F = -127'',7123$; $F' = -1'',9147$;
d'où il viendra (§. 198.)

$m'au'' = 1345,058 . \sin\omega' + 175,015 . \cos\omega'$, $m'U'' = 127'',7123 . \cos\omega' - 1'',9147 . \sin\omega'$,
et suivant la méthode exposée dans le §. 208,

$$\text{XXVI.} \quad m'au'' = 1356,4 . \cos(3\,\text{♅} - \text{♄} - 82°35'11''),$$
$$\text{XXVII.} \quad m'U'' = -127'',73 . \sin(3\,\text{♅} - \text{♄} - 89°8'27'').$$

On a vu (§. 206.), que la partie principale de U'' est $mU' = 3na\int\partial t\int(\partial R)$. Il en résulte, par la réaction d'Uranus, une inégalité de Saturne, $m(U'') = 3n'a'\int\partial t\int(\partial' R)$. Or l'argument de cette inégalité étant $\text{♄} - 3\,\text{♅} = \mu' - 3\mu$, on aura $(\partial R) = -\frac{n'}{3n}(\partial R)$, d'où il viendra une inégalité analogue de Saturne,

$$m(U'') = -\frac{m\,n'^2\,a'}{3\,m'\,n^2 a}\,m'U'' = -0,24432 . m'U'' = +31'',25 . \sin(3\,\text{♅} - \text{♄} - 89°8'27'').$$

§. 232. Les formules du §. 202 et 203, qui donnent la grande inégalité de Jupiter, due à l'action de Saturne, et dépendante des troisièmes puissances des excentricités et inclinaisons, renferment, outre les quantités, données précédemment (§. 224. 229. 230.), encore les suivantes:

$$\frac{\partial^4 b^{(2)}}{\partial \alpha^4} = 87,3027;\ \frac{\partial^4 b^{(3)}}{\partial \alpha^4} = 89,8615;\ \frac{\partial^4 b^{(4)}}{\partial \alpha^4} = 101,3309;\ \frac{\partial^4 b^{(5)}}{\partial \alpha^4} = 113,5238;$$
$$\frac{\partial\partial c^{(3)}}{\partial \alpha^2} = 86,90215;\ \frac{\partial\partial c^{(4)}}{\partial \alpha^2} = 75,08115;\ \text{d'où il vient}$$
$$a^5\frac{\partial^4 A^{(2)}}{\partial a^4} = -4,209923;\ a^5\frac{\partial^4 A^{(3)}}{\partial a^4} = -4,333314;\ a^5\frac{\partial^4 A^{(4)}}{\partial a^4} = -4,888803;$$
$$a^5\frac{\partial^4 A^{(5)}}{\partial a^4} = -5,474261;\ a^4 a'\frac{\partial\partial \mathfrak{A}^{(3)}}{\partial a^2} = 7,684713;\ a^4 a'\frac{\partial\partial \mathfrak{A}^{(4)}}{\partial a^2} = 6,639389.$$

Ainsi les formules (§. 202. 203.) donneront

$aC^{V} = -42,14769$; $aC^{IV} = -451,12278$; $aC^{III} = -114445,28$; $aC^{II} = -841,71506$;
$aC^{I} = 39,03579$; $aC^{0} = 101,46487$; $ac^{V} = -13980,6$; $ac^{IV} = -69859$; $ac^{III} = -115566,6$;
$ac^{II} = -63072,2$; $ac^{I} = 3994,4$; $ac^{0} = 7680,5$; $a\gamma^{V} = -1037809$; $a\gamma^{IV} = -5187011$;
$a\gamma^{III} = -8582226$; $a\gamma^{II} = -4687172$; $a\gamma^{I} = 296431$; $a\gamma^{0} = 570536$;
$D^{V} = -20504,75$; $D^{IV} = -102819,7$; $D^{III} = -170688,52$; $D^{II} = -93308,64$;
$D^{I} = 5866,09$; $D^{0} = 11229,08$; $d^{V} = -3074319$; $d^{IV} = -15452970$;
$d^{III} = -2906361$; $d^{II} = -13968139$; $d^{I} = 876322$; $d^{0} = 1689438$;

$$\frac{\delta^{V}}{1000} = -344034;\ \frac{\delta^{IV}}{1000} = -1721669;\ \frac{\delta^{III}}{1000} = -2852745;$$

$$\frac{\delta^{II}}{1000} = -15596'9;\quad \frac{\delta^{I}}{1000} = 9^{8}412;\quad \frac{\delta^{0}}{1000} = 189^{8}22;$$

et l'on aura les équations XXVIII, XXIX,

$$u'' = \sin\psi.\left\{\begin{array}{l} -aC^{V}\mathfrak{f}+aC^{IV}\mathfrak{g}-aC^{III}\mathfrak{h}+aC^{II}\mathfrak{k}+aC^{I}\mathfrak{l}-aC^{0}\mathfrak{m}+ac^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}'}{n\partial t}-ac^{IV}\frac{\partial\mathfrak{g}'}{n\partial t} \\ +ac^{III}\frac{\partial\mathfrak{h}'}{n\partial t}-ac^{II}\frac{\partial\mathfrak{k}'}{n\partial t}-ac^{I}\frac{\partial\mathfrak{l}'}{n\partial t}+ac^{0}\frac{\partial\mathfrak{m}'}{n\partial t}+a\gamma^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{n^2\partial t^2}-a\gamma^{IV}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}}{n^2\partial t^2} \\ +a\gamma^{III}\frac{\partial\partial\mathfrak{h}}{n^2\partial t^2}-a\gamma^{II}\frac{\partial\partial\mathfrak{k}}{n^2\partial t^2}-a\gamma^{I}\frac{\partial\partial\mathfrak{l}}{n^2\partial t^2}+a\gamma^{0}\frac{\partial\partial\mathfrak{m}}{n^2\partial t^2} \end{array}\right\}$$

$$+\cos\psi.\left\{\begin{array}{l} -aC^{V}\mathfrak{f}'+aC^{IV}\mathfrak{g}'-aC^{III}\mathfrak{h}'+aC^{II}\mathfrak{k}'+aC^{I}\mathfrak{l}'-aC^{0}\mathfrak{m}'-ac^{V}\frac{\partial\mathfrak{f}}{n\partial t} \\ +ac^{IV}\frac{\partial\mathfrak{g}}{n\partial t}-ac^{III}\frac{\partial\mathfrak{h}}{n\partial t}+ac^{II}\frac{\partial\mathfrak{k}}{n\partial t}+ac^{I}\frac{\partial\mathfrak{l}}{n\partial t}-ac^{0}\frac{\partial\mathfrak{m}}{n\partial t}+a\gamma^{V}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}'}{n^2\partial t^2} \\ -a\gamma^{IV}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}'}{n^2\partial t^2}+a\gamma^{III}\frac{\partial\partial\mathfrak{h}'}{n^2\partial t^2}-a\gamma^{II}\frac{\partial\partial\mathfrak{k}'}{n^2\partial t^2}-a\gamma^{I}\frac{\partial\partial\mathfrak{l}'}{n^2\partial t^2}+a\gamma^{0}\frac{\partial\partial\mathfrak{m}'}{n^2\partial t^2} \end{array}\right\},$$

$$U'' = \sin\psi.\left\{\begin{array}{l} D^{V}\left(\mathfrak{f}'+t\frac{\partial\mathfrak{f}'}{\partial t}+\frac{t^2}{2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{f}'}{\partial t^2}\right)-D^{IV}\left(\mathfrak{g}'+t\frac{\partial\mathfrak{g}'}{\partial t}+\frac{t^2}{2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{g}'}{\partial t^2}\right)+D^{III}\left(\mathfrak{h}'+t.\frac{\partial\mathfrak{h}'}{\partial t}+\frac{t^2}{2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{h}'}{\partial t^2}\right) \\ -D^{II}\left(\mathfrak{k}'+t\frac{\partial\mathfrak{k}'}{\partial t}+\frac{t^2}{2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{k}'}{\partial t^2}\right)-D^{I}\left(\mathfrak{l}'+t.\frac{\partial\mathfrak{l}'}{\partial t}+\frac{t^2}{2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{l}'}{\partial t^2}\right)+D^{0}\left(\mathfrak{m}'+t.\frac{\partial\mathfrak{m}'}{\partial t}+\frac{t^2}{2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{m}'}{\partial t^2}\right) \\ +\frac{d^{V}}{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial t}+t.\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{\partial t^2}\right)-\frac{d^{IV}}{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{g}}{\partial t}+t\frac{\partial\partial\mathfrak{g}}{\partial t^2}\right)+\frac{d^{III}}{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t}+t.\frac{\partial\partial\mathfrak{h}}{\partial t^2}\right)-\frac{d^{II}}{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{k}}{\partial t}+t.\frac{\partial\partial\mathfrak{k}}{\partial t^2}\right) \\ -\frac{d^{I}}{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{l}}{\partial t}+t.\frac{\partial\partial\mathfrak{l}}{\partial t^2}\right)+\frac{d^{0}}{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial t}+t.\frac{\partial\partial\mathfrak{m}}{\partial t^2}\right)-\frac{\delta^{V}}{n^2}\frac{\partial\partial\mathfrak{f}'}{\partial t^2}+\frac{\delta^{IV}}{n^2}\frac{\partial\partial\mathfrak{g}'}{\partial t^2} \\ -\frac{\delta^{III}}{n^2}\frac{\partial\partial\mathfrak{h}'}{\partial t^2}+\frac{\delta^{II}}{n^2}\frac{\partial\partial\mathfrak{k}'}{\partial t^2}+\frac{\delta^{I}}{n^2}\frac{\partial\partial\mathfrak{l}'}{\partial t^2}-\frac{\delta^{0}}{n^2}\frac{\partial\partial\mathfrak{m}'}{\partial t^2} \end{array}\right\}$$

$$+\cos\psi\left\{\begin{array}{l} -D^{V}\left(\mathfrak{f}+t.\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial t}+\frac{t^2}{2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{\partial t^2}\right)+D^{IV}\left(\mathfrak{g}+t.\frac{\partial\mathfrak{g}}{\partial t}+\frac{t^2}{2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{g}}{\partial t^2}\right)-D^{III}\left(\mathfrak{h}+t.\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t}+\frac{t^2}{2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{h}}{\partial t^2}\right) \\ +D^{II}\left(\mathfrak{k}+t\frac{\partial\mathfrak{k}}{\partial t}+\frac{t^2}{2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{k}}{\partial t^2}\right)+D^{I}\left(\mathfrak{l}+t.\frac{\partial\mathfrak{l}}{\partial t}+\frac{t^2}{2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{l}}{\partial t^2}\right)-D^{0}\left(\mathfrak{m}+t.\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial t}+\frac{t^2}{2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{m}}{\partial t^2}\right) \\ +\frac{d^{V}}{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{f}'}{\partial t}+t.\frac{\partial\partial\mathfrak{f}'}{\partial t^2}\right)-\frac{d^{IV}}{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{g}'}{\partial t}+t.\frac{\partial\partial\mathfrak{g}'}{\partial t^2}\right)+\frac{d^{III}}{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{h}'}{\partial t}+t.\frac{\partial\partial\mathfrak{h}'}{\partial t^2}\right) \\ -\frac{d^{II}}{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{k}'}{\partial t}+t.\frac{\partial\partial\mathfrak{k}'}{\partial t^2}\right)-\frac{d^{I}}{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{l}'}{\partial t}+t.\frac{\partial\partial\mathfrak{l}'}{\partial t^2}\right)+\frac{d^{0}}{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{m}'}{\partial t}+t.\frac{\partial\partial\mathfrak{m}'}{\partial t^2}\right) \\ +\frac{\delta^{V}}{n^2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{f}}{\partial t^2}-\frac{\delta^{IV}}{n^2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{g}}{\partial t^2}+\frac{\delta^{III}}{n^2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{h}}{\partial t^2}-\frac{\delta^{II}}{n^2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{k}}{\partial t^2}-\frac{\delta^{I}}{n^2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{l}}{\partial t^2}+\frac{\delta^{0}}{n^2}.\frac{\partial\partial\mathfrak{m}}{\partial t^2} \end{array}\right\}.$$

Faisons pour abréger,

$$u'' = E\sin\psi + F\cos\psi,\quad U'' = (G + G't + G''t^2)\cos\psi - (H + H't + H''t^2)\sin\psi.$$

Si l'on substitue les valeurs de f, g, etc. $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial\partial f}{\partial t^2}$, etc. et $n = 0{,}5296907$ (§. 228.), on trouvera

$$E = 0{,}1639676;\ F = -0{,}1503894;\ G = 0{,}86274;\ G' = -0{,}006302;$$

$$G'' = 0{,}0000001699;\ H = -20{,}25078;\ H' = 0{,}0005271;\ H = 0{,}0000000869\,56.$$

Si l'on multiplie E, F, par $m'a \,.\, 1000000 = 1471{,}7174$; et G, G′, G″, H, H, H″, par $\frac{m'}{\sin 1''} = 58'',3645$ (§. 229), on aura

$$m'au''' = 97{,}0857 \,.\, \sin\psi - 221{,}3308 \,.\, \cos\psi,$$

$$m'U''' = (1181'',9269 - t \,.\, 0'',03148051 - t^2 \,.\, 0'',000050751\,4\cdot)\sin\psi$$
$$+ (50'',3584 - t \,.\, 0'',36781317 + t^2 \,.\, 0'',0000157525\,8)\cos\psi.$$

Supposons, suivant la méthode du §. 208.

$$m'U''' = (K - kt + \varkappa t^2)\sin(\psi + L - lt + \lambda t^2),$$

et faisons pour abréger,

$1181'',927 = D$; $50'',358 = E$; $0'',03148 = d$; $0'',36781 = e$; $0'',0000507 = \delta$; $0'',0001575 = \varepsilon$,

de sorte que $m'U''' = (D - d.t - \delta.t^2)\sin\psi + (E - e.t + \varepsilon.t^2)\cos\psi$.

La comparaison de ces deux valeurs de $m'U'''$ donnera

$$\text{tang}\, L = \frac{E}{D},\ K = \frac{D}{\cos L}.\ k = e\sin L + d\cos L,\ l = \frac{e\cos L - d\sin L}{K},$$

$$\varkappa = \varepsilon\sin L - \delta\cos L + \frac{K}{2}l^2,\ \lambda = \frac{\varepsilon\cos L + \delta\sin L - kl}{K};\ \text{partant}$$

$$L = 2^\circ\,26'\,22'',\quad K = 1183'',\quad k = 0'',0471076;\quad l = 63'',8392;$$

$$\varkappa = 0'',0000066254;\quad \lambda = 0'',0005786\,25;\ \text{d'où il vient}$$

$$\text{XXIX.}\ m'U''' = \left\{ \begin{matrix} 1183'' - t \,.\, 0'',047108 \\ + t^2 \,.\, 0'',00000663 \end{matrix} \right\} \sin \left\{ \begin{matrix} 5\,\text{♄} - 2\,\text{♃} + 2^\circ\,26'\,22'' \\ - t \,.\, 63'',839 + t^2 \,.\, 0'',000579 \end{matrix} \right\}.$$

On trouvera par le même procédé,

$$\text{XXVIII.}\ m'au''' = -241{,}69 \,.\, \cos(5\,\text{♄} - 2\,\text{♃} + 23^\circ\,41'\,4'').$$

§. 233. Les formules du §. 206. (XXXIII. XXXIV.) donnent, pour la grande inégalité de Saturne, en faisant $\frac{a'}{a} = 1{,}833795 = \alpha$,

$$u''' = \alpha a\,(W\sin\psi + W'\cos\psi),\ U'' = \alpha a\,(Z\cos\psi - Z'\sin\psi).$$

On trouvera, au moyen des quantités précédentes (§. 232.),

$\alpha E^{v} = -381{,}6165$; $\alpha E^{iv} = -1878{,}0109$; $\alpha E^{iii} = -3400{,}4832$; $\alpha E^{ii} = -2015{,}1905$;
$\alpha E^{i} = 96{,}8572$; $\alpha E^{0} = 205{,}8801$; $\alpha e^{v} = -25779{,}1$; $\alpha e^{iv} = -128799{,}4$;
$\alpha e^{iii} = -213043{,}6$; $\alpha e^{ii} = -116256$; $\alpha e^{i} = 7368{,}1$; $\alpha e^{0} = 14162{,}5$;

$$\alpha\varepsilon^{V} = -3916938;\quad \alpha\varepsilon^{IV} = -9578152;\quad \alpha\varepsilon^{III} = -15722367;$$

$$\alpha\varepsilon^{II} = -8651919;\quad \alpha\varepsilon^{I} = 547686;\quad \alpha\varepsilon^{0} = 1053083;$$

$$\alpha F^{V} = -15146,12;\quad \alpha F^{IV} = -7594,46;\quad \alpha F^{III} = -126119,7;\quad \alpha F^{II} = -69068,9;$$

$$\alpha F^{I} = 4305,73;\quad \alpha F^{0} = 8311,29;\quad \alpha f^{V} = -2281869;\quad \alpha f^{IV} = -11418781;$$

$$\alpha f^{III} = -18941606;\quad \alpha f^{II} = -10361668;\quad \alpha f^{I} = 614195;\quad \alpha f^{0} = 1257483;$$

$$\frac{\alpha\Phi^{V}}{1000} = -255345;\quad \frac{\alpha\Phi^{IV}}{1000} = -1278239;\quad \frac{\alpha\Phi^{III}}{1000} = -2117722;$$

$$\frac{\alpha\Phi^{II}}{1000} = -1157442;\quad \frac{\alpha\Phi^{I}}{1000} = 73176;\quad \frac{\alpha\Phi^{0}}{1000} = 140580.$$

Si l'on substitue maintenant les valeurs de f, f', etc. $\frac{\partial f}{\partial t}$, etc. $\frac{\partial\partial f}{\partial t^2}$, etc. et $n = 0{,}5296907$ (§. 228.), et qu'on fasse pour abréger,

$$U''' = (G + G't + G''t^2)\sin\psi - (H + H't + H''t^2)\cos\psi,\ \text{on aura}$$

$$u''' = -0{,}0660380 \,.\, \sin\psi + 0{,}3885312 \,.\, \cos\psi,$$

$$G = -14{,}8417;\quad G' = 0{,}0003766667;\quad G'' = 0{,}000000641182;$$

$$H = 0{,}67067;\quad H' = -0{,}0039017;\quad H'' = 0{,}000000200238;$$

et en multipliant u''' par $ma'.1000000 = 8938{,}21$; et G, H, etc. par $\frac{m}{\sin 1''} = 193'{,}2965$ (§. 225.), on trouvera

$$ma'u''' = 3472{,}773 \,.\, \cos\psi - 590{,}261 \,.\, \sin\psi,$$

$$mU''' = -(2868'',849 - t \,.\, 0'',0728084 - t^2 \,.\, 0'',000139383)\sin\psi$$
$$-(129'',638 - t \,.\, 0'',754185 + t^2 \,.\, 0'',0000387053)\cos\psi,$$

et en réduisant les deux termes en un seul, par la méthode du §. 208,

$$\text{XXXIII.}\quad ma'u''' = 3522{,}58 \,.\, \cos(5♄ - 2♃ + 9°\,38'\,47''),$$

$$\text{XXXIV.}\quad mU''' = -\left\{\begin{matrix}2871'',78 - t.0'',10678\\ -t^2.0'',0000241)\end{matrix}\right\}\sin\left\{\begin{matrix}5♄ - 2♃ + 2°\,35'\,14'',4\\ -t.53'',8779 + t^2.0'',001157)\end{matrix}\right\}.$$

§. 234. Il nous reste à développer les petites inégalités de Jupiter et de Saturne, du troisième et du second degré (§. 204. 205.),

$$\text{XXX.}\quad \delta\Delta v =$$

$$4{,}472378 \,.\, \sin\Phi\{\text{I}.\gamma^2\cos\varpi - \text{II}.\gamma\gamma'\cos\varpi' + \text{III}.\gamma'^2\cos(2\varpi' - \varpi) - \text{IV}.\delta^2\cos(2\Pi - \varpi)\}$$
$$+ 4{,}472378.\cos\Phi\{\text{I}.\gamma^2\sin\varpi - \text{II}.\gamma\gamma'\sin\varpi + \text{III}.\gamma'^2\sin(2\varpi' - \varpi) - \text{IV}.\delta^2\sin(2\Pi - \varpi)\},$$

$$\text{XXXI.}\quad \delta\Delta v' =$$

$$-2{,}085626.\sin\Phi'\{\text{V}.\gamma'^2\cos\varpi' - \text{VI}.\gamma\gamma'\cos\varpi + \text{VII}\,\gamma^2\cos(2\varpi - \varpi') - \text{VIII}.\delta^2\cos(2\Pi - \varpi')\}$$
$$-2{,}085626.\cos\Phi'.\{\text{V}.\gamma'^2\sin\varpi' - \text{VI}.\gamma\gamma'\sin\varpi + \text{VII}.\gamma^2\sin(2\varpi - \varpi') - \text{VIII}.\delta^2\sin(2\Pi - \varpi')\},$$

XXXII. $U'' =$

$\{\mathfrak{M}^{(-1)}\gamma^2 - \mathfrak{N}^{(-1)}\gamma\gamma'\cos(\varpi'-\varpi)\}\sin(♃-♄)+\mathfrak{N}^{(-1)}\gamma\gamma'\sin(\varpi'-\varpi)\cos(♃-♄)$,

les lettres sans trait se rapportant à Jupiter, celles marquées d'un trait à Saturne, et Φ étant $= 4♃ - 5♄$, $\Phi' = 2♃ - 3♄$. Maintenant il faut observer qu'en vertu des formules (C) (§. 19·.), on a

$\delta^2 \cos(2\Pi - \varpi) = k\sin\varpi + k'\cos\varpi$, $\delta^2\sin(2\Pi - \varpi) = k\cos\varpi - k'\sin\varpi$,
$\delta^2 \cos(2\Pi - \varpi') = k\sin\varpi' + k'\cos\varpi'$, $\delta^2\sin(2\Pi - \varpi') = k\cos\varpi' - k'\sin\varpi'$.

Les valeurs précédentes de $aA^{( )}$, $aA^{(3)}$, $aA^{(4)}$, $aA^{(5)}$, $a^2 a' \mathfrak{A}^{(3)}$, $a^2 a' \mathfrak{A}^{(4)}$, et de leurs différentielles (§. 204. 209. 230), donnent (§. 193. 195.)

$I = -3,826188$; $II = -12,759304$; $III = -10,566859$; $IV = 0,364500$;

$$V = \frac{a'}{a}\left\{\frac{389}{8}aA^{(2)} + \frac{201}{8}a^2\frac{\partial A^{(2)}}{\partial a} + \frac{27}{8}a^3\frac{\partial\partial A^{(2)}}{\partial a^2} + \frac{a^4}{8}\frac{\partial^3 A^{(2)}}{\partial a^3}\right\}, \text{ etc. donc}$$

$$V = -\frac{a'}{a}\cdot 17,15764;\quad VI = -\frac{a'}{a}\cdot 20,956504;$$

$$VII = -\frac{a'}{a}\cdot 6,333407;\quad VIII = \frac{a'}{a}\cdot 0,696455;$$

$$\mathfrak{M}^{(-1)} = 16,75257;\quad \mathfrak{N}^{(-1)} = 44,87295 \text{ (§. 225.).}$$

Cela posé, on aura, en substituant les valeurs de $\gamma, \gamma', \varpi, \varpi', k, k'$, (§. 209. 228.)

$$XXX = 0,1090651 \cdot \sin\Phi + 0,1142707 \cdot \cos\Phi,$$

$$XXXI = -0,1888648 \cdot \sin\Phi' + 0,1137578 \cdot \cos\Phi',$$

$$XXXII = 0,0276193 \cdot \sin(♃ - ♄) + 0,11878 \cdot \cos(♃ - ♄).$$

Si on multiplie XXX par $\frac{m'}{\sin 1''} = 58'',3645$; et XXXI, XXXII, par $\frac{m}{\sin 1''} = 193'',2965$; il viendra

$$XXX = 6'',36553 \cdot \sin\Phi + 6'',66935 \cdot \cos\Phi,$$

$$XXXI = -36'',5069 \cdot \sin\Phi' + 21'',989 \cdot \cos\Phi',$$

$$XXXII = 5'',3387 \cdot \sin(♃ - ♄) + 22'',9598 \cdot \cos(♃ - ♄),$$

et en réduisant les deux termes de chaque inégalité en un seul,

XXX. $m'\delta v = 9'',22 \cdot \sin(4♃ - 5♄ + 46°\,20'\,7'')$,

XXXI. $m\delta v' = -42'',61 \cdot \sin(2♃ - 3♄ - 31°\,3'\,42'')$,

XXXII. $m\delta v' = 23'',57 \cdot \sin(♃ - ♄ + 76°\,54'\,36'')$.

§. 235. Rassemblons maintenant les diverses inégalités périodiques de toutes les planètes, développées ci-dessus (§. 211. 213. 218. 220. 224. 225.

226. 229. 230. 231. 232. 233. 234), réduisons les termes, dont les argumens ont la même partie périodique, en un seul par la méthode du §. 208, et substituons pour les périhélies ϖ leurs valeurs données dans la *Tab.* I (§. 209.). On aura, en faisant la distance moyenne de la terre au soleil $= 1000000$,

l'inégalité du *rayon vecteur* de *Mercure* $=$

$$-0{,}04 + 0{,}43 \,.\, \cos(☿ - ♀) - 1{,}62 \,.\, \cos 2(☿ - ♀)$$
$$-1{,}4 \,.\, \cos(74° 21' 47'' + 2☿ - 2♀) - 2{,}95 \,.\, \cos(74° 21' 47'' + ☿ - 2♃);$$

l'inégalité de la *longitude* de *Mercure* $=$

$$-0'',69 \,.\, \sin(☿ - ♀) + 1'',52 \,.\, \sin 2(☿ - ♀) + 4'',2 \,.\, \sin(74° 21' 47'' + ☿ - 2♀)$$
$$+1'',76 \sin(74° 22' + 2☿ - 3♀) + 3'',26 \,.\, \sin(74° 22' + ☿ - 2♃) - 0'',57 \,.\, \sin(♃ - 11° 8' 35'');$$

l'inégalité du *rayon vecteur* de *Vénus* $=$

$$-0{,}6 + 3{,}56 \,.\, \cos(♀ - ♁) + 15{,}33 \,.\, \cos 2(♀ - ♁) - 13{,}02 \,.\, \cos 3(♀ - ♁) - 2{,}25 \,.\, \cos 4(♀ - ♁)$$
$$+4{,}89 \,.\, \cos(♀ - ♃) - 2{,}19 \,.\, \cos 2(♀ - ♃)$$
$$+1{,}53 \,.\, \cos(99° 30' + 2♀ - 3♁) + 2{,}52 \,.\, \cos(87° 46' 34'' + 4♀ - 5♁);$$

l'inégalité de la *longitude* de *Vénus* $=$

$$-5'',63 \,.\, \sin(♀ - ♁) - 10'',61 \,.\, \sin 2(♀ - ♁) + 6'',74 \,.\, \sin 3(♀ - ♁) + 0'',98 \,.\, \sin 4(♀ - ♁)$$
$$-2'',91 \,.\, \sin(♀ - ♃) + 0'',88 \,.\, \sin 2(♀ - ♃) - 3'',25 \,.\, \sin(87° 7' 27'' + 2♀ - 3♁)$$
$$-0'',87 \,.\, \sin(99° 30' + 3♀ - 4♁) - 2'',04 \,.\, \sin(99° 30' + 4♀ - 5♁) - 1'',51 \,.\, \sin(♃ - 11° 8' 35'');$$

l'inégalité du *rayon vecteur* de la *Terre* $=$

$$0{,}43 + 31{,}54 \,.\, \cos(☾ - ☉) - 6{,}26 \,.\, \cos(♀ - ♁) + 17{,}87 \,.\, \cos 2(♀ - ♁) + 2{,}82 \,.\, \cos 3(♀ - ♁)$$
$$+0{,}98 \,.\, \cos 4(♀ - ♁) + 0{,}39 \,.\, \cos(♁ - ♂) + 5{,}70 \,.\, \cos 2(♁ - ♂) - 0{,}46 \,.\, \cos 3(♁ - ♂)$$
$$+15{,}94 \,.\, \cos(♁ - ♃) - 9{,}10 \,.\, \cos 2(♁ - ♃) - 3{,}17 \,.\, \cos(99° 30' + 2♀ - 3♁)$$
$$-3{,}89 \,.\, \cos(87° 35' 51'' + 3♀ - 4♁) + 1{,}27 \,.\, \cos(27° 35' 36'' + 4♂ - 3♁)$$
$$+3{,}26 \,.\, \cos(57° 35' 14'' + 2♃ - ♁);$$

l'inégalité de la *longitude* de la *Terre* $=$

$$6'',66 \,.\, \sin(☾ - ☉) + 5'',52 \,.\, \sin(♀ - ♁) - 6'',27 \,.\, \sin 2(♀ - ♁) - 0'',78 \,.\, \sin 3(♀ - ♁)$$
$$-0'',24 \,.\, \sin 4(♀ - ♁) - 2'',46 \,.\, \sin 2(♁ - ♂) - 7'',06 \,.\, \sin(♁ - ♃) + 2'',67 \,.\, \sin(♁ - 2♃)$$
$$+2'',81 \,.\, \sin(87° 12' 13'' + 2♀ - 3♁) + 1'',75 \,.\, \sin(87° 29' 14'' + 3♀ - 4♁)$$
$$+2'',07 \,.\, \sin(44° 52' 22'' + 2♂ - ♁) + 0'',47 \,.\, \sin(27° 35' 36'' + 3♂ - 2♁)$$
$$+0'',57 \,.\, \sin(27° 35' 36'' + 4♂ - 3♁) - 2'',55 \,.\, \sin(♃ - 4° 23' 14'')$$
$$+1'',59 \,.\, \sin(58° 0' 18'' + 2♃ - ♁) + 0'',54 \,.\, \sin(11° 8' 35'' + 2♁ - 3♃);$$

l'inégalité du *rayon vecteur* de *Mars* $=$

− 4,4 − 17,43.cos(♁ − ♂) + 4,85.cos2(♁ − ♂) + 1,11.cos3(♁ − ♂) + 78,44.cos(♂ − ♃)
− 67,94.cos2(♂ − ♃) − 6,95.cos3(♂ − ♃) + 4,4.cos(♂ − ♄) − 2,21.cos2(♂ − ♄)
+ 4,61.cos(27°35′36″ + 2♂ − ♀) + 3,58.cos(27°35′36″ + ♂) − 2,12.cos(27°35′36″ + ♁)
+ 10,64.cos(40°55′8″ + 2♂ − ♁) − 20,09.cos(32°58′10″ + 3♂ − 2♁)
+ 3,11.cos(33°2′36″ + 4♂ − 3♁) − 8,58.cos(40°52′15″ + ♃)
+ 8,73.cos(27°35′36″ + 2♂ − ♃) − 54,69.cos(32°11′15″ + 2♃ − ♂)
− 6,40.cos(27°35′36″ + 3♂ − 2♃) − 10,74.cos(53°2′52″ + 2♂ − 3♃)
− 2,04.cos(11°8′35″ + 3♂ − 4♃) − 5,56.cos(27°35′36″ + 2♄ − ♂);

l'inégalité de la *longitude* de *Mars* =

6″,49.sin(♁ − ♂) − 0″,90.sin2(♁ − ♂) − 24″,44.sin(♂ − ♃) + 13″,60.sin2(♂ − ♃)
+ 1″,10.sin3(♂ − ♃) − 1″,28.sin(♂ − ♄) + 0″,42.sin2(♂ − ♄)
+ 1″,12.sin(27°35′36″ + 2♂ − ♀) + 0″,65.sin(27°35′36″ + ♁)
− 12″,84.sin(14°45′47″ + 2♂ − ♁) − 6″,55.sin(33°2′38″ + 3♂ − 2♁)
+ 3″,60.sin(65°25′26″ − ♃) − 2″,87.sin(27°35′36″ + 2♂ − ♃)
− 21″,59.sin(31°54′51″ + 2♃ − ♂) + 2″,29.sin(50°0′24″ + 2♂ − 3♃)
+ 1″,85.sin(27°35′36″ + 3♂ − 2♃) + 0″,66.sin(29°9′ − ♄) − 1″,72.sin(27°35′36″ + 2♄ − ♂);

l'inégalité du *rayon vecteur* de *Jupiter* =

− 58,99 + 644,90.cos(♃ − ♄) − 2753,45.cos2(♃ − ♄) − 287,20.cos3(♃ − ♄)
− 74,41.cos4(♃ − ♄) − 24,63.cos5(♃ − ♄) − 9,20.cos6(♃ − ♄) − 3,70.cos7(♃ − ♄)
+ 19,63.cos(♃ − 11°8′35″) − 80,32.cos(♄ + 23°32′47″) − 55,17.cos(2♃ − ♄ − 11°8′35″)
− 290,93.cos(21°28′16″ + 2♄ − ♃) − 128,25.cos(3♃ − 2♄ − 11°8′35″)
− 879,78.cos(61°39′30″ + 3♄ − 2♃) + 236,49.cos(61°4′3″ + 4♄ − 3♃)
+ 50,31.cos(61°43′55″ + 5♄ − 4♃) − (1931,64 − t.0,0479).cos(2♃ − 5♄ + 57°29′ + t.43″,44)
+ 22,42.cos(3♄ − ♃ − 26°39′6″) − 241,69.cos(5♄ − 2♃ + 23°41′4″);

l'inégalité de la *longitude* de *Jupiter* =

− 78″,9.sin(♃ − ♄) + 94″,3.sin2(♃ − ♄) + 16″,22.sin3(♃ − ♄) + 3″,73.sin4(♃ − ♄)
+ 10″,98.sin(43°34′46″ + ♄) + 4″,96.sin(11°8′35″ + ♄ − 2♃)
− 131″,62.sin(12°24′58″ + 2♄ − ♃) + t.0″,004711.sin(4°37′4″ + ♃ − 2♄)
+ 12″,26.sin(11°8′35″ + 2♄ − 3♃) − 82″,94.sin(60°53′16″ + 3♄ − 2♃)
+ t.0″,004153.sin(73°48′48″ + 2♃ − 3♄) − 1″,22.sin(11°8′35″ + 3♄ − 4♃)
+ 15″,19.sin(61°45′18″ + 4♄ − 3♃) + 0″,82.sin(89°9′ + 5♃ − 6♄)
+ 12″,32.sin(77°40′57″ + 3♄ − ♃) + 10″,4.sin(60°35′2″ + 4♃ − 5♄)

$$+(158'',07 - t.0'',00377)\sin(77°42'19'' + 3♃ - 5♄ + t.41'',54)$$
$$+(1183''-t.0'',047108+t^2.0'',0000066)\sin(5♄-2♃+2°26'22''-t.63'',839+t^2.0'',000579);$$

l'inégalité du *rayon vecteur* de *Saturne* =

$$3891,17 + 8153,84.\cos(♃ - ♄) + 1383,84.\cos 2(♃ - ♄) + 320,07.\cos 3(♃ - ♄)$$
$$+ 99,3.\cos 4(♃ - ♄) + 35,61.\cos 5(♃ - ♄) + 13,93.\cos 6(♃ - ♄) + 149,12.\cos(♄ - ♅)$$
$$- 194,1.\cos 2(♄ - ♅) - 48,03.\cos 3(♄ - ♅) - 11,82.\cos 4(♄ - ♅) - 342,94.\cos(♄ - 11°8'35'')$$
$$+ 5364,7.\cos(11°5'38'' + 2♄ - ♃) - 1195,79.\cos(60°12'53'' + 3♄ - 2♃)$$
$$+ 202,01.\cos(89°9' + 3♃ - 4♄) + 1176,05.\cos(88°27'49'' + 3♄ - ♃)$$
$$+ (14431 - t.0,3242)\cos(2♃ - 4♄ + 58°16'25'' + t.42'',2017)$$
$$- 606,85.\cos(24°32'16'' + 2♄ - 3♅) + 3522,58.\cos(5♄ - 2♃ + 9°38'47'');$$

l'inégalité de la *longitude* de *Saturne* =

$$24'',48.\sin(69°41'16'' + ♃ - ♄) - 31'',49.\sin 2(♃ - ♄) - 6'',57.\sin 3(♃ - ♄)$$
$$- 1'',97.\sin 4(♃ - ♄) - 0'',7.\sin 5(♃ - ♄) - 9'',25\sin(♄ - ♅) + 14'',42.\sin 2(♄ - ♅)$$
$$+ 1'',43.\sin 3(♄ - ♅) + 11'',31.\sin(84°35'31'' + ♃) + 3'',17.\sin(28°16'11'' + 2♃ - ♄)$$
$$+ 419'',67.\sin(13°56'27'' + 2♄ - ♃) - t.0'',01536.\sin(44°4'15'' + ♃ - 2♄)$$
$$- 4'',9.\sin(61°43'14'' + 4♄ - 3♃) - 1'',42.\sin(62°1'46'' + 5♄ - 4♃)$$
$$+ 2'',48.\sin(♅ - 36°8'38'') + 0'',67.\sin(89°9' + ♅ - 2♄) + 9'',79.\sin(73°10'54'' + ♄ - 2♅)$$
$$- 2'',09.\sin(89°9' + 2♅ - 3♄) + 27'',32.\sin(24°41'8'' + 2♄ - 3♅)$$
$$+ 0'',76.\sin(12°38'18'' + 4♅ - 3♄) - 56'',55.\sin(83°3'6'' + 3♄ - ♃)$$
$$- 21'',58.\sin(24°20'18'' + 2♃ - 3♄) - 31'',25.\sin(89°8'27'' + ♄ - 3♅)$$
$$- (657'',73 - t.0'',01428)\sin(2♃ - 4♄ + 58°22'37'' + t.42'',0202)$$
$$- (2871'',78 - t.0'',10678 - t^2.0'',0000241)\times$$
$$\sin(5♄ - 2♃ + 2°35'14'' - t.53'',8779 + t^2.0'',0011757);$$

l'inégalité du *rayon vecteur* d'*Uranus* =

$$85946 + 4891,62.\cos(♃ - ♅) + 23,62.\cos 2(♃ - ♅) + 3368,28.\cos(♄ - ♅)$$
$$+ 386,11.\cos 2(♄ - ♅) + 84,55.\cos 3(♄ - ♅) + 24,32.\cos 4(♄ - ♅)$$
$$+ 5704,06.\cos(74°4'45'' + ♄ - 2♅) + 1356,4.\cos(82°35'11'' + ♄ - 3♅);$$

l'inégalité de la *longitude* d'*Uranus* =

$$52'',31.\sin(♃ - ♅) + 20'',32.\sin(♄ - ♅) - 4'',01.\sin 2(♄ - ♅) - 0'',82.\sin 3(♄ - ♅)$$
$$+ 1'',23.\sin(12°38'18'' + ♃) + 1'',33.\sin(12°38'18'' + ♄)$$
$$+ 3'',63.\sin(12°38'18'' + 2♅ - ♃) + 1'',26.\sin(2♃ - ♅ - 11°8'35'')$$
$$- 139'',76.\sin(72°7' + ♄ - 2♅) - 0'',83.\sin(12°38'18'' + 2♄ - ♅)$$

$+ 2'',53 . \sin (24^\circ\, 25'\, 55'' + 2$♄ $- 3$♅$) + t . 0'',006649 . \sin (89^\circ\, 9' +$ ♄ $- 2$♅$)$
$+ 127'',73 . \sin (89^\circ\, 8'\, 27'' +$ ♄ $- 3$♅$)$.

§. 236. L'inégalité la plus considérable des planètes est celle qui dépend de l'ellipticité de leurs orbites, et qu'on appelle l'*équation du centre*. On la trouve dans les tables astronomiques; mais pour en faire usage, il faut connaître très-exactement son argument, l'anomalie ou la longitude *moyenne*, c'est-à-dire le lieu que la planète occuperait, si l'équation elliptique n'existait pas, ainsi que les changemens que ce lieu éprouve par l'action des autres planètes. Il est donc visible que la longitude moyenne doit être corrigée par les principales inégalités, dues aux perturbations, pour former l'argument de l'équation elliptique, ou qu'il faut regarder les corrections de cette équation, qui en résultent, comme de nouvelles inégalités. Cette dernière méthode a été appliquée à l'inégalité de Saturne, $420'' . \sin (13^\circ 36' + 2$♄$-$♃$)$ (§. 225); pour la grande inégalité de Jupiter et de Saturne, qui dépend de la troisième dimension des excentricités, les astronomes ont employé la première méthode. En effet, si l'on se trompe sur la longitude de Saturne de $48'$, ce qui est le *maximum* de sa grande inégalité, cette erreur pourra altérer l'équation du centre de $6'$. En nommant donc les véritables longitudes moyennes de Jupiter et de Saturne, $\varepsilon + nt$, $\varepsilon' + n't$, leurs grandes inégalités, A, A', on doit prendre pour argument de l'équation du centre, ♃ $= \varepsilon + nt + A$, ♄ $= \varepsilon' + n't + A'$. Il s'en suit qu'en corrigeant une longitude observée par l'équation du centre, on ne trouvera pas $\varepsilon + nt$, mais $\varepsilon + nt + A$, et que par conséquent on se trompera de la valeur A, que la grande inégalité avait à l'époque de l'observation, si l'on détermine le moyen mouvement par des obsérvations, sans les corriger par la grande inégalité; ce qui a été le cas dans le tems, où cette inégalité n'était pas connue. Si l'on désigne par T le tems écoulé entre les époques de deux observations, et par M, N, les valeurs de A qui y répondent, on trouvera $\varepsilon + nt + M$ et $\varepsilon + n(t + T) + N$, pour les longitudes moyennes, ce qui donnera $nT + N - M$ pour le moyen mouvement dans le tems T: on commettra donc une erreur de $N - M$. Comme A, A', sont proportionnelles à $\sin (5$♄ $- 2$♃ $+ \ldots\ldots)$, le même intervalle T pourra donner une erreur plus ou moins grande, positive ou

négative, une accélération ou retardation du moyen mouvement. L'erreur peut monter à $2A = 39\frac{1}{2}'$ et à $2A' = 96'$, si l'inégalité a eu sa plus grande valeur positive et négative à l'époque des deux observations. L'effet $\frac{N-M}{T}$ que cette erreur peut avoir sur la détermination du moyen mouvement, dépend de la longueur de la période de la grande inégalité A, A', ou du tems dans lequel l'argument $5♄ - 2♃ - t.63',829 + t^2.0'',000579$ ou $5♄ - 2♃ - t.53',878 + t^2.0'',001176$, augmente de 180°. Or les mouvemens annuels étant $5n' = 21998\frac{1}{4}'$, $2n = 21851'$, on trouvera que cela arrive dans l'espace de 459 ans. Dans une période entière de 918 ans, les inégalités A, A', s'évanouiront deux fois et changeront de 20' à $-20'$, et de 48' à $-48'$. Le moyen mouvement de Saturne, déterminé par deux observations qui ont été faites à des époques, où A' était $-48'$ et 48', sera trop grand de 96' pour 459 ans, ou de 12'' à 13' par an. Deux autres observations, dont la première répond à $A' = 48'$, la seconde à $A' = -48'$, donneront le moyen mouvement trop petit de la même quantité. Ainsi le moyen mouvement pour 459 ans paraîtra plus petit de 192', que dans la période antérieure ou postérieure, d'où il résultera une retardation ou accélération apparente de Saturne. Au reste, comme A et A' sont affectés de signes contraires, le mouvement apparent d'une de ces deux planètes sera accéléré, lorsque l'autre est retardé. Tout cela est parfaitement d'accord avec les observations.

Quand on aura corrigé ainsi l'argument de l'équation du centre, l'équation elle-même et le rayon vecteur auront encore besoin d'une correction. Nous avons supposé $n^2a^3 = n'^2a'^3$ ou $\nu^2\alpha^3 = 1$; mais on a, en vertu de l'attraction mutuelle (§. 57. (C)), $n^2a^3 = \frac{1+m}{1+m'} n'^2a'^3$, ou en négligeant m', $a = \left(\frac{n'}{n}\right)^{\frac{2}{3}} (1+m)^{\frac{1}{3}} a'$. Il faudra donc augmenter $a = \left(\frac{n'}{n}\right)^{\frac{2}{3}} a'$ de la quantité $\frac{ma}{3}$, pour avoir sa juste valeur, qui doit être employée dans le calcul elliptique. D'ailleurs on devra tenir compte de la variation séculaire de l'excentricité, au moyen des valeurs $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$, $\frac{\partial\partial\gamma}{\partial t^2}$, qui ont été données (§. 227.) pour Jupiter et Saturne, les seules planètes où cette correction soit

nécessaire. On calculera donc l'équation du centre et le rayon vecteur sur les formules données plus haut (II. §. 139), en y substituant

$$\mu = \varepsilon + nt + A,\ \gamma = \gamma + t\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{t^2}{2}\cdot\frac{\partial\partial \gamma}{\partial t^2},\ \text{ et } a = a(1 + \tfrac{1}{3}m).$$

§. 237. Dans l'exposition des méthodes pour déterminer les élémens des orbites planétaires par des observations, que nous avons donnée dans le Tome II. de cet ouvrage, nous avons pris pour base la théorie de Kepler: ainsi nous avons supposé que les planètes n'ont point d'autres inégalités que celles qui résultent de leur mouvement elliptique. L'effet inconnu des perturbations doit donc avoir eu une influence pernicieuse sur la détermination des élémens, à laquelle on ne pourra remédier, que lorsqu'on connaîtra la théorie des perturbations avec la même précision que celle du mouvement elliptique. Maintenant, ayant développé toutes les perturbations mutuelles des planètes, il faut combiner les inégalités ou équations qui en résultent, avec les observations, pour corriger les élémens. Pour cela on calculera toutes les inégalités pour l'époque d'une observation, en supposant les élémens connus, et on les appliquera à la longitude observée, en changeant leurs signes, parceque les formules précédentes sont destinées à convertir la longitude moyenne en longitude vraie. La longitude, corrigée avec toutes ces perturbations, donnera la longitude moyenne, qui pourra servir d'époque. C'est un de ces cas, si fréquens dans l'astronomie, où, à cause des difficultés que présente le chemin droit, on approche de la vérité par des détours, qui ressemblent à un cercle vicieux, mais qui forment effectivement une spirale très-convergente. Pour déterminer les élémens elliptiques, il fallait commencer par adopter la fausse hypothèse du mouvement circulaire; les élémens elliptiques sont nécessaires, pour calculer les perturbations, sans lesquelles il est impossible de déterminer exactement les élémens. L'astronomie doit à cette méthode d'approximation les vérités les plus importantes, qu'on n'aurait jamais découvertes, en suivant le chemin droit.

§. 238. On a vu dans le Tome II, que le mouvement des noeuds et des apsides des planètes a été determiné immédiatement par observation; nous venons de déterminer le même mouvement par la théorie de la pesan-

teur universelle. Il est donc facile de vérifier cette théorie par la comparaison des formules précédentes avec les observations; on pourra même s'en servir, pour corriger les masses des planètes que nous avons adoptées dans ces formules. Le plan de cet ouvrage ne permet pas d'entrer dans le détail de ces recherches, qui d'ailleurs n'ont aucune difficulté. Il sera cependant utile de dire quelques mots relativement à la grande inégalité de Jupiter et de Saturne, la seule perturbation périodique des planètes, que les observations avaient indiquée, longtems avant qu'on se doutât de leur attraction mutuelle.

Kepler avait déjà remarqué, que le moyen mouvement de Jupiter et de Saturne n'était plus conforme aux observations de Ptolémée; et Flamstead observa, que les tables de Tycho donnaient trop de vitesse à Saturne et trop peu à Jupiter, d'où il suivait une accélération du moyen mouvement de Jupiter, et un retardement de Saturne, dans le siècle écoulé entre Tycho et Flamstead. Cette équation séculaire est très-sensible dans Saturne. Si on compare l'opposition de cette planète, observée 228 ans avant J. C., avec celle de l'an 1714, on treuvera le mouvement annuel de Saturne $= 12°13'35''$. Comparant l'opposition de 1594 avec celle de 1713, on trouve le mouvement annuel $= 12°13'20''$, plus petit de $15''$ que le précédent (1). Nous avons trouvé, en partant de l'époque 1800, $A = -\beta' \sin \psi'$ (§. 235.), en faisant

$$\psi' = 5♄ - 2♃ + 2°35'14'' - t.53'',878 + t^2.0'',0011757,$$

$$\beta' = 2871'',8 - t.0'',1068 - t^2.0''000024.$$

Les tables astronomiques donnent pour 1800,

$$5♄ - 2♃ = 91°40'23'', \quad 5n' - 2n = 1471'',$$

d'où l'on conclura la valeur de ψ' pour l'an $1800 = 94°15'37'' = \psi$, et son accroissement en t ans $= t.1417'' + t^2.0'',0011757$. Au moyen de ces valeurs on trouvera pour les années

(1) *Astronomie par La Lande, Liv. V.* §. 1164. éd. trois.

228 avant J. C.	1714	1594
$t = -2028$	$t = -86$	$t = -206$
$\psi' = 16°1'1''$	$\psi' = 60°24'14''$	$\psi' = 13°11'22''$
$\beta' = 2990''$	$\beta' = 2881''$	$\beta' = 2893''$
$A' = -825'' = M$	$A' = -2505'' = N$	$A' = -660'' = M'$

Ainsi les deux premières observations donneront le moyen mouvement annuel $= n' + \frac{N - M}{1942} = n' - \frac{1680''}{1942} = n' - 0'',7$; et les deux dernières $n' + \frac{N - M'}{119} = n' - \frac{1845''}{119} = n' - 15'',5$; plus petit de $14'',8$ que le précédent, ainsi que les observations l'avaient indiqué.

CHAPITRE VIII.

Théorie de la Lune.

§. 239. La théorie de la Lune est l'application du problème des trois corps, et des formules qui en ont donné la solution, aux perturbations que la Lune éprouve dans son mouvement autour de la Terre, par l'attraction du Soleil. Mais ces formules étant trouvées par une approximation, fondée sur des suppositions qui ne sont pas admissibles dans la lune, la théorie de ce satellite exige un calcul différent, et plus pénible que celle des planètes. Une de ces suppositions est celle, que la masse perturbatrice soit si petite par rapport à la masse centrale, qu'on puisse négliger son carré. La masse de Jupiter, qui est à peine la millième partie du soleil, suffit cependant, pour produire, dans le mouvement de Saturne, des inégalités d'un degré. Mais dans les perturbations de la lune, la masse perturbatrice, divisée par la masse centrale, $\frac{☉}{♁} = m'$, est un très-grand nombre, 354790. Ainsi, quoique ce nombre soit partout multiplié par le cube du rapport des demi-diamètres des orbites de la lune et de la terre, c'est-à-dire, divisé par 64000000; le quotient 0,006 est trop considérable, pour qu'on puisse négliger son carré. L'ensemble des perturbations de la lune est d'environ deux degrés, ce qui étant multiplié par 0,0055 donne 43″: ainsi le carré de la masse pourra produire des inégalités de plus d'une minute.

La méthode dont on se sert pour calculer les inégalités de la lune, n'est pas essentiellement différente de celle qui a été employée pour les planètes. C'est la transformation, combinaison et séparation des trois équations fondamentales, fournies par la dynamique (§. 159.), par laquelle on obtient

de nouvelles formules différentielles qui donnent séparément le rayon vecteur, la longitude, et la latitude (§. 164 — 167.). La forme de la première de ces trois équations ayant indiqué la forme de son intégrale, on différentie cette dernière; en comparant cette différentielle avec celle qui est donnée, on détermine les coefficiens de l'intégrale; et en les substituant dans les deux autres équations différentielles, on trouve l'intégrale de la longitude et de la latitude. Le développement complet de ce calcul n'entre pas dans le plan de cet ouvrage. Il suffira de déduire des principes généraux, les variations des élémens de l'orbite lunaire, et ses plus grandes inégalités périodiques, suivant la méthode que Newton a adoptée dans son immortel ouvrage. Cependant nous donnerons aussi un abrégé de la méthode de M. de Laplace.

§. 240. Soit (*Fig.* 44) T la terre, supposons que le soleil se meuve autour de la terre suivant OSP, la lune L suivant LADBC dans une ellipse qui s'écarte très-peu du cercle, et nommons $\odot$ la masse du soleil, divisée par celle de la terre, $TS = a$, $TL = y$, $LS = z$. Cela posé, la terre sera sollicitée suivant TS par la force $\frac{\odot}{a^2} = T$, la lune suivant LT par la force $\frac{1}{y^2} = P$, et suivant LS par la force $\frac{\odot}{z^2}$, qui sera décomposée en les forces $\frac{\odot y}{z^3} = Q$ suivant LT, et $\frac{\odot a}{z^3} = R$ suivant TS. Si la force R était égale à T, elle ne changerait point le mouvement relatif de la lune autour de la terre, et son seul effet consisterait à approcher du soleil le centre de gravité de ces deux corps: d'où il suit, que la lune s'éloignera de la terre parallèlement à TS, en vertu de la force $\odot a\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{a^3}\right) = S$. Or la plus grande et la plus petite valeur de z étant $SB = a + y$, et $SA = a - y$, et par conséquent sa valeur moyenne $ST = a$, il est visible qu'en général cette force ne peut pas altérer la distance *moyenne* de la lune à la terre. Les forces qui accélèrent le mouvement relatif de la lune autour de la terre, sont donc

$$P + Q \text{ suivant } LT, \text{ et } S \text{ suivant } TS \text{ ou } LM.$$

En prolongeant TL à V, menant la tangente de l'orbe lunaire LN qui est perpendiculaire à LV, et nommant Φ l'angle $STL = \odot - \mathbb{C} = MLV$; la force S se décomposera en les forces $S.\sin\Phi$ suivant LN, et $S.\cos\Phi$ suivant LV. La lune sera donc sollicitée par

la force *centrale* $N = \frac{1}{y^2} + \frac{\odot y}{z^3} - \frac{\odot (a^3 - z^3)}{a^3 z^3} \cos \Phi$ suivant LT,

et la force M *suivant la tangente* $LN = \frac{\odot (a^3 - z^3)}{a^3 z^3} \sin \Phi$.

La dernière est employée principalement à modifier la vitesse de la lune, tandis que la première altère la nature même de son orbite.

Dans les syzygies A, B, on a $\sin \Phi = 0$, dans les quadratures C, D, $z = a$; la force M est donc nulle dans ces quatre points. Depuis le dernier quartier C jusqu'à la nouvelle lune A, $\sin \Phi$ est positif et $z < a$; du premier quartier à la pleine lune B, $\sin \Phi$ est négatif et $z > a$: la force M est donc positive ou *accélératrice* dans ces deux cas; elle est négative ou *retardatrice* depuis la nouvelle lune jusqu'au premier quartier, et de la pleine lune au dernier quartier.

§. 241. Dans le premier et le dernier quartier on a $\cos \Phi = 0$, $z = a$, partant $N = \frac{1}{y^2} + \frac{\odot y}{a^3}$; dans la conjonction A, N est $= \frac{1}{y^2} + \frac{\odot (y - a)}{(a - y)^3} + \frac{\odot}{a^2}$ $= \frac{1}{y^2} - \frac{\odot (2ay - y^2)}{a^2 (a - y)^2}$, et à cause de la petitesse de y par rapport à a, $N = \frac{1}{y^2} - \frac{2 \odot y}{a^3}$ à fort peu près; dans l'opposition B on a $N = \frac{1}{y^2} + \frac{\odot (y + a)}{(y + a)^3} - \frac{\odot}{a^2}$ $= \frac{1}{y^2} - \frac{2 \odot y}{a^3}$. Il suit de là, que la force centrale $\frac{1}{y^2}$ éprouve la plus grande *augmentation*, $\frac{\odot y}{a^3}$, dans les *quadratures*, et la plus grande *diminution*, $\frac{2 \odot y}{a^3}$, dans les *syzygies*.

Ayant abaissé sur ST la perpendiculaire LF, on a à très-peu près $z = SF$, d'où il suit $z = a - y \cos \Phi$ et $z^3 = a^3 - 3a^2 y \cos \Phi$. Cela donne

$$M = \frac{3 \odot y \sin \Phi \cos \Phi}{z^3} = \frac{3 \odot y \sin 2\Phi}{2 a^3}, \; N = \frac{1}{y^2} + \frac{\odot y (1 - 3 \cos^2 \Phi)}{z^3} = \frac{1}{y^2} - \frac{\odot y (1 + 3 \cos 2\Phi)}{2 a^3}.$$

Il s'en suit, que la force M est un *maximum* positif dans les octans qui précèdent les syzygies, et un *maximum* négatif dans les octans qui précèdent les quadratures. La force centrale est $= \frac{1}{y^2}$, et n'éprouve par conséquent aucune altération, si $1 + 3 \cos 2\Phi$ est nul, ou $\cos 2\Phi = -\frac{1}{3}$, c'est-à-dire lorsque $\Phi = 54°44'$, $\Phi = 125°16'$, $\Phi = 135°16'$, ou $\Phi = 234°44'$, ce qui arrive à 10 degrés avant les octans qui précèdent les syzygies, et à 10° après les octans qui précèdent les quadratures. Dans ces quatre points, la force centrale change

précisément en raison inverse du carré des distances; mais dans tout le reste de l'orbite lunaire la force centrale suit des lois différentes. Cherchons la loi qui a lieu dans les points principaux de l'orbite.

Dans les quadratures on a $N = \frac{a^3 + \odot y^3}{a^3 y^2}$. En désignant par y' une valeur très-peu différente de y, et par N' la force centrale dans la distance y', on aura $N : N' :: \frac{1}{y^2}\left(1 + \frac{\odot y^3}{a^3}\right) : \frac{1}{y'^2}\left(1 + \frac{\odot y'^3}{a^3}\right)$. Faisons $\frac{\odot y^3}{a^3} = \alpha$, $\frac{\odot y'^3}{a^3} = \alpha'$, de sorte que

$$N : N' :: \frac{1+\alpha}{y^2} : \frac{1+\alpha'}{y'^2},\ \alpha \text{ étant à peu près } 0{,}005\ (\S.\ 239.).$$

Or y doit être exprimé par le rayon de la terre (§. 59.), ensorte que $y = 60$ à peu près, d'où il suit que toutes les puissances de y, qui ont un exposant positif, soit entier soit fractionnaire, sont des nombres plus grands que l'unité: conséquemment un peut donner à la proportion précédente cette forme,

$$N : N' :: \frac{y^\nu}{y^2} : \frac{y'^\nu}{y'^2} :: \frac{1}{y^{2-\nu}} : \frac{1}{y'^{2-\nu}} :: \frac{1}{y^n} : \frac{1}{y'^n},$$

ν étant une très-petite fraction positive, et $n < 2$. Il suit de là, que dans les quadratures, la force centrale change dans un rapport qui est moindre que celui du carré des distances.

Par le même procédé on trouvera dans les syzygies,

$$N : N' :: \frac{a^3 - 2\odot y^3}{y^2} : \frac{a^3 - 2\odot y'^3}{y'^2} :: \frac{1-\beta}{y^2} : \frac{1-\beta'}{y'^2} :: \frac{y^{-\lambda}}{y^2} : \frac{y'^{-\lambda}}{y'^2} :: \frac{1}{y^{2+\lambda}} : \frac{1}{y'^{2+\lambda}},$$

β étant $\frac{2\odot y^3}{a^3} = 2\alpha = 0{,}011$. On a donc $1 + \alpha = y^\nu$, et $1 - \beta = y^{-\lambda}$, d'où l'on tire

$$\nu \log y = \log(1+\alpha),\quad -\lambda \log y = \log(1-\beta),\ \text{ou à fort peu près},$$
$$\nu \log y = \alpha,\quad \lambda \log y = \beta = 2\alpha,\quad \text{donc}\quad \lambda = 2\nu.$$

En faisant $N = \frac{1}{y^m}$, m est plus grand que 2, et $m - 2 = 2(2-n)$. Il en suit que, dans les syzygies, la force centrale change dans un rapport plus grand que celui du carré des distances.

La partie de la force centrale, qui modifie la nature de la courbe, savoir $\frac{1}{y^2} - N = \frac{\odot y}{2a^3}(1 + 3\cos 2\Phi)$, est un *maximum* $= \frac{2\odot y}{a^3}$ dans les syzygies; mais sa valeur actuelle dépend de la situation des apsides. Si l'on nomme

N, N', les forces centrales dans les syzygies, qui conviennent aux distances y, y', on a vu que

$$N : N' :: \frac{a^2 - 2 \odot y^3}{y^2} : \frac{a^2 - 2 \odot y'^3}{y'^2}.$$

Ce rapport serait précisément le rapport inverse du carré des distances, si $2\odot y^3$, $2\odot y'^3$, étaient égales: il sera donc dérangé d'autant plus, que y et y' diffèrent plus l'un de l'autre. Or leur différence étant un *maximum*, si l'un des deux points coïncide avec le périgée, et l'autre avec l'apogée, il en suit, que la force centrale s'écarte le plus du rapport inverse du carré des distances, et que par conséquent la nature de l'ellipse éprouve le plus grand dérangement, quand les apsides coïncident avec les syzygies; et que le dérangement est le plus petit, lorsque les apsides coïncident avec les quadratures.

§. 242. On a vu (§. 240.) que la force M augmente la vitesse de la lune, dans toute la portion de son orbite de C en A et de D en B, mais qu'en A et B elle commence à la retarder. Il en suit, que la vitesse de la lune est un *maximum* dans les syzygies, et un *minimum* dans les quadratures, et que par conséquent son mouvement horaire augmente depuis les quadratures jusqu'aux syzygies, et qu'il diminue des syzygies aux quadratures. Il en naît la grande inégalité du mouvement horaire $= 40'' \cos 2\Phi$, qui est $+ 40''$ dans les syzygies, $- 40''$ dans les quadratures, et nulle dans les octans: on la trouve dans la *Tab.* LI. de M. Bürg.

Dans les syzygies, la vitesse est un *maximum*, et la force centrale un *minimum* (§. 241.). Il suit de là, que le mouvement de la lune s'écarte moins de la tangente, ou que son orbite a la plus grande courbure dans les syzygies, et la plus petite dans les quadratures. Il est donc visible, que la lune approchera le moins de la terre dans les syzygies, et le plus dans les quadratures. Or comme il est impossible que la lune approche continuellement de la terre, son orbite n'étant pas une spirale mais une courbe fermée, il s'en suit que la lune commencera à s'éloigner de la terre dans les syzygies, et à s'en rapprocher dans les quadratures, et que par conséquent sa distance à la terre est la plus petite dans les syzygies, et la plus grande dans les quadratures; de manière que son orbite ressemblera à un cercle,

aplati sur la ligne des syzygies, et alongé sur la ligne des quadratures: ce qui est conforme à l'inégalité de la parallaxe $= 26'' \cos 2\phi$ (II. §. 213.). On verra aisément, que cela suppose l'orbite circulaire; si l'on a égard à son ellipticité, on trouvera de pareils changemens, qu'éprouve l'excentricité ou la nature de l'ellipse.

Soit (*Fig.* 45.) T le foyer, C le centre, A l'apogée, B le périgée, CT l'excentricité de l'orbite elliptique ALB que la lune L décrirait continuellement, si la force centrale $N = \frac{A}{y^n}$ était toujours en raison inverse du carré de la distance $TL = y$, ou ce qui revient au même, si n était $= 2$. Mais si la force, de A en B, augmente dans un rapport plus grand, n étant > 2, la lune approchera de la terre T: sa vraie orbite Alb tombera en dedans de l'ellipse ALB, Tb sera moindre que TB, et c, le milieu de Ab, sera plus éloigné de T que le centre C; conséquemment l'excentricité Tc augmentera d'autant plus, que le grand axe Ab diminue en même tems. Par la même raison, en supposant encore $n > 2$, la lune s'écartera de la terre de b en A, parceque la force centrale diminue dans un rapport plus grand: elle décrira l'ellipse bda, et le milieu γ de ba sera plus éloigné de T que c; ainsi l'excentricité augmentera également dans l'autre moitié de l'orbite. Le contraire aura lieu, si n est plus petit que 2. Or n surpassant le nombre 2, ou celui-ci surpassant n le plus, selon que les apsides coïncident avec les syzygies ou avec les quadratures (§. 241.), il en suit, que l'excentricité est un *maximum*, lorsque les apsides coïncident avec les syzygies, ou la plus grande équation du centre avec les quadratures, et qu'elle est un *minimum*, si la plus grande équation a lieu dans les syzygies; et qu'en général l'excentricité augmentera ou diminuera, selon que la ligne des apsides avance des quadratures aux syzygies, ou des syzygies aux quadratures. Ce sont précisément les mêmes phénomènes que Ptolémée avait déjà observés, et qui sont connus sous le nom d'*évection* (II. §. 195.). Ce changement de l'excentricité est parfaitement conforme à celui que les astronomes modernes ont déterminé par observation, et qui est proportionnel au cosinus du double de la distance du soleil à l'apogée de la lune (II. §. 198.).

§. 243. Si les points où la lune parvient à sa plus grande et à sa plus petite distance de la terre, ne sont pas les mêmes à chaque révolution, sa véritable orbite ne sera pas une ellipse, mais une autre courbe dont la nature dépend des perturbations; il en est de même des changemens de l'excentricité, dont nous venons de parler. Mais comme la lune ne s'écarte pas beaucoup de l'ellipse, et que toutes les tables astronomiques sont fondées sur la théorie elliptique, cette théorie a été adoptée aussi pour la lune, et l'on a représenté le mouvement des apsides par une fiction, en supposant que la lune décrit une ellipse qui tourne en même tems autour de la terre. Pour répandre plus de jour sur cette matière, il sera nécessaire de dire quelques mots sur le mouvement d'un corps dans une orbite mobile, en supposant que ce mouvement résulte d'une petite déviation de la force centrale du rapport inverse du carré des distances.

Soit (*Fig.* 41.) A′ M′ B′ l'orbite elliptique de la lune, C la terre, A′ le périgée, M′ le lieu où la lune se trouverait à une certaine époque, si son mouvement n'était pas troublé par le soleil. Supposons qu'en vertu de ces perturbations, l'ellipse entière tourne autour de C, ensorte qu'elle prenne la position AMB, faisons $ACM = A'CM'$: cela posé, M sera le vrai lieu de la lune, et $CM = CM' = y$ la vraie distance. Le mouvement *réel* de la lune de A′ en M est composé de son mouvement *relatif* A′ M′, et du *mouvement de l'orbite* A′ A. Désignons par w et v les vitesses relative et réelle en M ou M′, et supposons que les vitesses angulaires dans le mouvement réel et le mouvement relatif soient entre elles comme μ à 1, et que l'ellipse soit donnée par une équation entre le rayon vecteur y et la perpendiculaire abaissée sur la tangente, $CT = CT' = u$. Si dans le tems ∂t, la lune parcourt l'arc $M'm' = Mm$, et que dans le même tems l'orbite, en tournant autour de C, décrive l'angle $mC\mu$, ayant fait $C\mu = Cm$, μ sera le vrai lieu de la lune au bout du tems $t + \partial t$, et $M\mu$ est l'élément de sa vraie orbite. $Ct = p$ étant perpendiculaire à $M\mu$, et $Mn\nu$ un arc de cercle, décrit du centre C. Cela posé on aura

$$Mn : M\nu :: 1 : \mu, \quad M\mu : Mm :: v : w, \quad mn = \partial y,$$

et en faisant $MT = \sqrt{(y^2 - u^2)} = q$, les triangles semblables MCT, mMn, donneront

$$Mm = \frac{y\partial y}{q}, \quad Mn = \frac{u\partial y}{q}, \quad \text{donc } M\mu = \frac{vy\partial y}{wq} \text{ et } M\nu = \frac{\mu u\partial y}{q}.$$

Si on substitue $\mu\nu^2 + M\nu^2 = M\mu^2$ et $\mu\nu = mn = \partial y$, on aura $1 + \frac{\mu^2 u^2}{q^2} = \frac{v^2 y^2}{w^2 q^2}$, ou

$$(1) \ldots\ldots v^2 y^2 = w^2 q^2 + \mu^2 w^2 u^2,$$

et les triangles semblables MCt, $\mu M\nu$, fourniront $Ct = \frac{M\nu}{M\mu} CM$, donc

$$(2) \ldots\ldots p = \frac{\mu w u}{v}.$$

Dans le périgée A', CA' est perpendiculaire aux arcs de l'ellipse et de la vraie orbite lunaire, parceque la rotation de l'orbite autour de C doit constamment être perpendiculaire au rayon vecteur. On aura donc dans ce point $y = p = CA' = e$, et la vraie vitesse v aura une valeur c qui est déterminée par les élémens de l'orbite. Or dans toutes les forces centrales, les vitesses sont en raison inverse des perpendiculaires, abaissées de C sur la tangente (§. 21.), d'où l'on conclura

$$v = \frac{ce}{p} = \frac{cve}{\mu w u} \text{ (par (2)), donc } w = \frac{ce}{\mu u};$$

ce qui étant substitué en (1) (2), donnera

$$(3) \ldots\ldots v^2 = \frac{c^2 e^2 (q^2 + \mu^2 u^2)}{\mu^2 u^2 y^2}, \qquad (4) \ldots\ldots p = \frac{\mu u y}{\sqrt{(q^2 + \mu^2 u^2)}}.$$

Si on fait $MC\mu = \partial\Phi$, les triangles semblables MCt, $\mu M\nu$, donneront $\partial y = \frac{y\partial\Phi}{p}\sqrt{(y^2 - p^2)}$; et l'on a, pour toutes les forces centrales, $y\partial\Phi = \frac{A\partial t}{y}$ (§. 20.), d'où l'on tirera $\partial y = \frac{A\partial t}{py}\sqrt{(y^2 - p^2)}$, et en différentiant, $\partial\partial y = \frac{A\partial t\,(p^2\partial y - y^2\partial p)}{p^2 y^2 \cdot \sqrt{(y^2 - p^2)}}$. Si on substitue $\sqrt{(y^2 - p^2)} = \frac{py\partial y}{A\partial t}$, il viendra

$$\partial\partial y = A^2\partial t^2\left(\frac{1}{y^3} - \frac{\partial p}{p^3\partial y}\right), \quad y\partial\Phi^2 = \frac{A^2\partial t^2}{y^3}, \quad \partial\partial y - y\partial\Phi^2 = -\frac{A^2\partial t^2\partial p}{p^3\partial y}.$$

En substituant cela dans l'équation IV (§. 19.), on aura pour toutes les forces centrales P l'équation, $2gP = \frac{A^2}{p^3}\frac{\partial p}{\partial y}$. Mais $A = vp = ce$ (§. 21.), donc

$$(5) \ldots\ldots 2gP = \frac{c^2 e^2 \partial p}{p^3 \partial y}.$$

Dans l'ellipse ou l'orbite relative, $wu = \frac{ce}{\mu}$ doit avoir une valeur constante C, d'où il suit que μ est aussi une constante. En différentiant donc (4) $\frac{1}{p^2} = \frac{y^2 + (\mu^2 - 1)u^2}{\mu^2 u^2 y^2}$, on aura $\frac{\partial p}{p^3} = \frac{(\mu^2 - 1)\partial y}{\mu^2 y^3} + \frac{\partial u}{\mu^2 u^3}$, donc par (5),

$$(6) \ldots\ldots 2gP = \frac{c^2 e^2 \partial u}{\mu^2 u^2 \partial y} + \frac{(\mu^2 - 1) c^2 e^2}{u^2 y^3}.$$

Si on nomme Q la force centrale dans l'orbite elliptique A′M′, qui doit être proportionnelle à $\frac{1}{y^2}$, on aura de même $2gQ = \frac{C^2 \partial u}{u^2 \partial y}$, et en nommant γ la vitesse relative dans le périgée A′, et substituant $C = wu = \gamma e$,

$$2gQ = \frac{\gamma^2 e^2 \partial u}{u^2 \partial y}.$$

Or dans les apsides, le mouvement réel et le mouvement relatif sont de petits arcs de cercle autour du centre C, d'où il suit que ces deux vitesses seront entre elles comme les vitesses angulaires: on a donc

$$c : \gamma :: \mu : 1, \text{ conséquemment } 2gQ = \frac{c^2 e^2 \partial u}{\mu^2 u^2 \partial y}.$$

Si on substitue cela en (6), on aura

$$(7) \ldots\ldots 2g(P - Q) = \frac{(\mu^2 - 1) c^2 e^2}{\mu^2 y^3},$$

ce qui est la partie de la force centrale, qui dérange le mouvement elliptique, en tournant l'ellipse autour de C, et produisant le mouvement des apsides.

§. 244. La force perturbatrice que nous venons de trouver (7), est réciproquement proportionnelle au cube de la distance y, tandis que Q l'est au carré. On peut donc faire la dernière $= \frac{f^2}{y^2}$, la première $= \frac{h^3}{y^3}$, et par conséquent la force centrale entière, $P = \frac{f^2 y + h^3}{y^3}$. En comparant cela aux expressions précédentes de $2gP$ et $2gQ$ (§. 243.), on aura $h^3 = \frac{(\mu^2 - 1)\gamma^2 e^2}{2g}$, partant

$$\mu = \frac{\sqrt{(2gh^3 + \gamma^2 e^2)}}{\gamma e}.$$

Si on fait $y = e + z$, $P = \frac{E + Fz}{y^3}$, on aura $P = \frac{f^2 e + h^3 + f^2 z}{y^3}$, donc $f = \sqrt{F}$, et $h^3 = E - Fe$. Comme l'orbite lunaire s'écarte fort peu du cercle, on peut supposer le paramètre $k = 2e$, ce qui donne (§. 34. (3)) $\gamma^2 e^2 = gf^2 k = 2gFe$, d'où il vient $2gh^3 + \gamma^2 e^2 = 2gE$, donc

$$\mu = \sqrt{\frac{E}{Fe}},$$

équation qui servira à comparer les mouvemens de la lune et de ses apsides.

Si dans un certain tems, la lune va de A′ en M, le périgée de A′ en A, les vitesses, avec lesquelles croissent les angles A′CM et A′CM′, seront entre

elles comme μ et 1 (§. 243.). En nommant donc le mouvement relatif de la lune A C M' = ☾, celui des apsides A' C A = ψ on aura

$$\partial\psi = \partial . A'CM - \partial ☾ = (\mu - 1)\partial ☾ = \frac{\sqrt{E} - \sqrt{Fe}}{\sqrt{Fe}}\partial ☾.$$

Si on fait $E + Fz = Y$, on aura dans le périgée $Y = E$, y étant $= e$: ainsi y étant $= e + \partial y = e + z$, Y deviendra $E + \partial Y = E + Fz = E + F\partial y$, d'où il vient $F = \frac{\partial Y}{\partial y}$. Le mouvement des apsides sera dono

$$\partial\psi = \left\{ \sqrt{\frac{Y\partial y}{y\partial Y}} - 1 \right\} \partial ☾.$$

Le mouvement ∂☾ étant toujours direct, il en suit, que les apsides de la lune auront un mouvement *direct* ou *rétrograde*, selon que $\frac{\partial y}{y}$ est plus ou moins grand que $\frac{\partial Y}{Y}$, et qu'ils sont stationnaires, lorsque $\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial Y}{Y}$. Alors on a $\partial . \log y = \partial . \log Y$, donc $Y = \alpha y$, et $P = \frac{Y}{y^2} = \frac{\alpha}{y^2}$: la force perturbatrice disparaît, et le mouvement est elliptique

La force centrale est en général (§. 241.), $N = \frac{1}{y^2} - \frac{\odot y(1+3\cos 2\Phi)}{2a^3} = \frac{Y}{y^2}$. En faisant donc $\frac{1+3\cos 2\Phi}{2a^3}\odot = S$, on aura $Y = y - Sy^4$, d'où $\frac{\partial Y}{\partial y} = 1 - 4Sy^3$. Il en suit $\partial\psi = \left\{ \sqrt{\frac{1 - Sy^3}{1 - 4Sy^3}} - 1 \right\} \partial ☾$, ou à très peu près

$$\partial\psi = \{ \sqrt{(1 + 3Sy^3)} - 1 \} \partial ☾ = \tfrac{3}{2} Sy^3 \partial ☾.$$

Supposons que le mouvement périodique de la lune, ∂☾, soit à son mouvement synodique, $-\partial\Phi$, comme n à 1, ou $\partial ☾ = -n\partial\Phi$: alors on aura

$$\partial\psi = \frac{3\odot y^3}{4a^3}(\partial ☾ - 3n\partial\Phi\cos 2\Phi),$$

dont l'intégrale donnera le *mouvement des apsides*,

$$\psi = \frac{3\odot y^3}{4a^3}(☾ - \tfrac{3}{2} n \sin 2\Phi).$$

Le premier terme donne $\frac{\odot y^3}{a^3}\, 270^\circ$ pour le *moyen* mouvement des apsides dans un mois périodique, lequel est par conséquent toujours direct; le second terme $-\frac{9ny^3}{8a^3}\odot\sin 2\Phi$ donne la *libration* des apsides, ou l'*équation de l'apogée*. Elle s'évanouit dans les syzygies et quadratures; elle est un *maximum* positif dans les octans qui précèdent les quadratures, et un *maximum* négatif dans les octans qui précèdent les syzygies, parceque $\Phi = \odot -$ ☾. Cela

est parfaitement d'accord avec l'équation des apsides, découverte par Ptolémée (II. §. 196.), qui est intimément liée avec la variation de l'excentricité (§. 242.), ainsi que le fait voir l'hypothèse que les astronomes modernes ont adoptée pour calculer l'évection (II. §. 198.). Quand on ne considère l'équation des apsides qu'à l'égard de la correction de l'équation du centre qui en résulte, et qui doit nécessairement dépendre de l'anomalie de la lune, et par conséquent du lieu des apsides, il en naîtra un argument qui renferme l'élongation du soleil de la lune, et de la lune des apsides, conséquemment la distance du soleil à l'apogée de la lune (II. §. 198.).

Soit l'apogée de la lune $= \varpi$, l'équation des apsides, $\varepsilon \sin 2(☾ - \odot) = \partial\varpi$, celle de l'excentricité, $\delta \cos 2(\odot - \varpi) = \partial\gamma$ (§. 242.) Cela posé, le premier terme de l'équation du centre, $-2\gamma \sin(☾ - \varpi)$, aura besoin de la correction $-2\partial\gamma \sin(☾ - \varpi) + 2\gamma\partial\varpi . \cos(☾ - \varpi) = -\delta \sin(☾ - \varpi + 2\odot - 2\varpi)$ $-\delta \sin(☾ - \varpi - 2\odot + 2\varpi) + \varepsilon\gamma \sin(2☾ - 2\odot + ☾ - \varpi) + \varepsilon\gamma \sin(2☾ - 2\odot - ☾ + \varpi)$. Le second et le quatrième terme donnent l'*évection*, qui a le même argument, $\sin(☾ - 2\odot - ☾ + \varpi)$; le troisième terme est l'équation XIII. de la longitude de la lune, dans les tables de M. Bürg (II. §. 198. 204.).

§. 245. La force $\frac{1}{y^2} + \frac{\odot y}{z^3}$ (§. 140.), qui sollicite la lune suivant LT (*Fig.* 47.), agit dans le plan de l'orbite lunaire; elle ne peut donc pas déplacer ce plan. Mais l'autre force $P = \frac{\odot(a^3 - z^3)}{a^3 z^3}$ suivant TS ou LM, n'est pas dans ce plan, excepté le seul cas où le soleil est dans le noeud de la lune: elle pourra donc altérer la latitude de la lune, et nous avons trouvé (§. 241.) à peu près $P = \frac{3\odot y \cos\Phi}{a^3}$. Supposons que la lune décrive dans le tems ∂t l'arc $Ll = y\partial☾$ autour de la terre T, le soleil étant en S, et que la prolongation de Ll rencontre l'écliptique en N, de manière que TN soit la ligne des noeuds, N le noeud descendant, en supposant que la latitude de la lune en L est boréale. Soit $l\lambda$ la petite ligne, parallèle à TS, que la lune a parcourue dans le tems ∂t, en vertu de la force P. Cela posé, le vrai mouvement sera $L\lambda$; et si la prolongation de $L\lambda$ rencontre l'écliptique en n; Tn sera la nouvelle position de la ligne des noeuds, et $NTn = -\partial\zeta$ la différentielle du mouvement rétrograde des noeuds. La ligne $l\lambda$, étant parallèle à TS, et par conséquent à l'écliptique, le sera aussi à Nn, la

commune section du plan $L l\lambda$ et de l'écliptique: ainsi les trois lignes TS, $l\lambda$, Nn, étant parallèles entre elles, on aura

$$Nn = \frac{l\lambda}{y\partial ☾} LN, \text{ et } TNn = ☊TS = ☉ - ☊ = \alpha.$$

Ayant donc abaissé sur TN la perpendiculaire nR, il viendra

$nR = Nn \sin TNn = \frac{l\lambda}{y\partial ☾} LN \sin\alpha$, et $\sin NTn = \frac{nR}{Tn}$, ou à très-peu près,

$$\partial\zeta = -\frac{nR}{TN} = -\frac{l\lambda}{y\partial ☾} \cdot \frac{LN}{TN} \cdot \sin\alpha.$$

Puisque nous regardons ici l'orbe lunaire comme un cercle, on a

$TLN = 90^\circ$, $LTN = 180^\circ - (☾ - ☊) = 180^\circ - \lambda$, $\frac{LN}{TN} = \sin LTN = \sin\lambda$, donc

$$\partial\zeta = -\frac{l\lambda}{y\partial ☾} \sin\alpha \sin\lambda = -\frac{l\lambda}{2y\partial ☾} \{\cos(\lambda - \alpha) - \cos(\lambda + \alpha)\}.$$

Les principes de dynamique fournissent les équations (§. 17. 164.)

$$l\lambda = 2gP\partial t^2, \quad \text{et} \quad 2g☉ = n^2 a^3,$$

a étant la distance moyenne de la terre au soleil, et n sa vitesse moyenne, de sorte que $n\partial t = \partial ☉$ est le moyen mouvement de la terre ou du soleil. On a donc

$$l\lambda = \frac{P}{☉} a^3 \partial ☉^2 = 3y\partial ☉^2 \cos\Phi, \text{ et en faisant } \frac{\partial ☾}{\partial ☉} = h,$$

$$\partial\zeta = -\frac{3\cos\Phi}{2h} \partial ☉ \{\cos(\lambda - \alpha) - \cos(\lambda + \alpha)\} =$$

$$-\frac{3\partial ☉}{4h} \{\cos(\Phi + \lambda - \alpha) + \cos(\Phi - \lambda + \alpha) - \cos(\Phi + \lambda + \alpha) - \cos(\Phi - \lambda - \alpha)\}.$$

Mais $\Phi = ☉ - ☾ = \alpha - \lambda$, partant

$$(A) \ldots\ldots \partial\zeta = -\frac{3\partial ☉}{4h} \{1 + \cos 2\Phi - \cos 2\alpha - \cos 2\lambda\}.$$

Le premier terme $\int \frac{3\partial ☉}{4h} = \frac{270^\circ}{h}$ est la *moyenne* rétrogradation annuelle des noeuds, qui par conséquent, en substituant $h = 13{,}36\cdot 75$ (§ 60.), est $= -20^\circ 11' 47''$, ce qui est de $52'$ ou de la 23 me partie plus grand que suivant les observations (§. 205.). Les autres termes, $\partial\zeta = \frac{3\partial ☉}{4h} \{\cos 2\alpha + \cos 2\lambda - \cos 2\Phi\}$, donnent les oscillations périodiques des noeuds, dont on trouvera l'intégrale, en exprimant successivement $\partial ☉$ par $\partial\alpha$, $\partial\lambda$, et $\partial\Phi$. Si on fait le moyen mouvement des noeuds, que nous venons de trouver, $= -k\partial ☉$, on aura

$$k = \frac{19^\circ\, 19' 43''}{360^\circ} = 0{,}05369;\quad \partial\alpha = \partial\odot - \partial\Omega = (1+k)\,\partial\odot,$$

$\partial\lambda = \partial☾ - \partial\Omega = (h+k)\,\partial\odot$, $\partial\Phi = \partial\odot - \partial☾ = (1-h)\,\partial\odot$; partant

$$\text{(B)}\ldots\ldots \zeta = \frac{3}{8b}\left\{\frac{\sin 2(\odot-\Omega)}{1+k} + \frac{\sin 2(☾-\Omega)}{b+k} + \frac{\sin 2(\odot-☾)}{b-1}\right\} =$$

$$5491'' \sin 2(\odot-\Omega) + 431'' \sin 2(☾-\Omega) - 468'' \sin 2(☾-\odot),$$

ce qui ne diffère pas beaucoup du résultat que donne la méthode d'Euler, savoir 5426″,420″, et 453″ (¹).

Dans la formule $P = \frac{3\,\odot\, y \cos\Phi}{a^3}$, a n'est pas la moyenne, mais la vraie distance du soleil à la terre, qui, en vertu de l'équation du centre, est $= a(1 + \gamma' \cos\mu + \text{cet.})$, γ' étant l'excentricité, et μ l'anomalie moyenne du soleil. Il faut donc mettre $\frac{1 - 3\gamma'\cos\mu}{a^3}$ au lieu de $\frac{1}{a^3}$, ou bien $1 - 3\gamma'\cos\mu$ au lieu de 1; d'où il naît la nouvelle équation des noeuds, $\frac{3\,\partial\odot}{4b}\, 3\gamma' \cos\mu$, dont l'intégrale est $\frac{9\gamma'}{4b} \sin\mu = 580'' \sin\mu$ (suivant Euler 551″).

Il suit de ce qui précède, qu'outre la rétrogradation annuelle de 19° à 20°, les noeuds de la lune sont assujetis à des oscillations, dont la plus considérable est $5490'' \sin 2(\odot-\Omega)$, qui a une période de 347 jours, tandis que les autres oscillations ont des périodes de $27\frac{1}{4}$ jours et de $29\frac{1}{2}$ jours, de manière que, pendant une révolution entière des angles λ et Φ, l'argument α n'augmente que de 30°. On peut donc regarder l'inégalité qui dépend de l'angle α, comme la véritable correction du moyen mouvement des noeuds, en faisant abstraction des oscillations périodiques qui, en se rétablissant dans chaque mois, sont confondues avec les diverses situations de la lune relativement aux noeuds, et par là échappent aux observations. Cela posé il résulte de l'équation $\zeta = 5490'' \sin 2(\odot-\Omega)$, que le vrai lieu des noeuds coincide avec le moyen, le soleil étant dans la ligne des noeuds, ou à une distance de 90°; que le vrai lieu des noeuds devance le plus le lieu moyen, lorsque la longitude du soleil surpasse de 45° celle d'un noeud; et que le lieu vrai des noeuds est le plus en arrière du lieu moyen, si l'un des noeuds est de 45° plus avancé que le soleil. Tout cela est parfaitement conforme au mouvement périodique des noeuds, découvert par Tycho (II. §. 206.).

(1) *Theoria motus lunae, pag.* 189.

§. 246. Le mouvement des noeuds étant connu, il est aisé d'en conclure la variation de l'inclinaison. Si l'on nomme ψ la latitude de la lune, η l'inclinaison, θ sa tangente, on a $\tang\psi = \theta \sin(☾-\Omega)$, dont la différentielle est
(1) ..... $\partial . \tang \psi = \theta . \partial ☾ \cos(☾-\Omega) + \partial\theta \sin(☾-\Omega) - \theta . \partial\Omega \cos(☾-\Omega)$.
Comme cette équation doit également avoir lieu, si la perturbation est nulle, et que dans ce cas on a $\partial . \tang \psi = \theta . d ☾ \cos(☾-\Omega)$, il en suit

$$\frac{\partial\theta}{\theta} = \partial . \log\theta = \partial\Omega \cot(☾-\Omega).$$

Si on substitue $\partial\Omega = -\frac{3\partial\odot}{b}\cos\Phi \sin\alpha \sin\lambda$ (§. 245.), on aura

$$\partial . \log\theta = -\frac{3\partial\odot}{b}\sin\alpha\cos\lambda\cos\Phi = -\frac{3\partial\odot}{4b}(\sin 2\alpha + \sin 2\lambda + \sin 2\Phi),$$

et en intégrant, par ce qui précède (§. 245.),

$$\log\theta = \log \tang H + \frac{3}{8b}\left\{\frac{\cos 2\alpha}{1+k} + \frac{\cos 2\lambda}{b+k} - \frac{\cos 2\Phi}{b-1}\right\},$$

H étant l'inclinaison moyenne. Il vient de là

$$\log\frac{\tang\eta}{\tang H} = 5491'' \cos 2\alpha + 431'' \cos 2\lambda - 468'' \cos 2\Phi = S.$$

Or S étant un nombre qui ne surpasse jamais 0,03, on a, par la théorie des logarithmes $\frac{\tang\eta}{\tang H} = 1 + S$ à très-peu près, ou $\tang\eta = (1+S)\tang H$. En nommant donc ω la correction de l'inclinaison, ensorte que $\eta = H + \omega$, on aura

$$\tang\eta = \frac{\text{tg } H + \omega}{1 - \omega \text{ tg } H} = (\text{tg } H + \omega)(1 + \omega \text{ tg } H) = \tang H + \frac{\omega}{\cos^2 H}.$$

Si on compare cette valeur avec la précédente, $\tang\eta = (1+S)\tang H$, il viendra

$$\omega = S \sin H \cos H = \tfrac{1}{2} S \sin 2H.$$

Or $H = 5° 8' 46''$ (II. §. 206.), donc $\frac{1}{2}\sin 2H = 0{,}08933$; d'où l'on tirera

$$\omega = 490'' \cos 2(\odot - \Omega) + 38'' \cos 2(☾-\Omega) - 42'' \cos 2(☾-\odot),$$

ou suivant Euler,

$$\omega = 444'' \cos 2(\odot-\Omega) + 36'' \cos 2(☾-\Omega) - 48'' \cos 2(☾-\odot).$$

Si l'on fait abstraction des petites oscillations qui, en se rétablissant dans chaque mois, prennent la forme de petites corrections de la latitude (§. 243.), on a pour les variations de l'inclinaison, qui ont l'année pour période,

$$\omega = 490'' \cos 2(\odot - \Omega),$$

d'où l'on conclura ce qui suit. L'inclinaison a sa valeur moyenne 5° 8′ 46″, le soleil étant à la distance de 45° d'un des noeuds: elle a sa plus grande valeur, 5° 16′ 56′, lorsque le soleil est dans la ligne des noeuds; elle est un *minimum*, 5° 0′ 36″, si la distance du soleil aux noeuds est de 90°. C'est parfaitement d'accord avec les observations modernes (II. §. 206.).

§ 247. La perturbation de la latitude est donnée par les deux derniers termes de l'équation (1) (§. 246.), où il faut mettre la longitude corrigée de la lune à la place de ☾, et la longitude moyenne du noeud au lieu de ☊. Cela posé, on a $\partial \cdot \tan\psi$, ou

$$\partial\psi = \partial\theta \sin\lambda - \theta\partial☊ \cos\lambda, \quad \partial\theta = \tan\eta - \tan H = \theta S \ (\S.\ 246.),$$

$$\partial☊ = 5491'' \sin 2\alpha + 431'' \sin 2\lambda + 468'' \sin 2\Phi \ (\S.\ 245.), \text{ partant}$$

$$\partial\psi = \theta \,.\, 5491'' (\sin\lambda \cos 2\alpha - \cos\lambda \sin 2\alpha)$$

$$+ \theta \,.\, 431'' (\sin\lambda \cos 2\lambda - \cos\lambda \sin 2\lambda) - \theta \,.\, 468'' (\sin\lambda \cos 2\Phi + \cos\lambda \sin 2\Phi)$$

$$= \theta \,.\, 5959'' \,.\, \sin(\lambda - 2\alpha) - \theta \,.\, 431'' \sin\lambda.$$

Le dernier terme appartient à l'équation, $\text{tg}\,\psi = \theta \sin\lambda$; il doit donc être compris dans l'inclinaison moyenne, déterminée par observation. Il ne reste donc que le premier terme, où ayant substitué $\theta = \tan H = 0{,}09$; il viendra

$$\partial\psi = 536'' \sin(☾ - 2☉ + ☊).$$

Cette inégalité, la plus grande de toutes, est renfermée dans la Tab. XXXVIII. de M. Bürg, où on l'a faite $= 521'' \sin(☾ - 2☉ + ☊)$ (II. §. 207). L'ensemble des autres équations de la latitude de la lune est environ la neuvième partie de celle-ci: on les trouverait de la même manière, par les autres termes de $\partial☊$, que nous avons négligés ici.

§. 248. Comme la théorie des perturbations que la lune éprouve par l'action du soleil, n'est qu'une application du problème des trois corps, il paraît que les formules précédentes, dont nous nous sommes servis pour développer les perturbations des planètes, suffiront aussi pour la lune. Si l'on fait les moyennes parallaxes de la lune $= 57' 12''$, du soleil $= 8'',6$; on aura (§. 171.)

$$a = \frac{8{,}6}{3431} = 0{,}0025066; \text{ ce qui donne } (\S.\ 172.)$$

$$b = 2{,}0000334; \ b' = -0{,}0025065556; \ b^{(0)} = 2{,}0000309;$$

$$b^{(1)} = 0{,}0025066706; \ c^{(1)} = 0{,}00751976.$$

On a de plus, le moyen mouvement de la lune pour la quatrième partie d'une année, $\frac{N}{4} = 4331400''$, d'où l'on tirera, en faisant $m' = 354790$ (§. 210. XV.)

le mouvement annuel des noeuds $= -\frac{N}{4} m' \alpha^2 c^{(1)} = -72603'',8$;
et par rapport aux points équinoxiaux $= -20° \, 10' \, 54'$, ce qui est de $50' \, 23'$ plus grand que celui donné par les observations.

La variation séculaire de l'inclinaison est nulle (§. 210. XIV.), parceque θ' est nul: l'inclinaison de l'orbite lunaire n'est donc assujétie qu'à des changemens périodiques. Il en est de même de l'excentricité, parceque l'argument $\varpi' - \varpi$ fait une révolution entière en neuf ans. Le moyen mouvement des apsides est suivant ces formules (§. 210. XVII.) $= \frac{N}{4} m' \alpha^2 c^{(1)}$, de la même grandeur que celui des noeuds, au lieu que, suivant les observations, il est deux fois plus grand. Cette erreur prouve que la méthode précédente ne suffit pas pour la lune; ce qui engagea les astronomes à chercher de nouvelles méthodes. Les difficultés, propres à la lune, résultent du grand nombre de ses inégalités, qui sont assés grandes, pour influer sensiblement les unes sur les autres, en changeant mutuellement leurs argumens, et de ce que les séries qui les donnent, ne sont pas aussi convergentes, que le suppose la méthode précédente. Nous tâcherons donc de donner un aperçu de la méthode, par laquelle M. de Laplace est parvenu à découvrir les plus petites inégalités de la lune; mais nous exposerons préalablement une méthode très-simple, par laquelle on peut déterminer à peu près les équations annuelle et séculaire de la lune.

§. 249. L'expression de la force centrale, $N = \frac{1}{y^2} - \frac{\odot y (1 + 3 \cos 2\,⊅)}{2 a^3}$ (§. 241.), nous apprend, qu'en faisant abstraction de ses modifications périodiques, la lune éprouve par l'action du soleil, une *diminution* constante de sa pesanteur vers la terre, qui est $\frac{\odot y}{2 a^3}$. Si on désigne par T, *t*, les durées de l'année et du mois, les masses de la terre et du soleil seront dans le rapport $1 : \odot :: \frac{y^3}{t^2} : \frac{a^3}{T^2}$ (§. 28.): ainsi la force centrale, qui fait décrire à la lune une ellipse parfaite, sera $\frac{1}{y^2} = \frac{\odot y T^2}{a^3 t^2}$. En faisant donc le demi-diamètre de l'orbite de la terre, $a = 1 + \xi$, la pesanteur moyenne de la lune vers la terre, qui aurait lieu sans les perturbations du soleil, sera $V = \frac{\odot y T^2}{t^2}$, et sa diminution moyenne, $v = \frac{\odot y}{2 a^3} = \frac{V t^2}{2 a^3 T^2} = \frac{V t^2}{2 T^2} (1 + \xi)^{-3}$; ou en substituant $\frac{T}{t} = 13,37$, $\frac{T^2}{t^2} = 179$,

$$\frac{v}{V} = \frac{(1+\xi)^{-2}}{358}.$$

Ainsi l'action du soleil diminue la pesanteur moyenne de la lune de sa 358me partie, abstraction faite de l'excentricité des deux orbites. Il est aisé de voir, que la distance de la lune à la terre, y, sera augmentée dans le même rapport, ensorte que $\partial y = \frac{y}{358}$ et $\frac{\partial y}{y} = \frac{v}{V}$; d'où il résulte que l'orbite de la lune est agrandie par l'attraction du soleil. Puisque la direction des deux forces, V, v, passe par la terre, il en sera comme de toutes les forces centrales: en nommant donc $\partial\Phi$ l'angle que la lune décrit dans le tems ∂t, on aura (§. 19. III.)

$$0 = 2\partial y\,\partial\Phi + y\,\partial\partial\Phi, \text{ partant } \frac{\partial\partial\Phi}{\partial\Phi} = -\frac{2\partial y}{y} = -\frac{2v}{V} = -\frac{(1+\xi)^{-2}}{179}.$$

Comme nous négligeons ici l'excentricité de l'orbe lunaire, on a $\partial\Phi = n\partial t$, n étant la moyenne vitesse de la lune; d'où il viendra pour l'effet de l'attraction du soleil,

$$\partial\partial\Phi = -\frac{n\partial t}{179}(1+\xi)^{-3}.$$

Il en naîtra une inégalité de la longitude de la lune, $\lambda = \int\partial\partial\Phi$. Si on nomme γ l'excentricité de l'orbite de la terre, α l'anomalie moyenne du soleil, comptée du périgée, on a (§. 169. (e))

$$a = 1 + \xi = 1 + \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \gamma\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\gamma^2\cos 2\alpha + \text{cet. d'où il vient}$$

$$(1+\xi)^{-3} = 1 - 3\xi + 6\xi^2 = 1 + 3\gamma\,(\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{2}\gamma\cos 2\alpha) + 6\gamma^2\cos^2\alpha$$
$$= 1 + \tfrac{3}{2}\gamma^2 + 3\gamma\cos\alpha + \tfrac{9}{2}\gamma^2\cos 2\alpha.$$

Soit m le moyen mouvement anomalistique du soleil, ensorte que $\partial\alpha = m\partial t$ ou $\partial t = \frac{\partial\alpha}{m}$: cela posé on aura.

$$\partial\partial\Phi = -\frac{n\partial t}{179}(1 + \tfrac{3}{2}\gamma^2) - \frac{3\gamma n\partial\alpha}{179m}(\cos\alpha + \tfrac{3}{2}\gamma\cos 2\alpha),$$

dont l'intégrale donnera l'inégalité de la longitude,

$$\lambda = -\frac{nt}{179} - \frac{3n}{358}\int\gamma^2\partial t - \frac{3\gamma n}{179m}(\sin\alpha + \tfrac{3}{4}\gamma\sin 2\alpha).$$

Le premier terme est une partie du moyen mouvement de la lune nt: en effet c'est la diminution moyenne du mouvement de la lune, laquelle fait, ainsi qu'on vient de le voir, la 179me partie du mouvement primitif, ou $-\frac{nt}{179}$. Le second terme appartiendrait aussi au moyen mouvement, si γ avait une va-

leur constante; mais l'excentricité de la terre étant altérée par l'action des planètes, il en résultera une *équation séculaire* du moyen mouvement de la lune $= -\frac{3n}{358}\int \gamma^2 \partial t$. Le troisième terme donne l'*équation annuelle* de la lune Si l'on substitue $\frac{n}{m} = 13{,}37$; $\gamma = \frac{1}{60}$, ce terme deviendra

$$-12'50'' \sin \alpha - 10'' \sin 2\alpha,$$

ce qui est d'un huitième plus grand que suivant M. Bürg (II. §. 200.).

§. 250. Le second terme (§. 249.)

$$\psi = -\frac{3n}{358}\int \gamma^2 \partial t,$$

nous apprend que la variation de l'excentricité de la terre est la véritable cause de l'équation séculaire du moyen mouvement de la lune, que les observations avaient indiquée depuis longtems (II. §. 190.). C'est à M. de Laplace qu'on doit cette grande découverte, ainsi que tant d'autres. Il est remarquable, que la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre, s'est manifestée plutôt par son influence sur le mouvement de la lune que sur celui de la terre; la première ayant produit, depuis les tems les plus anciens, une augmentation de la longitude de la lune de deux degrés, tandis que la dernière n'a changé l'équation du centre de la terre que d'environ huit minutes.

Si on désigne par Γ la valeur $0{,}01678$ que l'excentricité de la terre avait à l'époque 1800, d'où l'on part, et par γ sa valeur à une époque quelconque, on a

$$\gamma = \Gamma + t\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{t^2}{2}\cdot\frac{\partial\partial \gamma}{\partial t^2}, \quad \gamma^2 = \Gamma^2 + 2t.\Gamma\frac{\partial \gamma}{\partial t} + t^2\left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial t^2} + \Gamma\frac{\partial\partial \gamma}{\partial t^2}\right).$$

Si t représente le nombre de siècles écoulés depuis l'époque 1800, $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ sera la variation séculaire de l'excentricité, et nous avons trouvé (§. 214.)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -8'',7430 \quad \text{et} \quad \Gamma = 0{,}01678.$$

Les valeurs, renfermées dans la *Tab.* XI. (§. 227.) donnent, à l'aide de la formule XVI. (§. 210.), pour l'an 2000, $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) = -8'',8642$; d'où l'on tire

$$\frac{\partial\partial \gamma}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right) - \frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\} = -0'',0606. \text{ On a donc}$$

$$\gamma^2 = \Gamma^2 - 2t \,.\, 0'',14671 - t^2 \,.\, 0'',0006027,$$

$$\psi = -\frac{3\,\Gamma^2}{358}\,nt + \frac{3\,n}{358}\,t^2 \,.\, 0'',14671 + \frac{n}{358}\,t^3 \,.\, 0'',0006027;$$

où il faut substituer le mouvement séculaire de la lune,

$$n = 1732564400'' = 8399,7.$$

Ainsi, le premier terme étant une partie du moyen mouvement, on aura

$$\psi = t^2 \,.\, 10'',3267 + t^3 \,.\, 0'',014141.$$

Cette valeur est peu différente de celle que M. de Laplace a trouvée par un calcul rigoureux [1], et qui, étant convertie en secondes sexagésimales, donne

$$\psi = t^2 \,.\, 10'',18 + t^3 \,.\, 0'',018538.$$

§. 251. Si l'on désigne par M, m, m', les masses de la terre, de la lune, et du soleil, par x, y, z, et x', y', z', les coordonnées de la lune et du soleil, rapportées au centre de la terre et à l'écliptique, par r, r', les rayons vecteurs de la lune et du soleil, par ρ la distance de la lune au soleil, et qu'on fasse dans les formules précédentes (§. 157. 158. 159.),

$$\mathrm{B} = 1, \text{ et } \frac{\mathrm{M}+m}{r} - \frac{m'(xx'+yy'+zz')}{r'^3} + \frac{m'}{\rho} = \mathrm{Q};$$

les équations I, II, III, (§. 159.), deviendront

$$(\mathrm{A}) \ldots\ldots \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}\right).$$

En nommant β l'inclinaison du rayon vecteur r relativement au plan des x, y, ou la latitude de la lune, et v l'angle que sa projection sur le même plan fait avec l'axe des x, ou la longitude de la lune, comptée de cet axe; on aura

$$(a) \ldots\ldots z = r \sin\beta, \quad y = r\cos\beta\sin v, \quad x = r\cos\beta\cos v,$$

d'où l'on tirera en différentiant,

$$(b) \ldots\ldots \begin{cases} x\dfrac{\partial\partial x}{\partial t^2} + y\dfrac{\partial\partial y}{\partial t^2} + z\dfrac{\partial\partial z}{\partial t^2} = r\dfrac{\partial\partial r}{\partial t^2} - r^2\dfrac{\partial v^2}{\partial t^2}\cos^2\beta - r^2\dfrac{\partial\beta^2}{\partial t^2}; \\[2ex] x\dfrac{\partial\partial y}{\partial t^2} - y\dfrac{\partial\partial x}{\partial t^2} = \dfrac{r\cos\beta}{\partial t^2}\{2\partial r\partial v\cos\beta - 2r\partial\beta\partial v\sin\beta + r\partial\partial v\cos\beta\} = \dfrac{\partial\left(r^2\dfrac{\partial v}{\partial t}\cos^2\beta\right)}{\partial t}; \\[2ex] z\dfrac{\partial\partial z}{\partial t^2}\cot\beta - y\dfrac{\partial\partial y}{\partial t^2}\,\mathrm{tg}\,\beta - x\dfrac{\partial\partial x}{\partial t^2}\,\mathrm{tg}\beta = r^2\dfrac{\partial\partial\beta}{\partial t^2} + r^2\dfrac{\partial v^2}{\partial t^2}\sin\beta\cos\beta + 2r\dfrac{\partial r\,\partial\beta}{\partial t^2}. \end{cases}$$

---

(1) *Mécan. Cél. Tome III. pag. 273.*

Si l'on différentie Q, d'abord par rapport à x, y, z, en substituant $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$, et ensuite par rapport à r, β, v, après avoir substitué les valeurs (a), il viendra

$$(c) \ldots\ldots \partial Q = -\frac{M+m}{r^3}(x\partial x + y\partial y + z\partial z) - \frac{m'}{r'^3}(x'\partial x + y'\partial y + z'\partial z)$$
$$+ \frac{m'}{\rho^3}\{(x' - x)\partial x + (y' - y)\partial y + (z' - z)\partial z\};$$

$$(d) \ldots\ldots \partial Q = -\frac{M+m}{r^2}\partial r - \frac{m'r}{\rho^3}\partial r + \frac{m'\partial r}{r}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(xx' + yy' + zz')$$
$$+ m'\partial v\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(xy' - yx') - m'r\partial\beta\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(x'\sin\beta\cos v + y'\sin\beta\sin v - z'\cos\beta).$$

La comparaison de ces deux valeurs de Q donnera

$$(e) \ldots\ldots \begin{cases} x\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right) = r\left(\frac{\partial Q}{\partial r}\right); \quad x\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - y\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right); \\ z\cot\beta\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right) - y\,\mathrm{tang}\,\beta\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - x\,\mathrm{tang}\,\beta\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta}\right). \end{cases}$$

Si on substitue les valeurs (A) dans les équations (b), et qu'on les compare avec les équations (e), on trouvera

$$(B) \ldots\ldots \begin{cases} \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - r\frac{\partial v^2}{\partial t^2}\cos^2\beta - r\frac{\partial\beta^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial Q}{\partial r}\right); \quad \frac{\partial\left(r^2\frac{\partial v}{\partial t}\cos^2\beta\right)}{\partial t} = \left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right); \\ r^2\frac{\partial\partial\beta}{\partial t^2} + r^2\frac{\partial v^2}{\partial t^2}\sin\beta\cos\beta + 2r\frac{\partial r\partial\beta}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta}\right). \end{cases}$$

Regardant Q comme fonction de $s = \mathrm{tang}\,\beta$, et $u = \frac{1}{r\cos\beta}$, il faudra substituer

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial \beta}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right).$$

Mais on a $\left(\frac{\partial s}{\partial r}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -u^2\cos\beta$, $\left(\frac{\partial s}{\partial \beta}\right) = \frac{1}{\cos^2\beta}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = u\,\mathrm{tang}\,\beta$, d'où il vient

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial r}\right) = -u^2\cos\beta\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right), \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta}\right) = \frac{1}{\cos^2\beta}\left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right) + us\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right).$$

Si l'on observe que

$$\partial\partial.\frac{1}{u} = -\partial\left(\frac{\partial u}{u^2}\right) = \partial\partial r\cos\beta - 2\partial r\partial\beta\sin\beta - r\partial\partial\beta\sin\beta - r\partial\beta^2\cos\beta,$$

et qu'on ajoute ensemble la première et la troisième des équations (B), après les avoir multipliées respectivement par $-\partial t\cos\beta$ et par $\frac{\partial t}{r}\sin\beta$, il viendra

$$(f) \ldots\ldots \partial\left(\frac{\partial u}{u^2 \partial t}\right)+\frac{\partial v^2}{u \partial t}=u \partial t\left\{s\left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right)+u\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)\right\}.$$

En substituant $r=\frac{1}{u\cos\beta}$, $\partial\beta=\partial s \cos^2\beta$, $\partial\partial\beta=\partial\partial s \cos^2\beta-2\partial s^2 \sin\beta\cos^3\beta$, $\partial r=\frac{\partial s \sin\beta}{u}-\frac{\partial u}{u^2\cos\beta}$, la troisième des équations (B) donnera

$$(g) \ldots\ldots o=\partial\left(\frac{\partial s}{u^2 \partial t}\right)+\frac{s \partial v^2}{u^2 \partial t}-(1+s^2)\left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right) \partial t-u s\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right) \partial t.$$

Si l'on intègre la seconde des équations (B), après l'avoir multipliée par $r^2 \partial v \cos^2\beta=\frac{\partial v}{u^2}$, il viendra

$$\left(\frac{\partial v}{u^2 \partial t}\right)^2=h^2+2 \int\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right) \frac{\partial v}{u^2},$$

h étant une constante arbitraire; d'où l'on tirera $\partial t=\frac{\partial v}{h u^2 \sqrt{\left(1+\frac{2}{h^2} R\right)}}$, en faisant pour abréger,

$$(h) \ldots\ldots \int\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right) \frac{\partial v}{u^2}=R.$$

Substituons cette valeur de ∂t dans les équations (f) (g), et regardons maintenant ∂v comme constante, ensorte que le tems t et tous les mouvemens soient exprimés en fonctions de v. Cela posé on aura

$$(I) \ldots\ldots h \partial t=\frac{\partial v}{u^2}\left\{1-\frac{R}{h^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{R}{h^2}\right)^2-\text{cet.}\right\},$$

$$(II) \ldots\ldots o=\left(\frac{\partial\partial u}{\partial v^2}+u\right)\left(1+\frac{2R}{h^2}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{h^2 u^2 \partial v}-\frac{1}{h^2}\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)+\frac{s}{u}\left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right)\right\},$$

$$(III) \ldots\ldots o=\left(\frac{\partial\partial s}{\partial v^2}+s\right)\left(1+\frac{2R}{h^2}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)\frac{\partial s}{h^2 u^2 \partial v}-\frac{1}{h^2}\left\{\frac{s}{u}\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)+\frac{1+s^2}{u^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right)\right\}.$$

La première de ces équations donne le tems ou la longitude moyenne en fonction de la longitude vraie, et réciproquement. La seconde servira à déterminer le rayon vecteur $r=\frac{1}{u\cos\beta}$ ou la parallaxe; et la troisième donnera la tangente de la latitude, s.

§. 252. Développons maintenant les quantités qui composent la fonction Q, en prenant $M+m$ pour unité des masses, l'écliptique pour le plan des x, y, et désignant par les mêmes lettres, marquées d'un trait, toutes les quantités relatives au soleil. Cela posé on aura

$$s' = 0,\ z' = 0,\ r = \frac{\sqrt{(1+s^2)}}{u},\ x = \frac{\cos v}{u},\ y = \frac{\sin v}{u},\ z = \frac{s}{u},\ r' = \frac{1}{u'},\ x' = \frac{\cos v'}{u'},$$

$$y' = \frac{\sin v'}{u'},\ xx' + yy' + zz' = \frac{\cos(v-v')}{u\,u'},\ \frac{1}{\rho} = \left\{\frac{1}{u'^2} + \frac{1+s^2}{u^2} - \frac{2\cos(v-v')}{u\,u'}\right\}^{-\frac{1}{2}},\ \text{ou}$$

$$\frac{1}{\rho} = u'\left\{1 + \frac{u'}{u}\cos(v-v') + \frac{u'^2}{4\,u^2}\left(1 + 3\cos 2(v-v') - 2s^2\right)\right\},$$

en négligeant les autres termes, multipliés par $\frac{u'^3}{u^3}$, parceque u est 400 fois plus grand que u'. Il en résulte

$$Q = \frac{u}{\sqrt{(1+s^2)}} + m'u' + \frac{m'u'^3}{4\,u^2}\left(1 + 3\cos 2(v-v') - 2s^2\right),\ \left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right) = -\frac{u\,s}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'u'^3 s}{u^2},$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right) = -\frac{3\,m'u'^3}{2\,u^2}\sin 2(v-v),\ \left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1+s^2)}} - \frac{m'u'^3}{2\,u^3}\left(1 + 3\cos 2(v-v') - 2s^2\right);$$

d'où l'on tirera

$$(C)\ \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{1}{u^2}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial v}\right) = -\dfrac{3\,m'u'^3}{2\,u^4}\sin 2(v-v'), \\[2ex] \left(\dfrac{\partial Q}{\partial u}\right) + \dfrac{s}{u}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial s}\right) = \dfrac{1}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{m'u'^3}{2\,u^3}\left\{1 + 3\cos 2(v-v')\right\}, \\[2ex] \dfrac{s}{u}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial u}\right) + \dfrac{1+s^2}{u^2}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial s}\right) = -\dfrac{3\,m's\,u'^3}{2\,u^4}\left\{1 + \cos 2(v-v')\right\}. \end{cases}$$

§. 253. Si la force perturbatrice m' est nulle, on aura $\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right) = 0$, $R = 0$, et les équations (I) (II) (III) (§. 251.) donneront les valeurs elliptiques, en prenant cette forme,

$$\partial t = \frac{\partial v}{b\,u^2},\quad \frac{\partial\partial u}{\partial v^2} + u = \frac{1}{b^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial\partial s}{\partial v^2} + s = 0.$$

La dernière donne, en l'intégrant,

$$s = \theta\sin(v - J),$$

θ et J étant deux constantes arbitraires. L'intégrale de la seconde équation aura la forme, $u = \frac{A}{b^2}\{\sqrt{(1+s^2)} + \gamma\cos(v-\varpi)\}$, γ et ϖ étant deux constantes. Pour déterminer le coefficient A, on trouvera, en différentiant deux fois cette valeur de u, et substituant la valeur précédente de s, $\frac{\partial\partial u}{\partial v^2} + u = \frac{A(1+\theta^2)}{b^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b^2(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$, d'où il suit $A = \frac{1}{1+\theta^2}$, et

$$u = \frac{\sqrt{(1+s^2)} + \gamma\cos(v-\varpi)}{b^2(1+\theta^2)},$$

Il est aisé de voir, que θ est la tangente de l'inclinaison de l'orbite lunaire, γ son excentricité, J et ϖ les longitudes du noeud ascendant et du périhélie, dont les mouvemens sont trop rapides, pour qu'on puisse se dispenser d'y avoir égard. Désignons donc par $(1-c)\,v$ le mouvement direct des apsides, et par $(g-1)\,v$ le mouvement rétrograde des noeuds, c étant suivant les observations $=0{,}991548$; $g=1{,}004022$. Cela posé, il faudra mettre $\varpi+(1-c)\,v$ et $\mathrm{J}-(g-1)\,v$ à la place de ϖ et de J. En négligeant la quatrième puissance de l'inclinaison θ, on aura

$$\sqrt{(1+s^2)}=1+\frac{\theta^2}{4}\{1-\cos 2\,(gv-\mathrm{J})\};$$ d'où il viendra

$$(i)\ldots\ldots u=\frac{1+\frac{1}{4}\theta^2+\gamma\cos(cv-\varpi)-\frac{1}{4}\theta^2\cos 2\,(gv-\mathrm{J})}{b^2(1+\theta^2)},\quad s=\theta\sin(gv-\mathrm{J}).$$

Il en suit $$\frac{1}{bu^2}=h^3(1+2\theta^2)\left\{1+\frac{\theta^2}{4}+\gamma\cos(cv-\varpi)-\frac{\theta^2}{4}\cos 2\,(gv-\mathrm{J})\right\}^{-2},$$

ce qui étant substitué dans l'équation $\partial t=\frac{\partial v}{bu^2}$, donnera

$$\partial t=h^3\partial v\left\{\begin{array}{l}1+\frac{3}{2}(\gamma^2+\theta^2)-2\gamma(1+\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{5}{4}\theta^2)\cos(cv-\varpi)+\frac{3}{2}\gamma^2\cos 2\,(cv-\varpi)\\ +\frac{\theta^2}{2}\cos 2\,(gv-\mathrm{J})-\gamma^3\cos 3\,(cv-\varpi)+\text{cet.}\end{array}\right\},$$

et en intégrant,

$$(k)\ldots\ldots t=h^3(1+\tfrac{3}{2}\gamma^2+\tfrac{3}{2}\theta^2)v-\frac{2b^3}{c}(1+\tfrac{3}{2}\gamma^2+\tfrac{5}{4}\theta^2)\gamma\sin(cv-\varpi)+\frac{3b^3}{4c}\gamma^2\sin 2\,(cv-\varpi)$$
$$+\frac{b^3}{4g}\theta^2\sin 2\,(gv-\mathrm{J})+\text{cet.}$$

Pour déterminer la constante h, concevons le mouvement rapporté au plan de l'orbite lunaire, ensorte que $s=0$, $\theta=0$, $u=\frac{1}{r}=\frac{1+\gamma\cos(cv-\varpi)}{b^2}$, et $\partial t=\frac{\partial v}{bu^2}=\frac{b^3\partial v}{\{1+\gamma\cos(cv-\varpi)\}^2}$. Mais on a dans l'ellipse, $r=\frac{a(1-\gamma^2)}{1+\gamma\cos\Phi}$, l'origine des r étant au foyer, a le demi-grand axe, et $\Phi=cv-\varpi$ l'anomalie. Il s'en suit $h=\sqrt{a(1-\gamma^2)}$, et $\partial t=a^{\frac{3}{2}}\partial v\,\{1-2\gamma\cos(v-\varpi)+\text{cet.}\}$, dont le premier terme non-périodique donne $t=a^{\frac{3}{2}}v$. Mais si le mouvement est rapporté à l'écliptique, le premier terme de (k) est $t=h^3(1+\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}\theta^2)v$; d'où l'on conclura pour la valeur elliptique de h, $h(1+\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}\theta^2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt{a}$, donc

$$h=a^{\frac{1}{2}}(1-\tfrac{1}{2}\gamma^2-\tfrac{1}{2}\theta^2).$$

Ainsi l'équation (i) prendra la forme

$$(l) \ldots\ldots au = 1 + \gamma^2 + \frac{\theta^2}{4} + \gamma(1+\gamma^2)\cos(cv - \varpi) - \frac{\theta^2}{4}\cos 2(gv - J).$$

Supposons la moyenne vitesse de la lune $= n = a^{-\frac{3}{2}}$, négligeons les troisièmes puissances de γ et θ, faisons dans les coefficiens des sinus $c=1, g=1$, et substituons la valeur précédente de h. Cela posé, l'équation (k), étant multipliée par n, deviendra

$$(m) \ldots\ldots nt = v - 2\gamma\sin(cv - \varpi) + \tfrac{3}{4}\gamma^2\sin 2(cv - \varpi) + \frac{\theta^2}{4}\sin 2(gv - J).$$

Si on marque d'un trait les quantités relatives au soleil, où $\theta' = 0$ et $c' = 1$, les équations (l) (m) donneront pour le soleil,

$$(l') \ldots\ldots a'u' = 1 + \gamma'^2 + \gamma'(1+\gamma'^2)\cos(v' - \varpi'),$$

$$(m') \ldots\ldots n't = v' - 2\gamma'\sin(v' - \varpi') + \tfrac{3}{4}\gamma'^2\sin 2(v' - \varpi').$$

Si on fait $n' = mn$, la comparaison des équations (m) (m') donnera

$$v' - 2\gamma'\sin(v' - \varpi') + \tfrac{3}{4}\gamma'^2\sin 2(v' - \varpi') = mv - mV,$$

V étant $= 2\gamma\sin(cv - \varpi) - \frac{3}{4}\gamma^2\sin 2(cv - \varpi) - \frac{\theta^2}{4}\sin 2(gv - J)$. Si on développe cette équation jusqu'aux troisièmes puissances de γ, γ', θ, et qu'on fasse pour abréger,

$$v - mv = w,\ cv - \varpi = k,\ mv - \varpi' = k',\ gv - J = p,\ 2w - k = q,$$

$$2w - k' = q',\ 2w + k = r,\ 2w + k' = r',\ 2w - (k + k') = \varrho,\ 2w - p = \sigma;$$

il viendra

$$(n) \ldots\ldots v' = mv - 2m\gamma\sin k + 2\gamma'\left(1 - \frac{\gamma'^2}{8}\right)\sin k' + \frac{3}{4}m\gamma^2\sin 2k + \frac{m}{4}\theta^2\sin 2p$$
$$+ \tfrac{5}{4}\gamma'^2\sin 2k' - 2m\gamma\gamma'\sin(k + k') - 2m\gamma\gamma'\sin(k - k').$$

En substituant cette valeur de v' dans l'équation (l'), on aura

$$(p) \ldots\ldots a'u' = 1 + \gamma'\left(1 - \frac{\gamma'^2}{8}\right)\cos k' + \gamma'^2\cos 2k' + m\gamma\gamma'\{\cos(k - k') - \cos(k + k')\}.$$

§. 254. Faisons pour abréger,

$$\frac{(a'u')^{v'}}{(au)^v} = (a)^{v'}_{v},\ \ (a)^{v'}_{v}\cos 2(v - v') = (b)^{v'}_{v},\ \ (a)^{v'}_{v}\sin 2(v - v') = (c)^{v'}_{v},$$

$$\frac{a}{a'} = \alpha,\ \ m'a^3 = \mu,\ \ \tfrac{3}{2}\mu\alpha\,(c)^3_4 = \mathrm{M},\ \ 1 - \tfrac{3}{2}s^2 - \tfrac{1}{2}\mu(a)^3_3 - \tfrac{3}{2}\mu(b)^3_3 = \mathrm{N},$$

$$\mathrm{P} = \tfrac{3}{2}\mu\alpha s\left\{(a)^3_4 + (b)^3_4\right\}.$$ Cela posé, on aura (C) (§. 252.),

$\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right) = -M$, $R = -\int M \partial v$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right) + \frac{s}{u}\left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right) = N$, $\frac{s}{u}\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right) + \frac{1+s^2}{u^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right) = -P$.

Ainsi les équations (§. 251.) prendront la forme,

$$(I) \ldots\ldots \frac{b\,\partial t}{a^2\,\partial v} = (au)^{-2}\left\{1 - \frac{R}{b^2} + 3\left(\frac{R}{b^2}\right)^2\right\},$$

$$(II) \ldots\ldots 0 = \left(\frac{\partial\partial . au}{\partial v^2} + au\right)\left(1 + \frac{2R}{b^2}\right) - \frac{M}{b^2}\cdot\frac{\partial . au}{\partial v} - \frac{aN}{b^2},$$

$$(III) \ldots\ldots 0 = \left(\frac{\partial\partial s}{\partial v^2} + s\right)\left(1 + \frac{2R}{b^2}\right) - \frac{M}{b^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial v} + \frac{P}{b^2}.$$

Les équations (*l*) (*n*) (*p*) donneront, en rejétant les termes inutiles,

$$(au)^{-\nu} = 1 - \frac{\nu(3-\nu)}{4}\gamma^2 - \frac{\nu}{4}\theta^2 - \nu\left\{1 + \frac{\nu^2-5\nu+2}{8}\gamma^2 - \frac{\nu+1}{4}\theta^2\right\}\gamma\cos k$$
$$+ \frac{\nu(\nu+1)}{4}\gamma^2\cos 2k + \frac{\nu}{4}\theta^2\cos 2p,$$

$$(a'u')^{\nu'} = 1 + \frac{\nu'(\nu'-1)}{4}\gamma'^2 + \nu'\left\{1 + \frac{\nu'(\nu'+1)-3}{8}\gamma'^2\right\}\gamma'\cos k' + \frac{\nu'(\nu'+3)}{4}\gamma'^2\cos 2k'$$
$$+ \nu' m\gamma\gamma'\{\cos(k-k') - \cos(k+k')\},$$

$$(a)^{\nu'}_{\nu} = 1 + \frac{\nu'(\nu'-1)}{4}\gamma'^2 - \frac{\nu(3-\nu)}{4}\gamma^2 - \frac{\nu}{4}\theta^2 - \nu\left\{1 + \frac{\nu'(\nu'-1)}{4}\gamma'^2 + \frac{\nu^2-5\nu+2}{8}\gamma^2 - \frac{\nu+1}{4}\theta^2\right\}\cos k$$
$$+ \nu'\left\{1 + \frac{\nu'(\nu'+1)-3}{8}\gamma'^2 - \frac{\nu(3-\nu)}{4}\gamma^2 - \frac{\nu}{4}\theta^2\right\}\gamma'\cos k' + \frac{\nu(\nu+1)}{4}\gamma^2\cos 2k + \frac{\nu'(\nu'+3)}{4}\gamma'^2\cos 2k'$$
$$+ \frac{\nu}{4}\theta^2\cos 2p - \frac{\nu'}{2}(\nu - 2m)\gamma\gamma'\cos(k-k') - \frac{\nu'}{2}(\nu + 2m)\gamma\gamma'\cos(k+k')$$

$$\cos 2(v-v') = \{1 - 4\gamma'^2 - 4m^2\gamma^2\}\cos 2w - \{2 - 8\gamma'^2\}m\gamma\cos q + \{2 - 8\gamma'^2\}m\gamma\cos r$$
$$+ \left\{2 - \frac{27}{4}\gamma'^2\right\}\gamma'\cos q' - \left\{2 - \frac{7}{4}\gamma'^2\right\}\gamma'\cos r' - 6m\gamma\gamma'\cos \varrho - 2m\gamma\gamma'\cos(2w+k+k')$$
$$+ 2m\gamma\gamma'\cos(q+k') + 6m\gamma\gamma'\cos(q'+k) + \frac{3m+8m^2}{4}\gamma^2\cos 2(w-k) - \frac{3m-8m^2}{4}\gamma^2\cos 2(w+k)$$
$$+ \frac{13}{4}\gamma'^2\cos 2(w-k') + \frac{3}{4}\gamma'^2\cos 2(w+k') + \frac{m}{4}\theta^2\{\cos 2(w-p) - \cos 2(w+p)\};$$

$$(l)^{\nu'}_{\nu} = \left\{1 - \frac{16-\nu'(\nu'-1)}{4}\gamma'^2 - \frac{\nu(3-\nu)+16m^2}{4}\gamma^2 - \frac{\nu}{4}\theta^2\right\}\cos 2w$$
$$- \left\{\frac{\nu+4m}{2}\left(1 - \frac{16-\nu'(\nu'-1)}{4}\gamma'^2\right) + \left(\frac{\nu(\nu^2-5\nu+2)}{16} - \frac{\nu(11-2\nu)}{8}m\right)\gamma^2 - \frac{\nu(\nu+1+4m)}{8}\theta^2\right\}\gamma\cos q$$
$$- \left\{\frac{\nu-4m}{2}\left(1 - \frac{16-\nu'(\nu'-1)}{4}\gamma'^2\right) + \left(\frac{\nu(\nu^2-5\nu+2)}{16} + \frac{\nu(11-2\nu)}{8}m\right)\gamma^2 - \frac{\nu(\nu+1-4m)}{8}\theta^2\right\}\gamma\cos r$$
$$+ \left\{\frac{4+\nu'}{2} + \frac{\nu'^3+5\nu'^2-29\nu'-108}{16}\gamma'^2 + \frac{\nu(\nu-3)(\nu'+4)}{8}\gamma^2 - \frac{\nu(\nu'+4)}{8}\theta^2\right\}\gamma'\cos q'$$

$$-\left\{\frac{4-\nu'}{2}-\frac{28-9\nu'-3\nu'^2+\nu'^3}{16}\gamma'^2-\frac{\nu(3-\nu)(4-\nu')}{8}\gamma^2-\frac{\nu(4-\nu')}{8}\theta^2\right\}\gamma'\cos r'$$

$$-\frac{(4+\nu')(\nu+6m)}{4}\gamma\gamma'\cos\varrho+\frac{(4-\nu')(\nu-2m)}{4}\gamma\gamma'\cos(2w+k+k')$$

$$+\frac{(4-\nu')(\nu+2m)}{4}\gamma\gamma'\cos(q+k')-\frac{(4+\nu')(\nu-6m)}{4}\gamma\gamma'\cos(q'+k)$$

$$+\frac{\nu(\nu+1)+(8\nu+6)m+16m^2}{8}\gamma^2\cos 2(w-k)+\frac{\nu(\nu+1)-(8\nu+6)m+16m^2}{8}\gamma^2\cos 2(w+k)$$

$$+\frac{\nu'(\nu'+11)+26}{8}\gamma'^2\cos 2(w-k')+\frac{6-\nu'(5-\nu')}{8}\gamma'^2\cos 2(w+k')$$

$$+\frac{\nu+2m}{8}\theta^2\cos 2(w-p)+\frac{\nu-2m}{8}\theta^2\cos 2(w+p);$$

et $(c)_{\nu}^{\nu'}$ est ce que devient $(b)_{\nu}^{\nu'}$, si l'on met les sinus à la place des cosinus. En substituant pour ν, ν', les nombres 2, 3, 4, 5, et faisant

$$1+\frac{3}{2}\gamma^2=e,\quad 1-\frac{5}{2}\gamma'^2=f, \text{ on aura à fort peu près,}$$

$$\frac{M}{b^2}=\frac{3ua}{2b^2}\left(\begin{array}{l} \{f+\gamma^2-\theta^2\}\sin 2w-\left\{2f(1+m)-\frac{1+3m}{2}\gamma^2-\frac{5+4m}{2}\theta^2\right\}\gamma\sin \\ -2f(1-m)\gamma\sin r+\frac{7}{2}\gamma'\sin q'-\frac{1}{2}\gamma'\sin r'-\frac{7(2+3m)}{2}\gamma\gamma'\sin \\ +\frac{2-m}{2}\gamma\gamma'\sin(2w+k+k')+\frac{2+m}{2}\gamma\gamma'\sin(q+k')-\frac{7(2-3m)}{2}\gamma\gamma'\sin(q'+k \\ -\frac{10+19m+8m^2}{4}\gamma^2\sin 2(w-k)+\frac{10-19m+8m^2}{4}\gamma^2\sin 2(w+k) \\ +\frac{17}{2}\gamma'^2\sin 2(w-k')+\frac{2+m}{4}\theta^2\sin 2(w-p)+\frac{2-m}{4}\theta^2\sin 2(w+p) \end{array}\right),$$

$$\frac{a}{b^2}N=\frac{a}{b^2}\{1-\frac{9}{4}\theta^2\}$$

$$-\frac{3ua}{2b^2}\left\{\frac{e}{3}+f\cos 2w-e\gamma\cos k+\gamma'(1+\frac{9}{8}\gamma'^2)\cos k'-\frac{3+4m}{2}f\gamma\cos q+\frac{7}{2}\gamma'\cos q'-\frac{21(1+2m)}{4}\gamma\gamma'\cos\varrho\right\},$$

$$\frac{P}{b^2}=\frac{3ua}{2b^2}\theta\left\{\left(e+\gamma^2-\frac{3\theta^2}{2}\right)\sin p-\left(\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}\gamma^2-\frac{8+m}{8}\theta^2\right)\sin\sigma\right\};$$

où il faut observer, que nous n'aurons égard qu'aux angles $2w$, k, k', q, $2k$, $2p$, dans l'équation I, aux angles $2w$, k, k', q, q', ϱ, dans II, et aux angles p, σ, dans III, et que nous conserverons partout le facteur γ^2, qui servira à déterminer les équations séculaires. Si on intègre l'expression précédente de $\frac{M}{b^2}$, après l'avoir multipliée par $-\partial v$, en observant que $\partial w=(1-m)\partial v$, $\partial k=c\partial v$, $\partial k'=m\partial v$, $\partial p=g\partial v$, $\partial q=(2-c-2m)\partial v$,

$\partial q' = (2-3m)\partial v$, $\partial r = (2+c-2m)\partial v$, $\partial r' = (2-m)\partial v$, $\partial \varrho = (2-c-3m)\partial v$, $\partial \sigma = (2-g-2m)\partial v$, il viendra

$$\frac{R}{b^2} = \frac{3}{2}\frac{u\,a}{b^2}\left\{\begin{array}{l} \frac{f+\gamma^2-\theta^2}{2(1-m)}\cos 2w - \frac{2f(1+m)}{2-c-2m}\gamma\cos q - \frac{2f(1-m)}{2+c-2m}\gamma\cos r + \frac{7\gamma'}{4-6m}\cos q' - \frac{\gamma'\cos r'}{4-2m} \\ -\frac{7(2+3m)}{2(2-c-3m)}\gamma\gamma'\cos\varrho + \frac{(2-m)\gamma\gamma'}{2(2+c-m)}\cos(2w+k+k') + \frac{(2+m)\gamma\gamma'}{2(2-c-m)}\cos(q+k') \\ -\frac{7(2-3m)\gamma\gamma'}{2(2+c-3m)}\cos(q'+k) + \frac{10+19m+8m^2}{8(1-c-m)}\gamma^2\cos 2(w-k) \\ +\frac{10-19m+8m^2}{8(1+c-m)}\gamma^2\cos 2(w+k) + \frac{17\gamma'^2}{4(1-2m)}\cos 2(w-k') \\ +\frac{(2+m)\theta^2}{8(1-g-m)}\cos 2(w-p) + \frac{(2-m)\theta^2}{8(1+g-m)}\cos 2(w+p) \end{array}\right\},$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{R}{b^2}\right)^2 = \frac{27\,u^2a^2}{8b^4}\left\{\frac{1}{8(1-m)^2} + \frac{(3-m)\gamma'\cos k'}{(1-m)(2-m)(2-3m)}\right\}.$$

§. 255. Comme notre but est d'exposer la méthode de M. de Laplace, sans entrer dans tout le détail du calcul, nous ne développerons ici que les inégalités les plus considérables de la lune, dont on connaît déjà la forme par le second Tome de cet ouvrage. Nous supposerons donc, que les quantités au et s éprouvent, par l'attraction du soleil, les variations suivantes:

(D)..$\delta.au = A^{(0)}\cos 2w + A^{(1)}\gamma'\cos k' + A^{(2)}\gamma\cos q + A^{(3)}\gamma'\cos q' + A^{(4)}\gamma\gamma'\cos\varrho, \delta s = B^{(0)}\theta\sin\sigma$.

Il est visible que la longitude du soleil, v', doit éprouver les mêmes inégalités que la longitude moyenne de la lune, exprimée en fonction de v. En effet on a vu (§. 253.), que le terme $\gamma\cos k$ de au (l), donne un terme analogue $-2m\gamma\sin k$ dans v', (n). Ainsi le terme $A^{(2)}\gamma\cos q$ de $a\delta u$ donnera

$$\delta v' = -2m\,A^{(2)}\gamma\sin q.$$

Nous n'y aurons égard que dans la variation de N. On verra plus bas, que l'inégalité de la longitude de la lune, qui est indépendante des excentricités, a la forme, $\delta v = C^{(0)}\sin 2w$, d'où il naîtra une variation de v' et de $a'u'$, qui n'est sensible que dans les termes qui ont l'argument k'. En effet, on a (§. 253.) $v' = mv$, $a'u' = 1 + \gamma'\cos k' = 1 + \gamma'\cos(mv - \varpi')$; d'où il suit $\delta v' = m\delta v$, $\delta.a'u' = -m\gamma'\delta v\sin k'$, et en substituant $\delta v = C^0\sin 2w$,

$$\delta v' = m\,C^{(0)}\sin 2w,\quad \delta.a'u' = \frac{m}{2}\gamma' C^{(0)}(\cos r' - \cos q').$$

Si l'on ajoute aux équations (I) (II) (III) leurs variations, et qu'on fasse pour abréger,

$$(au)^{-2}\left\{1-\frac{R}{b^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{R}{b^2}\right)^2\right\}=A,\quad \left(\frac{\partial\partial.au}{\partial v^2}+au\right)\left(1+\frac{2R}{b^2}\right)=B,$$

$$\frac{M}{b^2}\cdot\frac{\partial.au}{\partial v}=C,\quad \left(\frac{\partial\partial s}{\partial v^2}+s\right)\left(1+\frac{2R}{b^2}\right)=D,\quad \frac{M}{b^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial v}=E,$$

$$\frac{2\delta.au}{(au)^3}\left(1-\frac{R}{b^2}\right)=A',\quad (au)^{-2}\frac{\delta R}{b^2}=A'',\quad \frac{3(a\delta u)^2}{(au)^4}=A''',$$

$$\left(\frac{\partial\partial(\delta.au)}{\partial v^2}+\delta.au\right)\left(1+\frac{2R}{b^2}\right)=B',\quad \frac{2\delta R}{b^2}\left(\frac{\partial\partial.au}{\partial v^2}+au\right)=B'',$$

$$\frac{M}{b^2}\cdot\frac{\partial(\delta.au)}{\partial v}=C',\quad \frac{\delta M}{b^2}\cdot\frac{\partial.au}{\partial v}=C'',\quad \left(1+\frac{2R}{b^2}\right)\left(\frac{\partial\partial.\delta s}{\partial v^2}+\delta s\right)=D',$$

$$\frac{2\delta R}{b^2}\left(\frac{\partial\partial s}{\partial v^2}+s\right)=D'',\quad \frac{M}{b^2}\cdot\frac{\partial\delta s}{\partial v}=E',\quad \frac{\delta M}{b^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial v}=E'';$$

ces équations prendront la forme,

$$(I)\ldots\ldots\frac{b\,\partial t}{a^2\partial v}=A-A'-A''+A''',$$

$$(II)\ldots\ldots 0=B-C-\frac{a}{b^2}N+B'+B''-C'-C''-\frac{a}{b^2}\delta N,$$

$$(III)\ldots\ldots 0=D-E+\frac{P}{b^2}+D'+D''-E'-E''+\frac{\delta P}{b^2}.$$

Suivant les régles vulgaires de différentiation on a (§. 254.)

$$\frac{\delta M}{b^2}=-\frac{3u a}{b^2}\left\{2(c)_5^3\,\delta.au-\frac{3}{2}(c)_4^2\,\delta.a'u'+(b)_4^3\,\delta v'\right\},\quad \delta R=-f\delta M.\partial v,$$

$$\frac{a}{b^2}\delta N=-\frac{3a}{b^2}s\delta s+\frac{3ua}{2b^2}\left\{(a)_4^3\,\delta.au+3(b)_4^3\,\delta.au-2(c)_3^3\,\delta v'\right\},$$

$$\frac{\delta P}{b^2}=\frac{3ua}{2b^2}\left\{(a)_4^3\,\delta s+(b)_4^3\,\delta s-4s.\delta au\left[(a)_5^3+(b)_5^3\right]\right\},$$

$$\frac{\partial\partial.au}{\partial v^2}+au=1+\gamma^2+\frac{\theta^2}{4}+(1-c^2)\gamma\cos k+(g^2-\tfrac{1}{4})\theta^2\cos 2p,\quad \frac{\partial\partial s}{\partial v^2}+s=(1-g^2)\theta\sin p,$$

$$\frac{\partial\partial.a\delta u}{\partial v^2}+a\delta u=-(1-2m)(3-2m)A^{(0)}\cos 2w+(1-m^2)A^{(1)}\gamma'\cos k'$$
$$+(3-c-2m)(c-1+2m)A^{(2)}\gamma\cos q-3(1-m)(1-3m)A^{(3)}\gamma'\cos q'$$
$$+(3-c-3m)(c-1+3m)A^{(4)}\gamma\gamma'\cos\varrho;$$

d'où l'on tirera

$$A=1+\frac{27u^2a^2}{64b^4(1-m)^2}-2\gamma\cos k+\frac{27u^2a^2(3-m)\gamma'\cos k'}{8b^4(1-m)(2-m)(2-3m)}+\frac{3}{2}\gamma^2\cos 2k+\frac{\theta^2}{2}\cos 2p$$

$$-\frac{3\mu a}{4b^3}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{f}{1-m}+\frac{4(1+m)\gamma^2}{2-c-2m}+\frac{4(1-m)\gamma^2}{2+c-2m}\right)\cos 2w \\ -\left(\frac{f}{1-m}+\frac{4f(1+m)}{2-c-2m}-\frac{10+19m+8m^2}{4(c-1+m)}\gamma^2\right)\gamma\cos q\end{array}\right\},$$

$$A'=(2A^{(0)}-3A^{(2)}\gamma^2)\cos 2w-(3A^{(2)}-2A^{(2)})\gamma\cos q+2A^{(1)}\gamma'\cos k'$$

$$-\frac{3}{2}\frac{\mu a}{b^3}\left\{\begin{array}{l}\frac{A^{(0)}}{2(1-m)}-\left(\frac{3A^{(3)}-A^{(2)}}{2(1-m)}+\frac{2(1+m)A^{(0)}}{2-c-2m}+\frac{2(1-m)A^{(0)}}{2+c-2m}\right)\gamma\cos k \\ +\left(\frac{A^{(3)}}{2(1-m)}+\frac{2(3-m)A^{(3)}}{(2-m)(2-3m)}\right)\gamma'\cos k'\end{array}\right\},$$

$$\frac{\delta M}{b^3}=-\frac{3\mu a}{b^3}\left\{\begin{array}{l}(A^{(2)}+4mA^{(0)}+\frac{7}{2}A^{(4)}\gamma'^2)\gamma\sin k \\ -\left(4A^{(0)}-A^{(3)}-10A^{(2)}\gamma^2+\frac{5}{2}A^{(4)}\gamma^2-\frac{11}{4}mC^{(0)}\right)\gamma'\sin k'+A^{(1)}\gamma'\sin q'\end{array}\right\},$$

$$\frac{\delta R}{b^3}=-\frac{3\mu a}{b^3}\left\{\begin{array}{l}\frac{A^{(2)}+4mA^{(0)}+\frac{7}{2}A^{(4)}\gamma'^2}{c}\gamma\cos k \\ -\left(\frac{4A^{(0)}-A^{(3)}-10A^{(2)}\gamma^2+\frac{5}{2}A^{(4)}\gamma^2}{m}-\frac{11}{4}C^{(0)}\right)\gamma'\cos k'+\frac{A^{(1)}\gamma'}{2-3m}\cos q'\end{array}\right\},$$

$$A''=\frac{3\mu a}{2b^3}\left\{\left(\frac{8A^{(0)}-2A^{(3)}-20A^{(2)}\gamma^2+5A^{(4)}\gamma^2}{m}-\frac{11}{2}C^{(0)}\right)\gamma'\cos k'-\frac{2A^{(2)}+8mA^{(0)}}{c}\gamma\cos k\right\},$$

$$A'''=\frac{3}{2}(A^{(0)})^2+\frac{3}{2}(A^{(2)}\gamma)^2+3A^{(0)}(A^{(2)}-2A^{(0)})\gamma\cos k+3(A^{(0)}A^{(3)}+A^{(2)}A^{(4)}\gamma^2)\gamma'\cos k',$$

$$B=1+\gamma^2+\frac{\theta^2}{4}+(1-c^2)\gamma\cos k$$

$$+\frac{3\mu a}{2b^3}\left\{\begin{array}{l}\frac{f+2\gamma^2-\frac{3}{2}\theta^2}{1-m}\cos 2w-\left(\frac{4(1+m)\left(f+\gamma^2+\frac{\theta^2}{4}\right)}{2-c-2m}-\frac{1-c^2}{2(1-m)}\right)\gamma\cos q \\ +\frac{7}{2-3m}\gamma'\cos q'-\frac{7(2+3m)}{2-c-3m}\gamma\gamma'\cos \varrho\end{array}\right\},$$

$$C=-\frac{3\mu a}{4b^3}c\{f\cos q+4fm\gamma^2\cos 2w+\frac{7}{2}\gamma\gamma'\cos\varrho\},$$

$$B'=-\frac{3\mu a}{4b^3}\frac{(1-2m)(3-2m)}{1-m}A^{(0)}f-(1-2m)(3-2m)A^{(0)}\cos 2w$$

$$+(3-c-2m)(c-1+2m)A^{(2)}\gamma\cos q$$

$$+\left\{(1-m^2)A^{(1)}-\frac{9\mu a}{4b^3}(1-3m)A^{(3)}-\frac{3\mu a}{4b^3}(1-2m)(3-2m)\left(\frac{7}{2-3m}-\frac{1}{2-m}\right)A^{(0)}\right\}\gamma'\cos k'$$

$$+\frac{3\mu a}{b^3}\left\{mfA^{(2)}+(1-2m)(3-2m)\left(\frac{1+m}{2-c-2m}+\frac{1-m}{2+c-2m}\right)fA^{(0)}+\frac{21}{4}mA^{(4)}\gamma'^2\right\}\gamma\cos k$$

$$-3\left\{(1-m)(1-3m)A^{(3)}-\frac{\mu a}{4b^3}(1+m)A^{(1)}f\right\}\gamma'\cos q'$$

$$+\left\{(3-c-3m)(c-1+3m)A^{(4)}-\frac{3\mu a(1+m)}{b^2(2-c-2m)}A^{(1)}\right\}\gamma\gamma'\cos\varrho;$$

$$C'=-\frac{3\mu a}{2b^2}\left\{\begin{array}{l}(1-m)fA^{(0)}+\left\{\frac{2-c-2m}{2}A^{(2)}f-4(1-m)A^{(3)}f+\frac{7}{4}(2-c-3m)A^{(4)}\gamma'^2\right\}\gamma\cos k\\ +\left\{3(1-m)A^{(0)}+\frac{2-3m}{2}A^{(3)}\right\}\gamma'\cos k'\end{array}\right\},$$

$$B'=\frac{6\mu a}{b^2}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{4A^{(0)}-A^{(3)}-10A^{(3)}\gamma^2+\frac{5}{2}A^{(4)}\gamma^2}{m}-\frac{11}{4}C^{(3)}\right)\gamma'\cos k'\\ -\frac{A^{(2)}+4mA^{(0)}+\frac{9}{2}A^{(4)}\gamma'^2}{c}f\gamma\cos k-\frac{A^{(1)}\gamma'}{2-3m}\cos q'\end{array}\right\};$$

$$D=-(g^2-1)\theta\sin p+\frac{3\mu a}{4b^2}\cdot\frac{g^2-1}{1-m}\theta\sin\sigma,$$

$$E=\frac{3\mu a}{4b^2}g\left(f+\frac{2+m}{4}\theta^2\right)\theta\sin\sigma;$$

$$\frac{a\,\delta N}{b^2}=\frac{3\mu a}{2b^2}\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{2}A^{(3)}f+\left(A^{(0)}+\frac{B^{(0)}}{\mu}\theta^2\right)\cos 2w-\left(6A^{(0)}f-\frac{3+4m}{2}A^{(2)}f-\frac{21}{4}A^{(4)}\gamma'^2\right)\gamma\cos k\\ +\left(\frac{9}{2}A^{(0)}+A^{(1)}+\frac{3}{2}A^{(3)}\right)\gamma'\cos k'-(2A^{(0)}-A^{(2)})\gamma\cos q\\ +\left(\frac{3}{2}A^{(0)}+\frac{3}{2}A^{(1)}+A^{(3)}\right)\gamma'\cos q'-\{3(1+m)A^{(1)}-A^{(4)}\}\gamma\gamma'\cos\varrho\end{array}\right\},$$

$$\frac{\delta P}{b^2}=\frac{3\mu a}{2b^2}\theta\{(2A^{(0)}+B^{(0)}-5A^{(2)}\gamma^2)\sin\sigma-(2A^{(0)}+\tfrac{1}{2}B^{(0)})f\sin p\},$$

$$D'=(3-g-2m)(g-1+2m)B^{(0)}\theta\left\{\sin\sigma-\frac{3\mu af}{4b^2(1-m)}\sin p\right\},$$

$$E'=\frac{3\mu a}{4b^2}(2-g-2m)B^{(0)}\theta\left(f-\frac{2+m}{4}\theta^2\right)\sin p;$$

$$C''=0;\quad D''=0;\quad E''=0.$$

§. 256. Le premier terme de A ou de l'équation (I) est $\frac{b\,\partial t}{a^2\,\partial v}=1$, ou $\partial v=\frac{b}{a^2}\partial t$, ce qui doit être identique avec le moyen mouvement $n\partial t$, d'où il suit

$$(1)\ \ldots\ldots\ \frac{a^2}{b}=\frac{1}{n}.$$

Les termes non périodiques de B et N, ou de l'équation (II) donnent, en rejétant les termes inutiles, $0=1-\frac{a}{b^2}(1-\frac{1}{2}\mu e)$, d'où l'on tire $\frac{a}{b^2}=1+\frac{1}{2}\mu e$ à très-peu pres, et $\frac{a^2}{b^4}=(1+\frac{1}{2}\mu e)^2$, ou

$$(2)\ \ldots\ldots\ \frac{a^2}{b}=b^3(1+e\mu).$$

Si, dans l'équation $\frac{a}{b^2}=1+\frac{1}{2}\mu e$, on fait $e=1+\frac{3}{2}\gamma^2=1$, on aura $\frac{a}{b^2}=1+\frac{1}{2}\mu$, $\frac{\sqrt{a}}{b}=1+\frac{1}{4}\mu$, et

$$(3) \ldots\ldots \frac{a^2}{b} = a^{\frac{3}{2}} (1 + \tfrac{1}{4} \mu),$$

ce qui étant comparé avec (1), donne

$$(4) \ldots\ldots \frac{1}{n^2} = a^3 (1 + \tfrac{1}{2} \mu), \text{ et } m^2 = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 = n'^2 a^3 (1 + \tfrac{1}{2} \mu).$$

Suivant la troisième loi de Kepler on a (§. 59.), $a'^3 n'^2 = m'$, m' étant la masse du soleil, exprimée en parties de la masse terrestre, comme ceta s'est fait dans les formules précédentes (§. 252.). En substituant donc $n'^2 = \frac{m'}{a'^3}$, la dernière équation deviendra $m^2 = m' \left(\frac{a}{a'}\right)^3 (1 + \tfrac{1}{2} \mu)$. Mais nous avons supposé (§. 254.) $m' \left(\frac{a}{a'}\right)^3 = \mu$, d'où il résulte $m^2 = \mu (1 + \tfrac{1}{2} \mu)$, et $\frac{\mu a}{b^2} = \frac{1 + \frac{3}{2} \mu}{1 + \frac{1}{2} \mu} m^2 = m^2$. Pour déterminer h^3 dans l'équation (2), on a (3) $h = a^{\frac{1}{2}} (1 - \tfrac{1}{4} \mu)$, $h^3 = a^{\frac{3}{2}} (1 - \tfrac{3}{4} \mu)$, et en substituant (4), $a^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{n} (1 + \tfrac{1}{2} \mu)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{4} \mu}{n}$, $h^3 = \frac{1 - \mu}{n}$. Ainsi l'équation (2) deviendra $\frac{a^2}{b} = \frac{1 - \mu + e \mu}{n} = \frac{1}{n} (1 + \tfrac{3}{2} \mu \gamma'^2) = \frac{1}{n} (1 + \tfrac{3}{2} m^2 \gamma'^2)$, et l'équation

$$\text{I. } n \partial t = (1 + \tfrac{3}{2} m^2 \gamma'^2) \{ 1 - A' - A'' + A''' \} \partial v.$$

Le premier terme de $A = 1$, donnera $n \partial t = \partial v + \tfrac{3}{2} m^2 \gamma'^2 \partial v$, et en intégrant, $nt + \varepsilon = v + \tfrac{3}{2} m^2 \int \gamma'^2 \partial v$. Désignons maintenant par $C^{(0)}$, $C^{(1)}$, etc. les coefficiens des diverses perturbations de v, et supposons, en négligeant les inégalités peu considérables,

$$(E) \ldots\ldots nt + \varepsilon = v + \tfrac{3}{2} m^2 \int \gamma'^2 \partial v + C^{(0)} \sin 2w + C^{(1)} \gamma \sin q$$
$$+ C^{(2)} \gamma \sin k + C^{(3)} \gamma' \sin k' + C^{(4)} \gamma^2 \sin 2k + C^{(5)} \theta^2 \sin 2p,$$

la constante ε renfermant tous les termes non périodiques de l'équation I. Si l'on différentie (E), il viendra

$$\frac{n \partial t}{\partial v} = 1 + \tfrac{3}{2} m^2 \gamma'^2 + 2 (1 - m) C^{(0)} \cos 2w + (2 - c - 2m) C^{(1)} \gamma \cos q + c C^{(2)} \gamma \cos k$$
$$+ m C^{(3)} \gamma' \cos k' + 2c C^{(4)} \gamma^2 \cos 2k + 2g C^{(5)} \theta^2 \cos 2p.$$

En comparant les divers cosinus de cette équation avec I, après avoir mis m^2 à la place de $\frac{\mu a}{b^2}$, dans A, A', A'', A''', on trouvera

$$(1) \ldots\ldots 2(1 - m) C^{(0)} = - \frac{3 m^2 f}{4 (1 - m)} - 3 m^2 \gamma^2 \left(\frac{1 + m}{2 - c - 2m} + \frac{1 - m}{2 + c - 2m} \right) - 2 A^{(0)} + 3 A^{(2)} \gamma^2,$$

$$(2) \ldots\ldots (2 - c - 2m) C^{(1)} = 3 m^2 \left\{ \frac{f}{4 (1 - m)} + \frac{(1 + m) f}{2 - c - 2m} - \frac{10 + 19 m + 8 m^2}{16 (m + c - 1)} \gamma^2 \right\} + 3 A^{(0)} - 2 A^{(2)},$$

$$(3) \ldots\ldots c\,C^{(2)} = -2 - 3m^2 \left\{ \frac{3A^{(2)} - A^{(2)}}{4(1-m)} + \frac{2(2-m)A^{(2)}}{3-8m} - \frac{A^{(2)} + 4mA^{(0)}}{c} \right\} + 3A^{(0)}(A^{(2)} - 2A^{(0)}),$$

$$(4) \ldots\ldots m\,C^{(3)} = -2A^{(1)} - 3m\,(4A^{(0)} - A^{(3)} - 10A^{(2)}\gamma^2 + \tfrac{5}{2}A^{(4)}\gamma^2)$$
$$+ 3m^2 \left\{ \frac{(3-m)A^{(2)}}{(2-m)(2-3m)} + \frac{A^{(2)}}{4(1-m)} \right\}$$
$$+ \frac{33}{4} m^2 C^{(0)} + \frac{27m^4(3-m)}{8(1-m)(2-m)(2-3m)} + 3A^{(0)}A^{(3)} + 3A^{(2)}A^{(4)}\gamma^2,$$

$$(5) \ldots\ldots 2c\,C^{(4)} = \tfrac{3}{2}, \qquad (6) \ldots\ldots 2g\,C^{(5)} = \tfrac{1}{2}.$$

L'équation (II) donnera par le même procédé, pour le coefficient de cos $2w$,

$$(7) \ldots\ldots 0 = -(1-2m)(3-2m)A^{(2)} - \tfrac{3}{2}m^2A^{(2)} + \frac{3m^2}{2(1-m)}(f + 2(1+m)\gamma^2) + \tfrac{3}{2}m^2 f - \tfrac{3}{2}B\theta^2,$$

pour celui de cos k', $\quad (8) \ldots\ldots 0 = (1 - \tfrac{5}{2}m^2)A^{(1)} + \tfrac{3}{2}m^2(1 + \tfrac{9}{8}\gamma'^2)$
$$+ 3m\,(8A^{(2)} - 2A^{(3)} - 20A^{(2)}\gamma^2 + 5A^{(4)}\gamma^2)$$
$$- \frac{3m^2(1-2m)(3-m)(3-2m)}{(2-m)(2-3m)}A^{(0)} - \tfrac{9}{4}m^2(1+2m)A^{(2)} - \tfrac{3}{2}m^2(2-3m)A^{(3)} - \frac{33}{2}m^2C^{(2)},$$

pour cos q, $\quad (9) \ldots\ldots 0 = \{(3 - c - 2m)(c - 1 + 2m) - \tfrac{3}{2}m^2\}A^{(2)}$
$$- \frac{6m^2(1+m)}{2-c-2m}f + \frac{3m^2(1-c^2)}{4(1-m)} - \tfrac{3}{4}m^2(3-c+4m)f - 6m^2(1+3m)\gamma^2 + 3m^2A^{(0)},$$

pour cos q', $\quad (10) \ldots\ldots 0 = -3\{(1-m)(1-3m) + \tfrac{1}{2}m^2\}A^{(3)} + \frac{21m^2(4-3m)}{4(2-3m)},$

pour cos ϱ, $\quad (11) \ldots\ldots 0 = \{(3 - c - 3m)(c - 1 + 3m) - \tfrac{3}{2}m^2\}A^{(4)}$
$$- \frac{21}{2}m^2\left(\frac{2+3m}{2-c-3m} + \frac{3-c+6m}{4}\right) + \tfrac{3}{2}m^2(1-3m)A^{(1)}.$$

Le coefficient de θ sin σ dans l'équation (III) donnera

$$(12) \ldots\ldots 0 = \{(3 - g - 2m)(g - 1 + 2m) + \tfrac{3}{2}m^2\}B^{(0)}$$
$$- \tfrac{3}{4}m^2\left\{(g+1)f - \frac{g^2-1}{1-m} + \gamma^2 - \frac{3-g}{2}\theta^2\right\} + 3m^2A^{(0)} - \frac{15}{2}m^2A^{(2)}\gamma^2.$$

§. 257. Les douze équations précédentes suffisent, pour déterminer, par la méthode vulgaire d'élimination, les douze coefficiens $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}, B^{(0)}, C^{(0)}, C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, C^{(4)}, C^{(5)}$. Si on fait, suivant M. de Laplace,

$$m = 0{,}0748013;\ c = 0{,}991548 01;\ g = 1{,}00402175;$$
$$\gamma = 0{,}0548 6281;\ \gamma' = 0{,}016814;\ \theta = 0{,}0900807;$$
$$\gamma^2 = 0{,}003009928;\ \gamma'^2 = 0{,}00028271;\ \theta^2 = 0{,}0081 14534;$$
$$e = 1{,}0004241;\ f = 0{,}9992 9323;\ m^2 = 0{,}0055 95234;$$

les équations précédentes donneront

$$A^{(0)} = 0{,}00706;\ A^{(1)} = -0{,}0073;\ A^{(2)} = 0{,}2034;\ A^{(3)} = 0{,}0289;$$
$$A^{(4)} = 0{,}545;\ B^{(0)} = 0{,}0283;\ C^{(0)} = -0{,}00913;\ C^{(1)} = -0{,}41989;$$
$$C^{(2)} = -2{,}01;\ C^{(3)} = 0{,}1913;\ C^{(4)} = 0{,}7564;\ C^{(5)} = 0{,}249.$$

Le coefficient $A^{(1)}$ est singulièrement modifié par ceux de la latitude, que nous avons négligés. Si l'on y a égard, on trouvera

$$A^{(1)} = -0{,}0057{\cdot}63;\ A^{(4)} = 0{,}516751.$$

Les valeurs que M. de Laplace a trouvées, en tenant compte des termes que nous avons négligés, diffèrent des précédentes d'environ la centième partie. Les valeurs exactes qui résultent de son analyse, sont parfaitement d'accord avec les meilleures tables modernes, et par conséquent avec les observations; ainsi qu'on pout le voir par le tableau que ce grand géomètre a donné dans la *Mécanique céleste* (*Sec. Part. Liv.* VII. *Chap.* IV.).

Pour faire application des équations précédentes, on doit observer ce qui suit. L'équation (I) donne immédiatement les inégalités de la *longitude* de la lune en fonction de la longitude vraie; $v-(nt+\varepsilon) = -\frac{3}{2}m^2 \int \gamma^2 \partial v - C^{(0)}\sin 2w - \text{cet.}$ L'équation (III) donne la tangente de la *latitude*, $s+\delta s = \theta(\sin p + B^{(0)}\sin\sigma)$, d'où l'on tirera la latitude $\beta = s+\delta s - \frac{(s+\delta s)^3}{3} = s+\delta s - \frac{\theta^3 \sin p}{4}$, ou

$$\beta = \theta\left(1-\frac{\theta^2}{4}\right)\sin p + B\theta\sin\sigma = 0{,}089898\,.\sin p + 0{,}002557\,.\sin\sigma,$$

et en secondes

$$\beta = (5^\circ\, 9'\, 2'',8)\sin(gv - J) + (8'\, 47'',4)\sin(2v - 2mv - gv + J).$$

La *parallaxe* Π est donnée par l'équation (II). Si on désigne par α, r, le rayon terrestre et le rayon vecteur de la lune, on aura $\Pi = \frac{\alpha}{r}$. Or nous avons fait $u = \frac{1}{r\cos\beta}$ (§. 251.), et tang $\beta = s$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{(1+s^2)}}$ d'où il suit

$$\Pi = \frac{\alpha u}{\sqrt{(1+s^2)}} = \frac{\alpha}{a}\, au\,(1-\tfrac{1}{2}s^2) = \frac{\alpha}{a}\, au\left(1-\frac{\theta^2}{4}+\frac{\theta^2}{4}\cos 2p\right).$$

Si on substitue $au = 1+\gamma^2+\frac{\theta^2}{4}+\gamma\,(1+\gamma^2)\cos k - \frac{\theta^2}{4}\cos 2p + a\delta u$ (§. 253.), il viendra

$$\Pi = \frac{\alpha}{a}\left\{1+\gamma^2+\gamma\left(1+\gamma^2-\frac{\theta^2}{4}\right)\cos k + a\delta u\right\}.$$

Mais on a $\frac{\alpha}{a} = 0{,}016551$, donc $\frac{\alpha}{a}(1+\gamma^2) = 0{,}0166 = 3424'',2$; d'où l'on tire

$$\Pi = 57'\,4'',2 + 187'',5 \,.\, \cos k + 24'',21 \,.\, \cos 2\,(v - mv) - 0'',33 \,.\, \cos (mv - \varpi)$$
$$+ 37'',95 . \cos(2v - cv - mv + \varpi) + 1'',63 . \cos(2v - 3mv + \varpi') + 1'',63 . \cos(2v - cv - 3mv + \varpi + \varpi').$$

§. 258. Il nous reste à considérer les équations séculaires des moyens mouvemens de la lune, de ses apsides, et de ses noeuds. La première est donnée par le premier terme de l'équation (I),

$$v - (nt + \varepsilon) = -\tfrac{3}{2}\, m^2 \int \gamma'^2\, \partial v = -\,0{,}0083\,9285 \,.\, \int \gamma'^2\, \partial v;$$

elle dépend donc des variations de l'excentricité de l'orbe terrestre γ'. Nous avons trouvé (§. 250.),

$$\gamma'^2 = \Gamma^2 - t \,.\, 0'',29342 - t^2 \,.\, 0'',0006027.$$

En substituant donc $n = 8399{,}7$; $\partial v = n\,\partial t = 8399{,}7 \,.\, \partial t$, on aura l'équation séculaire de la longitude moyenne, comme ci-dessus (§. 250.),

$$v = 8399{,}7 \,.\, \int (t \,.\, 0'',0024626 + t^2 \,.\, 0'',000005059)\, \partial t = t^2 \,.\, 10'',3 + t^3 \,.\, 0'',0142.$$

L'inégalité du moyen mouvement des apsides et des noeuds sera déterminé de la même manière que celle des planètes (§. 185. 187.). On différentiera le premier terme de l'expression elliptique du rayon vecteur et de la latitude de la lune, en faisant varier l'excentricité et le périhélie, ainsi que l'inclinaison et les noeuds; or comme ces variations ne peuvent résulter que des perturbations, on trouvera leurs valeurs, en comparant les différentielles précédentes avec les termes analogues des équations II, III, qui contiennent les perturbations. Le premier terme de au, qui est $1 + \gamma \cos (cv - \varpi)$ (§. 253. (l)), donne en différentiant,

$$\frac{a\,\partial\partial u}{\partial v^2} + au = 1 + (1 - c^2)\gamma \cos k + \left\{ \frac{\partial\partial \gamma}{\partial v^2} + 2c\gamma \frac{\partial \varpi}{\partial v} - \gamma \left(\frac{\partial \varpi}{\partial v}\right)^2 \right\} \cos k + \ldots\ldots \sin k,$$

le coefficient de sin k étant inutile ici. La valeur elliptique de $\frac{a\,\partial\partial u}{\partial v^2} + au$ est $1 + (1 - c^2)\,\gamma \cos k$ (§. 255.). En l'ôtant de l'expression précédente, il restera pour les perturbations, en négligeant le terme $\frac{\partial\partial \gamma}{\partial v^2}$ à cause de la lenteur de la variation de l'excentricité, cette équation:

$$0 = \frac{a\,\partial\partial u}{\partial v^2} + au + \frac{\partial \varpi}{\partial v} \left(\frac{\partial \varpi}{\partial v} - 2c\right) \gamma \cos k.$$

L'équation (II) a la forme, $0 = \frac{a\,\partial\partial u}{\partial v^2} + au + \mathrm{K}\,\gamma \cos k$, K étant la somme des coefficiens de $\gamma \cos k$, dans $\mathrm{B} - \mathrm{C} - \frac{a}{b^2}\mathrm{N} + \mathrm{B}' + \mathrm{B}'' - \mathrm{C}' - \frac{a}{b^2}\,\delta \mathrm{N}$

(§. 255.), après en avoir ôté la partie elliptique $(1 - c^2)\,\gamma . \cos k$. Cela posé, la comparaison de ces deux équations donnera

$$o = \left(\frac{\partial \varpi}{\partial v}\right)^2 - 2c\left(\frac{\partial \varpi}{\partial v}\right) - K, \text{ d'où l'on tire}$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial v} = c \pm \sqrt{(c^2 + K)}, \text{ et en intégrant,}$$

$$(a) \ldots\ldots \varpi = cv + \int \partial v . \sqrt{(c^2 + K)}.$$

Il en suit $2cv = \varpi + cv \mp \int \partial v . \sqrt{(c^2 + K)} = v \mp \int \partial v . \sqrt{(c^2 + K)}$, parceque nous avons supposé le moyen mouvement des apsides, $\varpi = (1 - c)\, v$ (§. 253.), c étant à peu près égal à l'unité; d'où il suit que $2cv$ ou $v \mp \int \partial v . \sqrt{(c^2 + K)}$ est à peu près égal à $2v$. Il est donc visible qu'il faut prendre le radical avec le signe inférieur, ce qui donnera (a), $\varpi = cv - \int \partial v . \sqrt{(c^2 + K)}$. Si on fait pour abréger,

$$1 - 2(5 - 8m)A^{(0)} + (5 + m)A^{(2)} = A, \tfrac{3}{2} + 5(5 - 8m)A^{(0)} - \frac{5(5+m)}{2}A^{(2)} + \frac{7(10-3m)}{4}A^{(4)} = B,$$

les valeurs précédentes de B, C, $\frac{a}{b^3}$ N, B′, B″, C′, $\frac{a}{b^3}\,\delta$N, donneront

$$K = -\tfrac{3}{2}\, m^2 (A + B\gamma'^2),$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial v} = c - \left(1 - \frac{\frac{3}{4}m^2 B \gamma'^2}{c^2 - \frac{3}{2}m^2 A}\right)\sqrt{(c^2 - \tfrac{3}{2}m^2 A)} = c - \sqrt{(c^2 - \tfrac{3}{2}m^2 A)} + \frac{3m^2 B \gamma'^2}{4\sqrt{(c^2 - \frac{3}{2}m^2 A)}}.$$

L'intégration donnera le lieu du périgée,

$$\varpi = \Pi + v\{c - \sqrt{(c^2 - \tfrac{3}{2}m^2 A)}\} + \frac{3m^2 B}{4\sqrt{(c^2 - \frac{3}{2}m^2 A)}}\int \gamma'^2 \partial v,$$

Π étant l'époque, $v\{c - \sqrt{(c^2 - \frac{3}{2}m^2 A)}\} = \zeta v$ le moyen mouvement des apsides, et $\frac{3m^2 B}{4\sqrt{(c^2 - \frac{3}{2}m^2 A)}}\int \gamma'^2 \partial v$ l'équation séculaire de ce mouvement. Les valeurs précédentes donnent $A = 1{,}9658136$; $B = 7{,}9125435 9$; d'où il viendra

$$\sqrt{(c^2 - \tfrac{3}{2}m^2 A)} = 0{,}9831927 = c - \zeta.$$

Nous avons supposé le moyen mouvement $= (1 - c)v$, d'où il suit $2c = 1 + \sqrt{(c^2 - \frac{3}{2}m^2 A)}$, et $c = 0{,}9915963$; ce qui ne diffère que de la 20000me partie, de la valeur qu'ont donnée les observations, $c = 0{,}991548$. Ensuite on a $\frac{\frac{1}{2}B}{\sqrt{(c^2 - \frac{3}{2}m^2 A)}} = 4{,}030$; d'où il résulte l'équation séculaire du périhélie $= 4{,}03 . \frac{3}{2}\, m^2 \int \gamma'^2 \partial v$. Cette équation a un signe contraire à l'équation séculaire de la longitude, et elle est quatre fois plus grande, ou suivant M. de Laplace, trois fois: ce qui donne

$$\text{l'équation séculaire du périhélie} = -\, t . 30'',9 - t^2 . 0'',0426;$$

t étant le nombre des siècles écoulés depuis l'époque.

Le premier terme de la latitude, $s = \theta \sin (g v - J)$, donnera par le même procédé, $\frac{\partial\partial s}{\partial v^2} + s = \left\{ 2g \left(\frac{\partial J}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial J}{\partial v}\right)^2 \right\} \theta \sin p$, en retranchant la partie elliptique, et négligeant $\frac{\partial\partial\theta}{\partial v^2}$ et le coefficient de $\cos p$. L'équation III donne

$$o = \frac{\partial\partial s}{\partial v^2} + s - E + \frac{P}{b^2} + D' - E' + \frac{\delta P}{b^2} =$$

$$\frac{\partial\partial s}{\partial v^2} + s + \frac{3}{2} m^2 \left\{ e - \frac{(3-g-2m)(g-1+2m)}{2(1-m)} B^{(0)} f - \frac{2-g-2m}{2} B^{(0)} f - 2A^{(0)} f - \frac{1}{2} B^{(0)} f \right\} \theta \sin p,$$

et en faisant $g = 1$,

$$o = \frac{\partial\partial s}{\partial v^2} + s + \frac{3}{2} m^2 \{ e - 2A^{(0)} f - (1+m) B^{(0)} f \} \theta \sin p.$$

Si l'on compare cette équation avec la précédente

$$o = \frac{\partial\partial s}{\partial v^2} + s + \left\{ \left(\frac{\partial J}{\partial v}\right)^2 - 2g \left(\frac{\partial J}{\partial v}\right) \right\} \theta \sin p,$$

en faisant $1 - 2A^{(0)} - (1+m) B^{(0)} = C$, $\frac{3}{2} + 5A^{(0)} + \frac{1}{2}(1+m) B^{(0)} = D$, on aura

$$o = \left(\frac{\partial J}{\partial v}\right)^2 - 2g \left(\frac{\partial J}{\partial v}\right) - \frac{3}{2} m^2 C - \frac{3}{2} m^2 D \gamma'^2,$$

d'où l'on conclura, en faisant pour abréger, $\sqrt{(g^2 + \frac{3}{2} m^2 C)} = \zeta$,

$$\frac{\partial J}{\partial v} = g - \zeta - \frac{3m^2}{4\zeta} D \gamma^2, \text{ et } J = H + (g - \zeta) v - \frac{3m^2}{4\zeta} D \int \gamma^2 \partial v,$$

H étant l'époque, $(g - \zeta) v$ le moyen mouvement des noeuds, et $-\frac{3m^2}{4\zeta} D \int \gamma^2 \partial v$ l'équation séculaire de ce mouvement. Les valeurs de m, $A^{(0)}$, $B^{(0)}$ (§. 257), donnent $C = 0{,}9553085 7$; $D = 1{,}6117285 7$; $\zeta = 1{,}0080064$; $\frac{D}{2\zeta} = 0{,}7994634$. On a donc le mouvement moyen des noeuds $= (g - \zeta)\, v$, ce qui doit être égal à $(1 - g) v$, d'où l'on tire $g = \frac{1 + \zeta}{2} = 1{,}0040032$; ce qui diffère très-peu de la valeur $g = 1{,}0040217$ que donnent les observations. L'équation séculaire est $-0{,}7994634 . \frac{3}{2} m^2 \int \gamma^2 \partial v$, ou suivant M. de Laplace, $-0{,}735452 . \frac{3}{2} m^2 \int \gamma^2 \partial v$, ce qui donne

l'équation séculaire des noeuds $= t . 7'',502 + t^2 . 0'',01133$.

CHAPITRE IX.

Théorie des Satellites de Jupiter.

§. 259. Une théorie complète des perturbations des Satellites de Jupiter exigerait des calculs aussi longs que celles des planètes principales du système solaire. Quoiqu'il n'y ait que quatre corps, l'action du soleil, le rapport remarquable qui existe entre les moyens mouvemens des trois premiers satellites, l'aplatissement de Jupiter qui a un effet considérable sur le mouvement de ses satellites, et l'ignorance dans laquelle nous laissent les observations, relativement aux excentricités de ces orbites, demandent une analyse, différente de celle que nous avons employée jusqu'ici. Cependant la masse de Jupiter et sa distance au soleil étant beaucoup plus grandes que celles de la terre, l'action du soleil sur les satellites est peu considérable. L'action de Saturne, dont la distance à Jupiter n'est pas plus grande que celle du soleil, tandis que sa masse est 3534 fois plus petite, est tout-à-fait insensible. L'effet de l'aplatissement de Jupiter est très-sensible, principalement par le mouvement des apsides. Mais il serait impossible d'exposer cette théorie, sans donner trop d'étendue à cet ouvrage. Il en est de même des inégalités qui dépendent des excentricités. Les observations n'ont donné qu'une connaissance imparfaite des excentricités du IV et du III satellite. Pour les déterminer exactement, M. de Laplace a employé une analyse ingénieuse et délicate, dont nous regrettons de ne pouvoir donner un extrait (1). Les inégalités, indépendantes des excentricités, sont proportionnelles à $\sin i(\mu' - \mu)$, μ et μ' étant les longitudes jovicentriques du satellite troublé

(1) *Mécan. cél. Tome IV. Liv. VIII.*

et du corps perturbateur. Si le dernier est le soleil, $\mu' - \mu$ est 180° dans les éclipses, dont le calcul est le but de ces recherches: par conséquent les inégalités, dues à l'action du soleil, sont nulles. Nous nous bornerons donc à exposer les inégalités périodiques, indépendantes des excentricités, qui sont dues aux actions mutuelles des satellites, et les équations séculaires des noeuds, qui résultent des actions des satellites et du soleil. Ainsi les calculs, contenus dans le Chapitre présent, ne seraient qu'une application des formules données dans le Chap. II, si le rapport qui existe entre les moyens mouvemens des satellites, ne le modifiait. Nous commencerons par donner le résultat des formules précédentes, et ensuite nous chercherons la correction qui résulte de ce rapport remarquable.

§ 260. Désignons généralement par M la masse perturbatrice, nommons m^{I}, m^{II}, m^{III}, m^{IV}, $\odot$, les masses des quatre satellites et du soleil, celle de Jupiter étant prise pour unité, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, les demi-diamètres de leurs orbites, r^{I}, r^{II}, r^{III}, r^{IV}, leurs rayons vecteurs, I, II, III, IV, et v^{I}, v^{II}, v^{III}, v^{IV}, leurs longitudes jovicentriques, moyenne et vraie. Θ^{I}, Θ^{II}, Θ^{III}, Θ^{IV}, les durées de leurs révolutions sidérales, ζ^{I}, ζ^{II}, ζ^{III}, ζ^{IV}, les mouvemens annuels des noeuds sur l'orbite de la planète perturbatrice; et employons pour les autres quantités les notations, adoptées dans le Chap. II. Cela posé on aura (§. 210. 211. 171 — 175.),

$$(1) \ldots\ldots \zeta = -\frac{N}{4} M \alpha c^{(1)},$$

$$(2) \ldots\ldots M\frac{\delta r}{a} = \frac{M}{6} a^2 \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{M n^2 \cos i(v' - v)}{\{i(n-n')+n\}\{i(n-n')-n\}} \left\{ \frac{2n}{n-n'} aA^{(i)} + a^2 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} \right\},$$

$$(3) \ldots\ldots M\delta v = \frac{M n^2 \sin i(v' - v)}{i(n-n')\{i(n-n')+n\}\{i(n-n')-n\}} \left\{ \frac{i^2(n-n')^2 + 3n^2}{n-n'} aA^{(i)} + 2na^2 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} \right\},$$

$$(4) \ldots\ldots \begin{cases} aA^{(i)} = -\alpha b^{(i)}, \quad aA^{(1)} = \alpha(\alpha - b^{(1)}), \quad a^2 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} = -\alpha^2 \frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha}, \quad a^2 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a} = \alpha^2\left(1 - \frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha}\right), \\ a' A^{(i)} = -b^{(i)}, a' A^{(1)} = \frac{1}{\alpha^2} - b^{(1)}, a'^2 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'} = b^{(i)} + \alpha \frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha}, a'^2 \frac{\partial A^{(1)}}{\partial a'} = \frac{1}{\alpha^2} + b^{(1)} + \alpha \frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha}; \end{cases}$$

i ne s'étendant qu'aux nombres positifs, et toutes les lettres, marquées d'un trait, se rapportant au satellite supérieur. Les coefficiens $b^{(i)}$, $\frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha}$, $c^{(i)}$, seront calculés au moyen des formules données ci-dessus (§. 171 — 173.), et

des élémens suivans, tirés de la *Mécanique Céleste*, où l'on a pris le demi-diamètre de Jupiter pour l'unité des distances.

$$a^{\text{I}} = 5{,}69849; \quad a^{\text{II}} = 9{,}06655; \quad a^{\text{III}} = 14{,}46189; \quad a^{\text{IV}} = 25{,}4359;$$

$$n^{\text{I}} = n^{\text{IV}}.\,9{,}433419; \quad n^{\text{II}} = n^{\text{IV}}.\,4{,}699769; \quad n^{\text{III}} = n^{\text{IV}}.\,2{,}332643; \quad n^{\text{IV}} = 1;$$

$\Theta^{\text{I}} = 1{,}7691378$ jours; $\Theta^{\text{II}} = 3{,}551181$ j. $\Theta^{\text{III}} = 7{,}1545528$ j. $\Theta^{\text{IV}} = 16{,}6890194$ j.

De là on a conclu,

pour le I *et* II *satellites*,

$$\alpha = 0{,}6185183; \quad b^{(0)} = 2{,}25884; \quad b^{(1)} = 0{,}7543117; \quad b^{(2)} = 0{,}3632142;$$

$$b^{(3)} = 0{,}1923542; \quad b^{(4)} = 0{,}1065115; \quad b^{(5)} = 0{,}0605324; \quad \frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} = 1{,}099916;$$

$$\frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = 1{,}750014; \quad \frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha} = 1{,}45276; \quad \frac{\partial b^{(3)}}{\partial \alpha} = 1{,}0846; \quad c^{(1)} = 4{,}883164;$$

I *et* III *satellites*,

$$\alpha = 0{,}3940349; \quad b^{(0)} = 2{,}0852433; \quad b^{(1)} = 0{,}4194902; \quad b^{(2)} = 0{,}1248495;$$

$$b^{(3)} = 0{,}041141; \quad \frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = 1{,}208235; \quad \frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha} = 0{,}681369; \quad c^{(1)} = 1{,}6237782;$$

I *et* IV *satellites*,

$$\alpha = 0{,}2240334; \quad b^{(0)} = 2{,}025831; \quad b^{(1)} = 0{,}228387; \quad b^{(2)} = 0{,}0384562;$$

$$\frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = 1{,}059579; \quad c^{(1)} = 0{,}740306;$$

II *et* III *satellites*,

$$\alpha = 0{,}6269267; \quad b^{(0)} = 2{,}2570986; \quad b^{(1)} = 0{,}751534; \quad b^{(2)} = 0{,}3609108;$$

$$b^{(3)} = 0{,}1906386; \quad b^{(4)} = 0{,}105293; \quad \frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = 1{,}74365; \quad \frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha} = 1{,}444842;$$

$$\frac{\partial b^{(3)}}{\partial \alpha} = 1{,}07629; \quad c^{(1)} = 4{,}84022;$$

II *et* IV *satellites*,

$$\alpha = 0{,}356447; \quad b^{(0)} = 2{,}0685085; \quad b^{(1)} = 0{,}374917; \quad b^{(2)} = 0{,}1008003;$$

$$\frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = 1{,}164667; \quad c^{(1)} = 1{,}380615;$$

III *et* IV *satellites*,

$$\alpha = 0{,}5685624; \quad b^{(0)} = 2{,}1996536; \quad b^{(1)} = 0{,}6558357; \quad b^{(2)} = 0{,}28437;$$

$$b^{(3)} = 0{,}135969; \quad b^{(4)} = 0{,}068124; \quad \frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} = 0{,}878931; \quad \frac{\partial b^{(1)}}{\partial \alpha} = 1{,}545882;$$

$$\frac{\partial b^{(2)}}{\partial \alpha} = 1{,}190293; \quad \frac{\partial b^{(3)}}{\partial \alpha} = 0{,}812421; \quad c^{(1)} = 3{,}5666725.$$

Si on désigne par A la moyenne distance de Jupiter au soleil, par a le demi-diamètre de l'orbite d'un satellite, par T la durée d'une révolution de Jupiter, on aura $\odot = 1067,1$; $T = 4332,6022$ jours, et (§. 60.) $\frac{a^3}{A^3} = \alpha^3 = \frac{\Theta^2}{\odot . T^2}$; d'où l'on tirera

pour le I *satellite*,

$$\alpha = 0,00053861; \quad b^{(0)} = 2; \quad b^{(1)} = 0,0005386; \quad c^{(1)} = 0,0016158;$$

pour le II *satellite*,

$$\alpha = 0,00085707; \quad b^{(0)} = 2; \quad b^{(1)} = 0,00085707; \quad c^{(1)} = 0,0025712;$$

pour le III *satellite*,

$$\alpha = 0,00136717; \quad b^{(0)} = 2; \quad b^{(1)} = 0,0013672; \quad c^{(1)} = 0,0041015;$$

pour le IV *satellite*,

$$\alpha = 0,00240466; \quad b^{(0)} = 2; \quad b^{(1)} = 0,0024047; \quad c^{(1)} = 0,007214.$$

§. 261. Si, dans la formule (1), on fait $\frac{N}{4} = 90°$, on aura le mouvement des noeuds pendant une révolution du satellite troublé, d'où il est aisé de conclure le mouvement annuel, $\zeta = -M\alpha^2 c^{(1)} \theta . 90°$, θ étant $= \frac{365,25 \text{ jours}}{\Theta}$. Les valeurs précédentes de Θ donnent pour les quatre satellites,

$$\theta^{I} = 206,4565; \quad \theta^{II} = 102,8531; \quad \theta^{III} = 51,0514; \quad \theta^{IV} = 21,8856;$$

d'où l'on tirera

$$\zeta^{I} = -33'',5 - m^{II}.12903589o'' - m^{III}.16864354'' - m^{IV}.2485480'';$$
$$\zeta^{II} = -1'7'',2 - m^{I}.102277852'' - m^{III}.6339589o'' - m^{IV}.5845540'';$$
$$\zeta^{III} = -2'15'',3 - m^{I}.10583130'' - m^{II}.39868930'' - m^{IV}.19070940'';$$
$$\zeta^{IV} = -5'15'',6 - m^{I}.1176057'' - m^{II}.3489570'' - m^{III}.14379563'';$$

le premier terme étant le mouvement des noeuds sur l'orbite de Jupiter, qui dépend de l'action du soleil, et les autres termes donnant le mouvement des noeuds sur l'orbite du satellite perturbateur. Si on multiplie la valeur de ζ, relative à l'action de chaque satellite, par $1 - \frac{\theta'}{\theta}\cos(J - J')$, on aura le mouvement des noeuds sur l'orbite de Jupiter (§. 210. XV.). Suivant les observations de Maraldi et de Wargentin, les longitudes du noeud ascendant ont été au commencement du siècle présent, à peu près

$J^{I} = 314°30'$, $J^{II} = 313°45'$, $J^{III} = 314°24'$, $J^{IV} = 320°18$, et les inclinaisons

$$\theta^{I} = 3°18'38'', \quad \theta^{II} = 3°16', \quad \theta^{III} = 3°14', \quad \theta^{IV} = 2°35';$$

ce qui suffit pour calculer la formule précédente. Mais les arcs $J'-J'$, etc. et les angles θ', etc. sont si petits, et si peu différens les uns des autres, que ce calcul ne pourra donner aucun résultat sûr: il vaudra donc mieux s'en tenir aux observations, suivant lesquelles les orbites des quatre satellites ont eu, au commencement du siècle présent, une position semblable à celle que présente la *Fig.* 48. On verra plus bas, que les masses des quatre satellites sont, par rapport à celle de Jupiter,

$m^{\mathrm{I}}=0{,}0000173281$; $m^{\mathrm{II}}=0{,}0000232355$; $m^{\mathrm{III}}=0{,}0000884972$; $m^{\mathrm{IV}}=0{,}0000426591$.

Si on substitue ces valeurs dans les expressions précédentes de $\zeta^{\mathrm{I}}, \zeta^{\mathrm{II}}, \zeta^{\mathrm{III}}, \zeta^{\mathrm{IV}}$, on trouvera que

les noeuds du I satellite rétrogradent annuellement
sur l'orbite du $\mathrm{II} = 49'58'',2$; du $\mathrm{III} = 24'52',4$; du $\mathrm{IV} = 1'46''$;
les noeuds du II sur l'orb. du $\mathrm{I}=29'32'',3$; du $\mathrm{III}=9'30'',4$; du $\mathrm{IV}=4'9'',4$;
les noeuds du III sur l'orb. du $\mathrm{I}=3'3'',4$; du $\mathrm{II}=15'26'',4$; du $\mathrm{IV}=13'33'',5$;
les noeuds du IV sur l'orb. du $\mathrm{I}=20'',4$; du $\mathrm{II}=1'21'',1$; du $\mathrm{III}=1'12'',5$.

§. 262. En vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvemens des trois premiers satellites, nous ferons $n'=2n''=4n'''$, en exceptant cependant les diviseurs $n'-2n''$, $n''-2n'''$, qui deviendraient nuls par cette substitution. En faisant donc

$$\frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{II}}}=\alpha,\quad \frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{III}}}={}^{1}\alpha,\quad \frac{a^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{IV}}}={}^{2}\alpha,\quad \frac{a^{\mathrm{II}}}{a^{\mathrm{III}}}=\beta,\quad \frac{a^{\mathrm{II}}}{a^{\mathrm{IV}}}={}^{1}\beta,\quad \frac{a^{\mathrm{III}}}{a^{\mathrm{IV}}}=\gamma,$$

et désignant par $b^{(i)}, {}^{1}b^{(i)}, {}^{2}b^{(i)}$, les fonctions $b^{(i)}$ qui se rapportent à $\alpha, {}^{1}\alpha\, {}^{2}\alpha$; par $d^{(i)}, {}^{1}d^{(i)}$, les fonctions $b^{(i)}$ relatives à $\beta, {}^{1}\beta$; et par $e^{(i)}$ celles qui se rapportent à γ; la formule (1) (§. 262.) donnera en secondes d'un degré,

$$\delta v'=\frac{4}{3}n''\cdot\left\{13b^{(1)}+4\alpha\frac{\partial b^{(1)}}{\partial\alpha}-17\alpha\right\}\frac{\sin(\mathrm{II}-\mathrm{I})}{\sin 1''}-\frac{m''n'\alpha}{n'-2n''}\left\{4b^{(2)}+\alpha\frac{\partial b^{(2)}}{\partial\alpha}\right\}\frac{\sin 2(\mathrm{II}-\mathrm{I})}{\sin 1''}$$
$$-\frac{4m'}{15}\alpha\left\{21\,b^{(3)}+4\alpha\frac{\partial b^{(3)}}{\partial\alpha}\right\}\frac{\sin 3(\mathrm{II}-\mathrm{I})}{\sin 1''}-\frac{m''}{3}\alpha\left\{7\,b^{(4)}+\alpha\frac{\partial b^{(4)}}{\partial\alpha}\right\}\frac{\sin 4\,(\mathrm{II}-\mathrm{I})}{\sin 1''}$$
$$+\frac{16m'''}{21}\,{}^{1}\alpha\left\{19\,{}^{1}b^{(1)}+8\,{}^{1}\alpha\frac{\partial\,{}^{1}b^{(1)}}{\partial\alpha}-27\,{}^{1}\alpha\right\}\frac{\sin(\mathrm{III}-\mathrm{I})}{\sin 1''}$$
$$-\frac{16m''}{15}\,{}^{1}\alpha\left\{3{,}5\cdot{}^{1}b^{(2)}+{}^{1}\alpha\frac{\partial\,{}^{1}b^{(2)}}{\partial\alpha}\right\}\frac{\sin 2\,(\mathrm{III}-\mathrm{I})}{\sin 1''};$$

$$\delta v''=-\frac{m'n''}{n'-2n''}\left\{3\,b^{(1)}+\alpha\frac{\partial b^{(1)}}{\partial\alpha}-\frac{1}{\alpha^{2}}\right\}\frac{\sin(\mathrm{I}-\mathrm{II})}{\sin 1''}$$

$$-\frac{m'}{3}\left\{4.5\,b^{(2)}+\alpha\frac{\partial b^{(2)}}{\partial\alpha}\right\}\frac{\sin 2(\mathrm{I}-\mathrm{II})}{\sin 1''}-\frac{m'}{12}\left\{7\,b^{(3)}+\alpha\frac{\partial b^{(3)}}{\partial\alpha}\right\}\frac{\sin 3(\mathrm{I}-\mathrm{II})}{\sin 1''}$$

$$+\frac{4m'''}{3}\beta\left\{13d^{(1)}-17\beta+4\beta\frac{\partial d^{(1)}}{\partial\beta}\right\}\frac{\sin(\mathrm{III}-\mathrm{II})}{\sin 1''}-\frac{m'''n''}{n''-2n'''}\left\{4d^{(2)}+3\frac{\partial d^{(2)}}{\partial\beta}\right\}\frac{\sin 2(\mathrm{III}-\mathrm{II})}{\sin 1''}$$

$$-\frac{4m'''}{15}\beta\left\{21d^{(3)}+4\beta\frac{\partial d^{(3)}}{\partial\beta}\right\}\frac{\sin 3(\mathrm{III}-\mathrm{II})}{\sin 1''}-\frac{m'''}{3}\beta\left\{7d^{(4)}+\beta\frac{\partial d^{(4)}}{\partial\beta}\right\}\frac{\sin 4(\mathrm{III}-\mathrm{II})}{\sin 1''};$$

$$\delta v'''=\frac{m'}{12}\left\{\frac{1}{\alpha^2}-3\,b^{(1)}-\alpha\frac{\partial b^{(1)}}{\partial\alpha}\right\}\frac{\sin(\mathrm{I}-\mathrm{III})}{\sin 1''}$$

$$-\frac{m'n''}{n''-2n'''}\left\{3\,d^{(1)}-\frac{1}{\beta^2}+\beta\frac{\partial d^{(1)}}{\partial\beta}\right\}\frac{\sin(\mathrm{II}-\mathrm{III})}{\sin 1''}$$

$$-\frac{m''}{3}\left\{4.5\,d^{(2)}+\beta\frac{\partial d^{(2)}}{\partial\beta}\right\}\frac{\sin 2(\mathrm{II}-\mathrm{III})}{\sin 1''}-\frac{m''}{12}\left\{7\,d^{(3)}+\beta\frac{\partial d^{(3)}}{\partial\beta}\right\}\frac{\sin 3(\mathrm{II}-\mathrm{III})}{\sin 1''}$$

$$-\frac{m^{\mathrm{IV}}(n''')^2\gamma}{(n'''-1)(2n'''-1)}\left\{\left(n'''-1+\frac{3(n''')^2}{n'''-1}\right)(\gamma-e^{(1)})+2n'''\gamma\left(1-\frac{\partial e^{(1)}}{\partial\gamma}\right)\right\}\frac{\sin(\mathrm{IV}-\mathrm{III})}{\sin 1''}$$

$$-\frac{m^{\mathrm{IV}}(n''')^2\gamma}{(n'''-1)(n'''-2)(3n'''-2)}\left\{\left(2n'''-2+\frac{3(n''')^2}{2(n'''-1)}\right)e^{(2)}+n'''\gamma\frac{\partial e^{(2)}}{\partial\gamma}\right\}\frac{\sin 2(\mathrm{IV}-\mathrm{III})}{\sin 1''}$$

$$-\frac{m^{\mathrm{IV}}(n''')^2\gamma}{(n'''-1)(2n'''-3)(4n'''-3)}\left\{\left(3n'''-3+\frac{(n''')^2}{n'''-1}\right)e^{(3)}+\frac{2}{3}n'''\gamma\frac{\partial e^{(3)}}{\partial\gamma}\right\}\frac{\sin 3(\mathrm{IV}-\mathrm{III})}{\sin 1''};$$

$$\delta v^{\mathrm{IV}}=\frac{m'}{n'(n'-1)(n'-2)}\left\{\frac{1}{2\alpha^2}\left(n'-3+\frac{3}{n'-1}\right)-b^{(1)}\left(n'+1+\frac{3}{n'-1}\right)-2\alpha\frac{\partial b^{(1)}}{\partial\alpha}\right\}\frac{\sin(\mathrm{I}-\mathrm{IV})}{\sin 1''}$$

$$+\frac{m''}{n''(n''-1)(n''-2)}\left\{\frac{1}{2\beta^2}\left(n''-3+\frac{3}{n''-1}\right)-d^{(1)}\left(n''+1+\frac{3}{n''-1}\right)-2\beta\frac{\partial d^{(1)}}{\partial\beta}\right\}\frac{\sin(\mathrm{II}-\mathrm{IV})}{\sin 1''}$$

$$+\frac{m'''}{n'''(n'''-1)(n'''-2)}\left\{\frac{1}{\gamma^2}\left(n'''-3+\frac{3}{n'''-1}\right)-e^{(1)}\left(n'''+1+\frac{3}{n'''-1}\right)-2\gamma\frac{\partial e^{(1)}}{\partial\gamma}\right\}\frac{\sin(\mathrm{III}-\mathrm{IV})}{\sin 1''}$$

$$-\frac{m'''}{(2n'''-1)(2n'''-2)(2n'''-3)}\left\{\left(4n'''-2+\frac{3}{n'''-1}\right)e^{(2)}+2\gamma\frac{\partial e^{(2)}}{\partial\gamma}\right\}\frac{\sin 2(\mathrm{III}-\mathrm{IV})}{\sin 1''}.$$

Les autres inégalités sont insensibles.

Si on substitue pour α, β, γ, $b^{(i)}$, $d^{(i)}$, $e^{(i)}$, etc. leurs valeurs (§. 260.), il viendra

$$\delta v'=m''.608605''\sin(\mathrm{II}-\mathrm{I})-m''.844040''\sin 2(\mathrm{II}-\mathrm{I})-m''.233914''\sin 3(\mathrm{II}-\mathrm{I})$$
$$-m''.52211''\sin 4(\mathrm{II}-\mathrm{I})+m'''.70798''\sin(\mathrm{III}-\mathrm{I})-m'''.61159''\sin 2(\mathrm{III}-\mathrm{I}),$$

$$\delta v''=-m'.235104''\sin(\mathrm{I}-\mathrm{II})-m'.175167''\sin 2(\mathrm{I}-\mathrm{II})-m'.3461''\sin 3(\mathrm{I}-\mathrm{II})$$
$$+m'''.600831''\sin(\mathrm{III}-\mathrm{II})-m'''.416474''\sin 2(\mathrm{III}-\mathrm{II})-m'''.231123''\sin 3(\mathrm{III}-\mathrm{II}),$$

$$\delta v'''=m'.80892''\sin(\mathrm{I}-\mathrm{III})-m''.1176020''\sin(\mathrm{II}-\mathrm{III})$$
$$-m''.17344''\sin 2(\mathrm{II}-\mathrm{III})-m''.3456''\sin 3(\mathrm{II}-\mathrm{III})$$
$$+m^{\mathrm{IV}}.344013''\sin(\mathrm{IV}-\mathrm{III})-m^{\mathrm{IV}}.1174388''\sin 2(\mathrm{IV}-\mathrm{III})-m^{\mathrm{IV}}.82533\sin 3(\mathrm{IV}-\mathrm{III}),$$

$$\delta v^{\text{IV}} = m'.\,46154'' \sin(\text{I}-\text{IV}) + m''.\,7457'' \sin(\text{II}-\text{IV})$$
$$-\, m'''.\,103822'' \sin(\text{III}-\text{IV}) - m'''.\,51708'' \sin 2(\text{III}-\text{IV}).$$

Les inégalités que M. de Laplace a trouvées par d'autres formules [1], sont peu différentes des précédentes, à l'exception des termes qui ont les argumens 2 (II — I), I — II, 2 (III — II), ou ce qui revient au même, des termes qui ont les diviseurs $n'-2n''$, $n''-2n'''$. La détermination exacte de ces termes demande une analyse particulière que nous allons exposer [2].

§. 263. L'extrême petitesse de ces diviseurs produit des inégalités qui, croissant très-lentement, ont de longues périodes, et par là ressemblent à une équation séculaire du moyen mouvement ou du grand axe, que nous représenterons par $\text{M}\delta a$, M étant la masse perturbatrice. Cette nouvelle inégalité dépend donc du carré de la masse M, et elle est principalement sensible dans les termes où $r\delta r$ est multiplié par la partie constante de la masse perturbatrice. C'est pour cela que nous mettrons $\frac{r\,\delta r}{r^2}$ au lieu de $\frac{\delta r}{r^2}$, et $a+\text{M}\delta a = a + \text{M}\,\frac{r\,\delta r}{a}$ au lieu de r, parceque nous négligeons ici les excentricités, ce qui donne $r=a$, $\partial r = 0$, $r.\partial(\delta r) = \partial(r\delta r)$ et

$$\frac{\delta r}{r^2} = \frac{r\,\delta r}{a^3 + 3\,\text{M}\,a^2\,\delta a} = \frac{r\,\delta r}{a^3}\left(1 - 3\text{M}\,\frac{\delta a}{a}\right).$$

Cela posé, les équations du §. 167. donneront, en faisant $n^2 a^3 = 1$,

$$\text{IV.}\quad 0 = \text{M}\,\frac{\partial\partial(r\,\delta r)}{\partial t^2} + \text{M}\,\frac{r\,\delta r}{a^3}\left(1 - 3\text{M}\,\frac{\delta a}{a}\right) + r\left(\frac{\partial \text{R}}{\partial r}\right) + 2\int(\partial \text{R}),$$

$$\text{VI.}\quad \text{M}\delta v = 2\text{M}\,\frac{\partial(r\,\delta r)}{n\,a^2\,\partial t} + 2na\int r\left(\frac{\partial \text{R}}{\partial r}\right)\partial t + 3na\int\partial t\int(\partial \text{R}).$$

On a (§. 168. 169. 170.)

$$\text{R} = \text{M}.\text{S} = \text{M}.\text{B} = \tfrac{1}{2}\text{M}.\text{A}^{(0)} + \text{M}.\text{A}^{(i)}\cos iw,$$

où, à cause de $r = a + \text{M}\,\frac{r\,\delta r}{a} = a + \Delta a$, on doit faire

$$\text{R} = \text{M}.\text{S} + \Delta a\left(\frac{\partial \text{R}}{\partial a}\right) = \text{M}.\text{S} + \text{M}\,\frac{r\,\delta r}{a}.\frac{\text{M}\,\partial \text{B}}{\partial a}.$$

Comme il ne s'agit ici que de la partie constante du facteur de $r\delta r$, on aura $\left(\frac{\partial \text{B}}{\partial a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \text{A}^{(0)}}{\partial a}\right)$; d'où il vient

---

(1) *Mécan. cél. T. IV. pag.* 89 — 93.

(2) *Ibid. pag.* 8 — 18.

$R = M.S + \frac{M^2}{2} \cdot \frac{r\delta r}{a}\left(\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\right)$, $(\partial R) = \frac{M^2}{2} \cdot \frac{\partial(r\delta r)}{a}\left(\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\right)$, $f(\partial R) = \frac{M^2}{2} \cdot \frac{r\delta r}{a}\left(\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\right)$.

On a de plus

$$r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = M.a\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right) + \Delta a\left(\frac{\partial . Ma\frac{\partial S}{\partial a}}{\partial a}\right) = Ma\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right) + M^2\frac{r\delta r}{a}\left(\frac{\partial S}{\partial a} + a\frac{\partial\partial S}{\partial a^2}\right) =$$
$$\frac{M}{2}a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{M^2}{2} \cdot \frac{r\delta r}{a}\left(\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + a\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right).$$

Ainsi les fonctions $f(\partial R)$ et $r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$ (§. 182.) deviendront

$$(A) \ldots\ldots f(\partial R) = M.C + \frac{M.n}{2(n-n')}A^{(i)}\cos iw + M^2\frac{r\delta r}{2a}\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a},$$

$$(B) \ldots\ldots r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{M}{2}a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{M}{2}a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\cos iw + \frac{M^2}{2} \cdot \frac{r\delta r}{a}\left(\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + a\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right).$$

Si on fait pour abréger

$$(C) \ldots\ldots 1 - 3M\frac{\delta a}{a} + \tfrac{3}{2}Ma^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \tfrac{1}{2}M.a^3\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2} = \lambda^2,$$

et qu'on multiplie l'équation IV par $n^2a^3 = 1$, on aura

$$\text{IV}.\ 0 = M\frac{\partial\partial(r\delta r)}{\partial t^2} + M.n^2\lambda^2.r\delta r + \tfrac{1}{2}M.n^2a^4\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + 2M.C + M.n^2a^2\left(\frac{naA^{(i)}}{n-n'} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\cos iw.$$

§. 264. L'intégrale de l'équation IV. doit avoir la forme, $r\delta r = P + Q\cos iw$, ∂w étant $= (n'-n)\,\partial t$, d'où l'on tire

$$\frac{\partial(r\delta r)}{\partial t} = Qi(n-n')\sin iw, \quad \frac{\partial\partial(r\delta r)}{\partial t^2} = -Qi^2(n-n')^2\cos iw.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation IV, on trouvera

$$P = -\frac{a^4}{2\lambda^2}\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} - \frac{2C}{\lambda^2 n^2}.\quad Q = \frac{n^2a^2}{i^2(n-n')^2 - \lambda^2n^2}\left(\frac{nA^{(i)}}{n-n'} + \frac{a}{2}\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right),\ r\delta r = P + Q\cos iw.$$

Si l'on fait $r = a$, et par conséquent $\lambda = 1$, la partie constante de $r\delta r$ sera donnée par l'équation $a\delta a = P$, ou

$$D \ldots\ldots M\frac{\delta a}{a} = -2M.C.a - \frac{M}{2}a^2\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}.$$

Les valeurs précédentes donnent

$$\int r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)\partial t = \frac{M}{2}at\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} - \frac{Ma}{2i(n-n')}\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\sin iw,$$

$$\int\partial t\int(\partial R) = M.C.t - \frac{MnA^{(i)}}{2i(n-n')^2}\sin iw, \quad \frac{\partial(r\delta r)}{\partial t} = Qi(n-n')\sin iw.$$

Si on substitue cela dans l'équation VI (§. 263.), il viendra

$$\delta v = nat\left(3C + a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}\right) + \frac{n^2 a \sin i w}{i(n-n')(i^2(n-n')^2-\lambda^2 n^2)}\left\{\frac{i^2(n-n')^2+3\lambda^2 n^2}{2(n-n')}A^{(i)} + \lambda^2 n a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right\}.$$

Le terme non-périodique peut être réuni au moyen mouvement, d'où il suit

$$aC = -\frac{a^2}{3}\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a};$$

ce qui étant substitué dans les équations (C) et (D), donnera

$$(D) \ldots\ldots M\frac{\delta a}{a} = \frac{M}{6}a\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a}, \quad (C) \ldots\ldots \lambda^2 = 1 + M.a^2\left\{\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{a}{2}\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right\}.$$

A cause de l'aplatissement de Jupiter, il faut diminuer λ de $\frac{0{,}0217794}{a^2}$, d'où il vient

$$(E) \ldots\ldots \lambda^2 = 1 - \frac{0{,}0217794}{a^2} + M.a^2\left\{\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{a}{2}\frac{\partial\partial A^{(0)}}{\partial a^2}\right\}.$$

Ainsi on aura, en n'étendant i qu'aux nombres positifs,

$$\text{IV. } M\frac{r\delta r}{a^2} = \frac{Ma^2}{6\lambda^2}\frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{Mna^2}{i^2(n-n')^2-\lambda^2 n^2}\left\{\frac{2nA^{(i)}}{n-n'} + a\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right\}\cos iw;$$

$$\text{VI. } M\delta v \frac{Mn^2 a}{i(n-n')(i^2(n-n')^2-\lambda^2 n^2)}\left\{\frac{i^2(n-n')^2+3\lambda^2 n^2}{n-n'}A^{(i)} + 2\lambda^2 na\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right\}\sin iw.$$

Ces inégalités deviennent considérables par la petitesse du diviseur $i^2(n-n')^2-\lambda^2 n^2$, ou d'un de ses facteur,

$$i(n-n')-\lambda n = \mu \text{ et } i(n-n')+\lambda n = \nu.$$

Comme on a à fort peu près $n' = 2n''$, $n'' = 2n'''$, et $\lambda = 1$, il est aisé de voir que, si on fait pour l'action du II satellite sur le I, $i = 2$, μ sera à peu près $n' - 2n''$, et $\nu = 2n'$. Relativement à l'action du I et du III sur le II, on a $\mu = i(n''-n')-\lambda''n''$, $\nu = i(n''-n')+\lambda''n''$, et $\mu = i(n''-n''')-\lambda''n''$, $\nu = i(n''-n''')+\lambda''n''$: en faisant donc dans le premier cas $i = 1$, et dans le second $i = 2$, on aura à peu près $\mu = -n'$, $\nu = 2n''-n'$, et $\mu = n''-2n'''$, $\nu = 2n''$. Enfin si l'on fait, pour l'action du II sur le III, $i = 1$, on aura à peu près, $\mu = -n''$, $\nu = 2n'''-n''$. Désignons par $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $'B^{(i)}$, $C^{(i)}$, les valeurs des fonctions $A^{(i)}$, relatives aux perturbations du I satellite par l'action du II, à celles du II par l'action du I et du III, et à celles du III par l'action du II. Cela posé, en n'ayant égard qu'aux termes dont l'un des diviseurs, μ ou ν, est presque nul, et faisant dans les autres facteurs $n' = 2n''$, $n'' = 2n'''$, $\lambda = 1$, les équations IV. VI. donneront,

1. pour les inégalités du I satellite, dues à l'action du II,

$$\frac{m''r'\delta r'}{(a')^2} = \frac{m''n'a'\cos 2(\mathrm{II}-\mathrm{I})}{2(n'-n'')-\lambda'n'}\left\{2\,\mathrm{A}^{(2)} + \frac{a'}{2}\,\frac{\partial \mathrm{A}^{(2)}}{\partial a}\right\},$$

$$m''\delta v' = \frac{m''n'a'\sin 2(\mathrm{II}-\mathrm{I})}{2(n'-n'')-\lambda'n'}\left\{4\,\mathrm{A}^{(2)} + a'\,\frac{\partial \mathrm{A}^{(2)}}{\partial a}\right\};$$

2. pour les inégalités du II, dues à l'action du I et du III,

$$\frac{m'r''\delta r''}{(a'')^2} = \frac{m'n''a''\cos(\mathrm{I}-\mathrm{II})}{n''-n'+\lambda''n''}\left\{\mathrm{B}^{(1)} - \frac{a''}{2}\,\frac{\partial \mathrm{B}^{(1)}}{\partial a''}\right\},$$

$$m'\delta v' = -\frac{m'n''a''\sin(\mathrm{I}-\mathrm{II})}{n''-n'+\lambda''n''}\left\{2\,\mathrm{B}^{(1)} - a''\,\frac{\partial \mathrm{B}^{(1)}}{\partial a''}\right\};$$

$$\frac{m'''r''\delta r''}{(a'')^2} = \frac{m'''n''a''\cos 2(\mathrm{III}-\mathrm{II})}{2(n''-n''')-\lambda''n''}\left\{2\,{}^{1}\mathrm{B}^{(2)} + \frac{a''}{2}\,\frac{\partial\,{}^{1}\mathrm{B}^{(2)}}{\partial a''}\right\},$$

$$m'''\delta v'' = \frac{m'''n''a''\sin 2(\mathrm{III}-\mathrm{II})}{2(n''-n''')-\lambda''n''}\left\{4\,{}^{1}\mathrm{B}^{(2)} + a'\,\frac{\partial\,{}^{1}\mathrm{B}^{(2)}}{\partial a''}\right\};$$

3. pour les inégalités du III. dues à l'action du II,

$$\frac{m''r'''\delta r'''}{(a''')^2} = \frac{m''n'''a'''\cos(\mathrm{II}-\mathrm{III})}{2(n'''-n''+\lambda'''n''')}\left\{2\,\mathrm{C}^{(1)} - a'''\,\frac{\partial \mathrm{C}^{(1)}}{\partial a'''}\right\},$$

$$m'''\delta v'' = -\frac{m''n'''a'''\sin(\mathrm{II}-\mathrm{III})}{n'''-n''+\lambda'''n'''}\left\{2\,\mathrm{C}^{(1)} - a'''\,\frac{\partial \mathrm{C}^{(1)}}{\partial a'''}\right\}.$$

Si on fait pour abréger,

$$4a'\,\mathrm{A}^{(2)} + (a')^2\,\frac{\partial \mathrm{A}^{(2)}}{\partial a'} = \mathrm{F},\quad 2a''\,\mathrm{B}^{(1)} - (a'')^2\,\frac{\partial \mathrm{B}^{(1)}}{\partial a'} = \mathrm{G},$$

$$4a''\,{}^{1}\mathrm{B}^{(2)} + (a'')^2\,\frac{\partial\,{}^{1}\mathrm{B}^{(2)}}{\partial a''} = \mathrm{F}',\quad 2a'''\,\mathrm{C}^{(1)} - (a''')^2\,\frac{\partial \mathrm{C}^{(1)}}{\partial a'''} = \mathrm{G}',$$

les équations précédentes deviendront

$$(\mathrm{F})\ldots\ldots \frac{m''r'\delta r'}{(a')^2} = \frac{m''n'\mathrm{F}\cos 2(\mathrm{I}-\mathrm{II})}{2(2n'-2n''-\lambda'n')},\quad m''\delta v' = -\frac{m''n'\mathrm{F}\sin 2(\mathrm{I}-\mathrm{II})}{2n'-2n''-\lambda'n'};$$

$$(\mathrm{G})\ldots\ldots \frac{m'r''\delta r''}{(a'')^2} = -\frac{m'n''\mathrm{G}\cos(\mathrm{I}-\mathrm{II})}{2(n'-n''-\lambda''n'')},\quad m'\delta v'' = \frac{m'n''\mathrm{G}\sin(\mathrm{I}-\mathrm{II})}{n'-n''-\lambda''n''};$$

$$(\mathrm{F}')\ldots\ldots \frac{m'''r''\delta r''}{(a'')^2} = \frac{m'''n''\mathrm{F}'\cos 2(\mathrm{II}-\mathrm{III})}{2(2n''-2n'''-\lambda''n'')},\quad m'''\delta v'' = -\frac{m'''n''\mathrm{F}'\sin 2(\mathrm{II}-\mathrm{III})}{2n''-2n'''-\lambda''n''};$$

$$(\mathrm{G}')\ldots\ldots \frac{m''r'''\delta r'''}{(a''')^2} = -\frac{m''n'''\mathrm{G}'\cos(\mathrm{II}-\mathrm{III})}{2(n''-n'''-\lambda'''n''')},\quad m''\delta v''' = \frac{m''n'''\mathrm{G}'\sin(\mathrm{II}-\mathrm{III})}{n''-n'''-\lambda'''n'''}.$$

Les rapports remarquables qui existent entre les moyens mouvemens et les époques de ces trois satellites, donnent le moyen de simplifier les équations précédentes. On a vu (§. 471 — 474.) que $\mathrm{A}^{(i)} = -\frac{b^{(i)}}{a''}$, $\frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a'} = -\frac{1}{a''^2}\,\frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha}$, $b^{(i)}$ étant fonction de $\alpha = \frac{a'}{a''}$. Il s'en suit que $a''\,\mathrm{A}^{(i)}$ et $(a'')^2\,\frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a'}$, ainsi

que F et G, sont des fonctions de $\frac{a'}{a''}$, et l'on verra aisément, que F' et G' sont les mêmes fonctions de $\frac{a''}{a'''}$, que F et G le sont de $\frac{a'}{a''}$. Or on a à très-peu près, $\frac{a''}{a'''} = \frac{a'}{a''}$, parceque $\frac{a'}{a''} : \frac{a''}{a'''} :: \left(\frac{n''}{n'}\right)^{\frac{2}{3}} : \left(\frac{n'''}{n''}\right)^{\frac{2}{3}} :: \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} : \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, d'où il suit $F' = F$ et $G' = G$. On a vu de plus (II. §. 325.), que $I - 3II + 2III = 180°$, d'où il vient

$$2(II - III) = (I - II) - 180°, \text{ et } \frac{\sin}{\cos} 2(II - III) = -\frac{\sin}{\cos}(I - II).$$

Si l'on fait $n' = 2n''$, $n'' = 2n'''$, ou $n' - n'' = 2(n'' - n''')$, on pourra réunir les inégalités (G) (F') en une seule; et en faisant pour abréger,

$$\frac{m''n'F}{2(n'-n'')-\lambda'n'} = [1], \quad \frac{n''(m'G + m'''F)}{n'-n''-\lambda''n''} = [2], \quad \frac{m''n'''G}{n''-n'''-\lambda'''n'''} = [3],$$

les équations précédentes prendront cette forme:

$$(H) \ldots\ldots \frac{m''r'\delta r'}{(a')^2} = \frac{[1]}{2}\cos 2(I - II), \quad m''\delta v' = -[1]\sin 2(I - II);$$

$$(J) \ldots\ldots \frac{Mr''\delta r''}{(a'')^2} = -\frac{[2]}{2}\cos(I - II), \quad M\delta v'' = [2]\sin(I - II);$$

$$(K) \ldots\ldots \frac{m''r'''\delta r'''}{(a''')^2} = -\frac{[3]}{2}\cos(II - III), \quad m''\delta v''' = [3]\sin(II - III).$$

§. 265. Si l'on compte les longitudes I, II, III, v', v'', v''', de la conjonction supérieure, en les rapportant à la ligne mobile qui joint le soleil et le lieu moyen de Jupiter, n', n'', n''', seront les moyens mouvemens synodiques pour une seconde. Supposons qu'à l'origine du tems t, les deux premiers satellites aient été en conjonction, ou $I = 0$, $II = 0$, et par conséquent $III = \frac{180° - I + 3II}{2} = 90°$. Cela posé on aura pour un tems quelconque,

$$I = n't, \quad II = n''t, \quad III = 90° + n'''t,$$

et les équations (H) (J) (K) deviendront

$$m''\delta v' = -[1]\sin 2(n't - n''t), \quad M\delta v'' = [2]\sin(n't - n''t), \quad m''\delta v''' = -[3]\cos(n''t - n'''t).$$

Si on fait $n' - 2n'' = n'' - 2n''' = \omega$, on donnera à ces équations la forme:

$$m''\delta v' = -[1]\sin(n' + \omega)t, \quad M\delta v'' = [2]\sin(n'' + \omega)t, \quad m''\delta v''' = -[3]\cos(n''' + \omega)t.$$

Mais dans les éclipses, I, II, III, sont nulles, c'est-à-dire $n't = 0$, $n''t = 0$, $n'''t = -90°$, d'où l'on conclura pour les éclipses,

$$m''\delta v' = -[1]\sin\omega t, \quad M\delta v'' = [2]\sin\omega t, \quad m''\delta v''' = -[3]\sin\omega t;$$

ainsi les inégalités des trois satellites, dans les éclipses, ont le même argument ωt, et par conséquent la même période. Pour la trouver, nous observerons que n' et ω sont le mouvement synodique du I satellite, et le mouvement de l'argument ωt, pour une seconde. En nommant donc T', T'', la durée d'une révolution synodique du I et du II satellite, et P la période de l'argument ωt, on aura

$$\omega : n' :: T' : P, \text{ donc } P = \frac{n'.T'}{n' - 2n''} = \frac{T'}{1 - \frac{2T'}{T''}}.$$

Nous avons vu (II. §. 310.), que

$$T' = 1{,}7698605 \text{ jours}, \quad T'' = 3{,}5540941 \text{ jours};$$

d'où il viendra

$$\frac{2T'}{T''} = 0{,}995955903; \quad \frac{1}{1 - \frac{2T'}{T''}} = 247{,}274; \text{ et } P = 437{,}641 \text{ jours.}$$

Cette période des inégalités les plus considérables des satellites est conforme aux observations, qui avaient fait reconnaître ces inégalités (II. §. 317.).

§. 266. Les équations du §. 264. ne diffèrent de celles du §. 262. que par le diviseur qui est $(2 - \lambda')\,n' - 2n''$ au lieu de $n' - 2n''$ pour le I satellite, $n' - (1 + \lambda'')\,n''$ au lieu de $n' - 2n''$ pour le II, et $n'' - (1 + \lambda''')\,n'''$ au lieu de $n'' - 2n'''$ pour le III. Ainsi, pour corriger les équations du §. 262, il suffira de multiplier le terme de $\delta v'$, qui a l'argument 2 (I — II), par $\frac{n' - 2n''}{(2 - \lambda')\,n' - 2n''} = \frac{1}{1 + \frac{(1 - \lambda')\,n'}{n' - 2n''}} = \nu'$, les termes de $\delta v''$, qui ont les argumens I — II et 2 (II — III), par $\frac{1}{1 + \frac{(1 - \lambda'')\,n''}{n' - 2n''}} = \nu''$, et le terme de $\delta v'''$, qui a l'argument II — III, par $\frac{1}{1 + \frac{(1 - \lambda''')\,n'''}{n'' - 2n'''}}$. Si l'on fait pour abréger, $0{,}0217794 = c$, l'équation (F) (§. 264) donnera

$$\lambda'^2 = 1 - \frac{c}{(a')^2} - m''\alpha^2\left(\frac{\partial b^{(0)}}{\partial\alpha} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial\partial b^{(0)}}{\partial\alpha^2}\right), \quad \lambda''^2 = 1 - \frac{c}{(a'')^2} - m'\alpha\left(\frac{\partial b^{(0)}}{\partial\alpha} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial\partial b^{(0)}}{\partial\alpha^2}\right)$$
$$- m'''\beta^2\left(\frac{\partial d^{(0)}}{\partial\beta} + \frac{\beta}{2}\frac{\partial\partial d^{(0)}}{\partial\beta^2}\right), \quad \lambda'''^2 = 1 - \frac{c}{(a''')^2} - m''\beta\left(\frac{\partial d^{(0)}}{\partial\beta} + \frac{\beta}{2}\frac{\partial\partial d^{(0)}}{\partial\beta^2}\right),$$

et si l'on substitue les valeurs de α, β, $b^{(0)}$, etc. (§. 260.), et $\frac{\partial b^{(0)}}{\partial \alpha} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial\partial b^{(0)}}{\partial \alpha^2} = \frac{2\alpha b^{(0)} - (1+\alpha^2) b^{(1)}}{2(1-\alpha^2)^2}$ (§. 173.),

$$\lambda'^2 = 0{,}9993\;93 - m''.0{,}964511,\ \lambda''^2 = 0{,}9997\,3505 - m'.1{,}53458 - m''.0{,}951193,$$

$$\lambda'''^2 = 0{,}999\,95\,65 - m''.1{,}517202,$$

et par l'extraction des racines,

$$\lambda' = 0{,}9996646 - m''.0{,}482412;\ \lambda'' = 0{,}999\,6752 - m'.0{,}767\,9 - m''.0{,}47566;$$

$$\lambda''' = 0{,}999\,479\,1 - m''.0{,}7\;806.$$

Les valeurs précédentes des masses (§. 261.) donnent

$$\lambda' = 0{,}9\;96\,;\ \lambda'' = 0{,}999\;1;\ \lambda''' = 0{,}9\;99\,;$$

ou suivant M. de Laplace qui a eu égard à l'action du soleil ([1]),

$$\lambda' = 0{,}9993\,07;\ \lambda'' = 0{,}99965\;5;\ \lambda''' = 0{,}999\,567;\ \lambda^{IV} = 0{,}9999\,7.$$

Au moyen de ces corrections on trouvera les inégalités, indépendantes des excentricités ([2]),

$$\delta v' = -m''.6\,7\,127''\sin(\text{I}-\text{II}) + m''.7\;4\,62\,6''\sin 2(\text{I}-\text{II}) + m''.229494''\sin 3(\text{I}-\text{II})$$
$$+ m''.52464''\sin 4(\text{I}-\text{II}) - m'''.7\,64''\sin(\text{I}-\text{III}) + m''.60004''\sin 2(\text{I}-\text{III});$$

$$\delta v'' = -m.2252275o''\sin(\text{I}-\text{II}) - m.1705\;6''\sin 2(\text{I}-\text{II}) - m.04\;02''\sin 3(\text{I}-\text{II})$$
$$-m'''.597\,36''\sin(\text{II}-\text{III}) + m'''.392\,3136''\sin 2(\text{II}-\text{III}) + m'''.223180''\sin 3(\text{II}-\text{III});$$

$$\delta v''' = m'.7\,618''\sin(\text{I}-\text{III}) - m''.1126\,9585''\sin(\text{II}-\text{III})$$
$$- m''.16\,045''\sin 2(\text{II}-\text{III}) - m''.33\,71''\sin 3(\text{II}-\text{III})$$
$$-m^{IV}.34\,963''\sin(\text{III}-\text{IV}) + m^{IV}.1173\,4''\sin 2(\text{III}-\text{IV}) + m^{IV}.8\,508''\sin 3(\text{III}-\text{IV});$$

$$\delta v^{IV} = m'.46\;6''\sin(\text{I}-\text{IV}) + m''\;7\;74\,''\sin(\text{II}-\text{IV})$$
$$- m'''.1\,4817''\sin(\text{III}-\text{IV}) - m'''.51\;1\;\sin 2(\text{III}-\text{IV}).$$

§. 267. Les observations des éclipses des satellites étant la base de leur théorie, on pourra vérifier les équations précédentes par l'observation, en cherchant le tems duquel les éclipses arriveront, en vertu de ces équations, plus ou moins tard que suivant le mouvement moyen. Pour cela il faudra les convertir en tems, ce qui se fera au moyen de cette proportion: 360° ou 1296000″ sont au nombre des secondes d'une de ces inégalités, comme une révolution synodique du satellite est au tems duquel les éclipses

(1) *Mécan. cél. T. IV. pag. 09.*

(2) *Ibid. pag. 89 — 93.*

de ce satellite sont avancées ou retardées, selon que l'inégalité est positive ou négative. Dans le dernier cas on doit ajouter l'équation à l'époque moyenne ou calculée de l'éclipse; dans le premier cas il faut l'en ôter: ainsi toutes les équations changeront de signe. Les révolutions synodiques des quatre satellites sont (II. § 310.)

$$2548,6 \text{ minutes},\ 5117,9 \text{ min. } 10319,6 \text{ min. } 24125,1 \text{ min.}$$

En multipliant donc les inégalités du I satellite par $\frac{2548,6}{1296000}$, celles du II par $\frac{5117,9}{1296000}$, celles du III par $\frac{10319,6}{1296000}$, et celles du IV par $\frac{24125,1}{1296000}$, et changeant les signes, on aura le nombre des minutes qu'il faudra ajouter au tems des éclipses.

Le théorème des époques, $\text{I} - 3.\text{II} + 2.\text{III} = 180^\circ$, donne
$\text{I}-\text{III} = \frac{3}{2}(\text{I}-\text{II}) - 90^\circ$, $\text{I}-\text{II} = 180^\circ + 2(\text{II}-\text{III})$, $\text{I}-\text{III} = 180^\circ + 3(\text{II}-\text{III})$.
Au moyen de ces équations on pourra donner à toutes les inégalités $\delta v'$ l'argument I — II, à $\delta v''$ l'argument II — III, et à $\delta v'''$ les argumens II — III et III — IV. Ainsi on trouvera par ce qui précède,

$$\delta v' = m''.1194' \sin(\text{I}-\text{II}) - m^{\text{IV}}.140' \cos \tfrac{3}{2}(\text{I}-\text{II}) - m''.1?494' \sin 2(\text{I}-\text{II})$$
$$-(m'.4?1 - m'''.118') \sin 3(\text{I}-\text{II}) - m''.103'. \sin 4(\text{I}-\text{II}),$$
$$\delta v'' = m'''.2?6' \sin(\text{II}-\text{III}) - (m'.88941' + m'''.154932') \sin 2(\text{II}-\text{III})$$
$$- m'''.881' \sin 3(\text{II}-\text{III}) + m'.67?' \sin 4(\text{II}-\text{III}) - m'.135' \sin 6(\text{II}-\text{III}),$$
$$\delta v''' = m'.897?6 \sin(\text{II}-\text{III}) + m''.13?4' \sin 2(\text{II}-\text{III}) + (m'.6?6' + m''.263') \sin 3(\text{II}-\text{III})$$
$$+ m^{\text{IV}}.2?39' \sin(\text{III}-\text{IV}) - m^{\text{IV}}.?342' \sin 2(\text{III}-\text{IV}) - m^{\text{IV}}.6?7' \sin 3(\text{III}-\text{IV}),$$
$$\delta v^{\text{IV}} = -m'.859' \sin(\text{I}-\text{IV}) - m''.1?54' \sin(\text{II}-\text{IV})$$
$$+ m'''.2137 \sin(\text{III}-\text{IV}) + m'''.962' \sin 2(\text{III}-\text{IV}).$$

§. 268. Les termes principaux de $\delta v''$ sont $-\text{M}. \sin 2(\text{II}-\text{III})$, M étant $= m'.88941' + m'''.154932'$ en tems, ou en secondes d'un degré (§. 266)

$$\text{M} = m'.2252470'' + m'''.392331,6''.$$

Cette inégalité est si considérable, que la variation de l'argument II — III, qui en résulte, produira une nouvelle équation sensible. Pour la déterminer, concevons qu'elle se rapporte à l'ellipse variable du satellite troublé, ou aux variations de son excentricité γ et de son périjove ϖ. En désignant par (v'') la partie elliptique de v'', et faisant pour abréger,

$$\gamma \sin \varpi = h,\ \gamma \cos \varpi = l,$$

on aura

$$(v'') = 2\gamma \sin(\mathrm{II} - \varpi) + \tfrac{5}{4}\gamma^2 \sin 2(\mathrm{II} - \varpi) + \text{ cet.}$$

Cela posé, le premier terme, $(v'') = 2l \sin \mathrm{II} - 2h \cos \mathrm{II}$, aura pour variation

$$(a) \ldots\ldots \delta(v'') = 2\delta l \sin \mathrm{II} - 2\delta h \cos \mathrm{II},$$

dont la comparaison avec $\delta v'' = - \mathrm{M} \sin 2(\mathrm{II} - \mathrm{III})$ servira à déterminer les variations δh, δl. Pour cela on doit donner à $\delta v''$ l'argument de $\delta(v'')$, savoir II. En mettant $\mathrm{II} + (\mathrm{II} - 2\mathrm{III})$ au lieu de $2(\mathrm{II} - \mathrm{III})$, et faisant $\mathrm{II} - 2\mathrm{III} = \Phi$, on aura

$$(b) \ldots\ldots \delta v'' = - \mathrm{M} \cos\Phi \sin \mathrm{II} - \mathrm{M} \sin\Phi \cos 2\mathrm{II};$$

ce qui étant comparé avec l'équation (a), donnera

$$(c) \ldots\ldots \delta h = \frac{\mathrm{M}}{2} \sin\Phi, \quad \delta l = - \frac{\mathrm{M}}{2} \cos\Phi.$$

Le second terme de (v''), $\frac{5}{4}\gamma^2 \sin 2(\mathrm{II} - \varpi) = \frac{5}{4}(l^2 - h^2) \sin 2.\mathrm{II} - \frac{5}{2} h l \cos 2.\mathrm{II}$, donnera, si on substitue $h + \delta h$ pour h, et $l + \delta l$ pour l, les termes suivans:

$$\delta(\delta v'') = \tfrac{5}{4}\{(\delta l^2 - \delta h^2) \sin 2\mathrm{II} - 2\delta h . \delta l \cos 2\mathrm{II}\},$$

ce qui est la nouvelle inégalité, proportionnelle au carré de la masse perturbatrice, que nous cherchons. Au moyen des valeurs (c) elle se transformera en
$\delta(\delta v'') = \frac{5}{16}\mathrm{M}^2\{\cos 2\Phi \sin 2\mathrm{II} + \sin 2\Phi \cos 2\mathrm{II}\} = \frac{5}{16}\mathrm{M}^2 \sin 2(\Phi + \mathrm{II}) = \frac{5}{16}\mathrm{M}^2 \sin 4(\mathrm{II} - \mathrm{III})$.
Les inégalités du même genre, relatives aux autres satellites, sont insensibles.

§. 269. On ne peut déterminer les masses des corps célestes que par l'effet qu'elles produisent. Celles des satellites devront donc être déterminées par leurs actions mutuelles, c'est-à-dire, les inégalités qui résultent de leurs attractions, et qui sont données par les formules précédentes en fonctions des masses. Si l'on compare ces formules avec les inégalités que les observations ont fait connaître, on pourra déterminer m^{I}, m^{II}, m^{III}, m^{IV}. Il suffit donc d'avoir quatre données de l'observation, au moyen desquelles on pourra éliminer trois des inconnues, ce qui donnera l'une après l'autre. Mais on trouvera un résultat plus exact, en déterminant chaque masse par l'effet principal qu'elle produit: on choisira parmi les inégalités de chaque satellite, celle qui l'emporte beaucoup sur les autres; on comparera son coefficient avec le *maximum* de la même inégalité, donné par les observations, et l'on trouvera immédiatement la masse dont elle dépend. En substituant les valeurs ainsi trouvées,

dans les termes qu'on avait négligés dans la première opération, et qui dépendent des autres masses, on trouvera des valeurs plus exactes. Mais pour avoir le *maximum* de chaque inégalité avec la précision nécessaire, il faut calculer un grand nombre d'éclipses; et c'est au zèle infatigable de M. Delambre, et à la sagacité avec laquelle ce grand astronome a calculé plusieurs milliers d'éclipses, que les astronomes doivent les résultats que nous allons exposer.

Les inégalités du I satellite, $\delta v'$, renferment un terme, $-m''.138494 \sin 2(\mathrm{I}-\mathrm{II})$ qui, étant cent fois plus grand que tout le reste, servira à déterminer la masse m'' du II satellite. D'après les recherches de M. Delambre cette inégalité est $= -3',21798 \sin 2(\mathrm{I}-\mathrm{II})$; d'où il suit $m'' = \frac{3,21798}{138494} = 0,0000232355$.

L'inégalité principale du II satellite est

$$\delta v'' = -(m'.88942' + m'''.154932') \sin 2(\mathrm{II}-\mathrm{III}),$$

et le *maximum* de la même inégalité est suivant M. Delambre $= -15,2522$; ce qui donne l'équation, $m'.88942 + m'''.154932 = 15,2522$: il faut donc une troisième donnée, pour déterminer les masses m', m'''.

Comme les inégalités des satellites dépendent en partie de l'aplatissement de Jupiter, et qu'il est à présumer que cet aplatissement sera donné par les observations des éclipses avec plus de précision, que par la mesure des diamètres de Jupiter, il y a cinq inconnues, et M. de Laplace a pris pour les trois données de l'observation, qui sont encore nécessaires pour déterminer ces cinq inconnues, les mouvemens des apsides du III et du IV satellites, et le mouvement des noeuds du II. C'est de ces cinq données que les recherches de M. Delambre ont fournies, que M. de Laplace a conclu

$m^{\mathrm{I}} = 0,0000173281$; $m^{\mathrm{II}} = 0,0000232355$; $m^{\mathrm{III}} = 0,0000884972$; $m^{\mathrm{IV}} = 0,0000426591$;

et le rapport des deux axes de Jupiter, $= 0,9286992$ ou $\frac{13}{14}$, ce qui est conforme aux observations (II. §. 167.).

§. 270. Si on substitue ces valeurs des masses dans les formules précédentes, on trouvera d'abord

$$M = 39.'',2764 + 3472',0224 = 0,018725;$$
$$M^2 = 0,00035064 = 72'',.2\ 4;$$

ce qui étant multiplié par $\frac{5117,9}{1296000}$, donnera en tems,

$M^2 = 0',285597$; donc $\frac{5}{16} M^2 = 5'',355$; et $\delta(\delta v'') = -5'',355 \sin 4(\mathrm{II} - \mathrm{III})$.

En réunissant les inégalités précédentes (§. 267.) à celles que M. de Laplace a conclues de l'action du soleil, et des excentricités du III et du IV satellites, dont le mouvement des autres satellites participe, quoique leurs propres excentricités soient insensibles, on trouvera

$$\delta v' = 1'',665 \sin(\mathrm{I}-\mathrm{II}) - 0'',742 \cos 3(\mathrm{I}-\mathrm{II}) - 193'',079 \sin 2(\mathrm{I}-\mathrm{II}) - 0'',44 \sin 4(\mathrm{I}-\mathrm{II})$$
$$- 1'',556 \sin(\mathrm{I}-\varpi) - 0'',731 \sin(\mathrm{I}-\varpi') + 6'',82 \sin(\mathrm{I}-2\mathrm{II}+\varpi) + 2'',919 \sin(\mathrm{I}-2\mathrm{II}+\varpi'),$$

$$\delta v'' = 12'',530 \sin(\mathrm{II}-\mathrm{III}) - 915'',132 \sin 2(\mathrm{II}-\mathrm{III}) - 4'',68 \sin 3(\mathrm{II}-\mathrm{III}) - 5'',728 \sin 4(\mathrm{II}-\mathrm{III})$$
$$- 0'',358 \sin 5(\mathrm{II}-\mathrm{III}) - 0'',281 \sin 6(\mathrm{II}-\mathrm{III}) + 0'',405 \sin(\mathrm{II}-\mathrm{IV}) - 0'',355 \sin 2(\mathrm{II}-\mathrm{IV})$$
$$- 26'',247 \sin(\mathrm{II}-\varpi) - 12'',331 \sin(\mathrm{II}-\varpi') - 4'',468 \sin(\mathrm{I}-2\mathrm{II}+\varpi)$$
$$- 19'',574 \sin(\mathrm{I}-2\mathrm{II}+\varpi) + 8'',547 \sin \mathrm{V};$$

$$\delta v''' = 105'',105 \sin(\mathrm{II}-\mathrm{III}) + 1'',833 \sin 2(\mathrm{II}-\mathrm{III}) + 1'',019 \sin 3(\mathrm{II}-\mathrm{III}) + 7'' \sin(\mathrm{III}-\mathrm{IV})$$
$$- 23'',91 \sin 2(\mathrm{III}-\mathrm{IV}) - 1'',681 \sin 3(\mathrm{III}-\mathrm{IV}) - 263'',732 \sin(\mathrm{III}-\varpi) + 16'',156 \sin(\mathrm{III}-\varpi')$$
$$- 14'',733 \sin(\mathrm{II}-2\mathrm{III}+\varpi) - 6'',746 \sin(\mathrm{II}-2\mathrm{III}+\varpi') + 22'',82 \sin \mathrm{V};$$

$$\delta v^{\mathrm{IV}} = -0'',891 \sin(\mathrm{I}-\mathrm{IV}) - 1'',888 \sin(\mathrm{II}-\mathrm{IV}) + 11'',348 \sin(\mathrm{III}-\mathrm{IV}) + 5'',11 \sin 2(\mathrm{III}-\mathrm{IV})$$
$$+ 1'',068 \sin 3(\mathrm{III}-\mathrm{IV}) + 79'',77 \sin(\mathrm{IV}-\varpi) - 3325'',77 \sin(\mathrm{IV}-\varpi')$$
$$- 15'',249 \sin 2(\mathrm{IV}-\varpi') - 0'',11 \sin 3(\mathrm{IV}-\varpi') + 126'',581 \sin \mathrm{V};$$

ϖ et ϖ' étant les longitudes des périjoves du III et du IV satellites, V l'anomalie moyenne de Jupiter, comptée du périhélie, et les termes qui ont l'argument V, étant dûs à l'action du soleil.

Les inégalités précédentes serviront à calculer le tems du milieu des éclipses des satellites avec une précision plus que suffisante, pour se préparer à en observer les immersions ou les émersions, attendu qu'on connaît à peu près la durée de chaque éclipse. Le but de ces observations est la détermination de la longitude du lieu de l'observateur; et les astronomes sont convenus que cela ne peut se faire avec quelque précision qu'à l'aide d'observations correspondantes. Pour qu'une observation isolée pût remplir cet objet, par sa comparaison avec les tables, il faudrait connaître exactement l'instant de l'immersion et de l'émersion, ou ce qui revient au même, la durée de l'éclipse, qui dépend de la distance et de la latitude du satellite. Mais les meilleures tables que nous ayons, celles que M. Delambre

a calculées d'après la théorie de M. de Laplace et sur plusieurs milliers d'observations, sont encore bien loin de cette perfection, à laquelle, vraisemblablement, on n'atteindra jamais dans cette partie de l'astronomie ([1]). Nous avons donc pensé qu'il serait inutile de développer les inégalités du rayon vecteur et de la latitude.

---

(1) Voyés ce qu'en dit M. Delambre, avec une candeur qui ne fait pas moins d'honneur à ce grand astronome, que l'excellent ouvrage et le pénible travail qu'il venait d'achever, quand il fit cet aveu (*Tabl. Ecl. des Sat. de Jup. par M. Delambre, Paris* 1817. *Introd. pag. L. LVI.*).

CHAPITRE X.

Réflexions générales sur la stabilité du système solaire.

§. 271. Le nombre des planètes, leur grandeur et masse, la position d'une orbite relativement aux autres, leurs écarts plus ou moins grands du cercle, etc. tout cela ensemble compose l'organisation individuelle de notre système planétaire, par laquelle le domaine du soleil se distingue de celui de chaque autre étoile. Il faut avouer que l'état actuel de l'astronomie est tel, que les découvertes pratiques et théoriques qui ont été faites dans cette science, suffisent pour porter notre connaissance de cette organisation au plus haut degré de perfection, qui soit accessible aux habitans de la terre. Si, malgré cela, nous sommes encore bien loin d'une parfaite connaissance du système solaire, il faut l'attribuer à l'age trop récent des observations, à l'imperfection de nos organes et de nos instrumens, et au point de vue d'où nous observons. L'étendue des limites connues du système planétaire, qui a été agrandie au double par la découverte d'Uranus, et le petit nombre des comètes qu'on a observées, par rapport à la multitude de celles qui décrivent probablement leurs orbites inconnues autour du soleil; tout cela prouve, combien nous ignorons, non pas de l'univers, mais d'un seul chaînon de cette chaîne, du système solaire que nous habitons, et quel travail immense est reservé aux siècles à venir. Cependant le nombre des comètes observées suffit, pour nous donner une idée de la grandeur du système de ces corps; et les observations, réunies à la théorie de Kepler, ont dévoilé le détail du système planétaire avec une grande précision. Mais ce n'est que l'état actuel de ce système; et l'on sait que tous les élémens des orbites planétaires sont plus ou moins altérés par les perturbations mutuelles des planètes. L'astro-

nomé philosophe se proposera donc la question intéressante, si l'état actuel du système planétaire est stable; s'il changera indéfiniment, ou s'il ne fera que des oscillations entre des limites resserrées; ou en d'autres mots, si les lois physiques que l'Auteur de la nature lui a prescrites, sont telles, que la marche de la grande machine ne pourra jamais être dérangée, ou que cette machine se détruira elle-même, et finira par retomber dans le néant. Voilà des questions qui ne peuvent être indifférentes à quiconque a eu l'occasion d'admirer l'arrangement sage, et la beauté métaphysique de la nature en grand; et un système d'astronomie ne pourra être terminé plus convenablement, qu'en tirant du détail pénible du calcul de tous les mouvemens compliqués des corps célestes, des résultats généraux, également importans pour l'astronome et pour le philosophe, qui concernent la destinée de l'univers dans le cours éternel des tems. Ces résultats qui font l'objet du Chapitre présent, sont des suites immédiates du calcul des perturbations, qui a été développé jusqu'ici, ou plutôt des équations séculaires, les seules qui puissent produire des changemens perpétuels des orbites planétaires. Elles les produiraient même nécessairement, si c'étaient rigoureusement des équations séculaires. Ainsi cette recherche se réduit à décider la dernière question, ou à examiner avec soin la nature des équations séculaires.

§. 272. Suivant la notation dont nous nous sommes servis jusqu'à présent, γ, γ', γ'', etc. sont les excentricités des planètes m, m', m'', etc. θ, θ', etc. sont les tangentes de leurs inclinaisons sur l'écliptique, ϖ, ϖ', etc. J, J', etc. les longitudes de leurs périhélies et de leurs noeuds ascendans. Les quantités $h = \gamma \sin \varpi$, $l = \gamma \cos \varpi$, $h' = \gamma' \sin \varpi'$, etc. $p = \theta \sin J$, $q = \theta \cos J$, $p' = \theta' \sin J'$, etc. (§. 185. 187.), seraient donc constantes, si le mouvement des planètes autour du soleil n'était troublé par l'attraction des autres planètes. Mais comme cette attraction produit des variations des élémens γ, ϖ, etc. dont les premiers termes sont proportionnels au tems, on aura

$$h = (\gamma + t\delta\gamma) \sin (\varpi + t\delta\varpi) = \gamma \sin (\varpi + t\delta\varpi) + t\delta\gamma \sin \varpi, \text{ etc.}$$

en négligeant le carré des variations, et l'on pourra donner au dernier terme la forme $A.\sin at$. Il est donc à présumer, qu'en général les quantités h, l, h', etc. auront la forme.

$$h = \mathrm{A} \sin (\alpha + at) + \mathrm{B} \sin (\beta + bt) + \text{cet.}$$

$$l = \mathrm{A} \cos (\alpha + at) + \mathrm{B} \cos (\beta + bt) + \text{cet.} \quad h' = \mathrm{A}' \sin (\alpha + at) + \text{cet.}$$

et ainsi de suite. L'intégration des différentielles des équations séculaires, que nous avons trouvées précédemment, doivent vérifier ces formes. Pour exécuter cette intégration, nous suivrons la méthode de Lagrange, que ce grand géomètre a développée dans sa *Théorie des variations séculaires des élémens des Planètes* (¹).

Si l'on fait pour abréger,

$$(a) \ldots\ldots \frac{\mathrm{N}}{4} \left(\frac{a}{a'}\right)^2 m' c^{(1)} = (01), \quad \frac{\mathrm{N}}{4} \cdot \frac{a}{a'} m' \left\{ 2\left(1 + \frac{a^2}{a'^2}\right) c^{(1)} - \frac{3a}{a'} c^{(0)} \right\} = [01],$$

les formules XIV — XVII (§. 210.) donneront, pour l'action de la planète m' sur m, t étant le nombre d'années,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = [01] \frac{h'l - hl'}{\gamma}, \quad \frac{\partial \varpi}{\partial t} = (01) - [01] \frac{l'l + h'h}{\gamma^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = (01) \frac{q'p - p'q}{\theta}, \quad \frac{\partial J}{\partial t} = (01) \left\{ \frac{q'q + p'p}{\theta^2} - 1 \right\};$$

d'où l'on tirera

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \gamma \sin \varpi + \gamma \partial \varpi \cos \varpi}{\partial t} = \frac{h}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + l \frac{\partial \varpi}{\partial t} = (01)\, l - [01]\, l',$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = [01]\, h' - (01)\, h, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = (01)(q' - q), \quad \frac{\partial q}{\partial t} = (01)(p - p').$$

On aura des expressions analogues pour l'action des autres planètes m'', m''', etc. Cela posé, si l'on désigne par (rs), $[rs]$, et (sr), $[sr]$, ce que deviennent (01), $[01]$, lorsqu'on considère l'action de la planète m^s sur m^r et de m^r sur m^s, au lieu de l'action de m' sur m, et qu'on fasse pour abréger,

$$(b) \ldots\ldots (01) + (02) + (03) + \text{cet.} = (0), \quad (10) + (12) + (13) + \text{cet.} = (1),$$
$$(20) + (21) + (23) + \text{cet.} = (2), \text{ etc.}$$

on aura, pour l'action de toutes les planètes, les équations suivantes:

$$(\mathrm{A}) \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} = (0)l - [01]l' - [02]l'' - [03]l''' - \text{cet.} \quad \dfrac{\partial h'}{\partial t} = (1)l' - [10]l - [12]l'' - [13]l''', \\ \dfrac{\partial h''}{\partial t} = (2)l'' - [20]l - [21]l' - [23]l''', \quad \dfrac{\partial h'''}{\partial t} = (3)l''' - [30]l - [31]l' - [32]l''; \\ \dfrac{\partial l}{\partial t} = -(0)h + [01]h' + [02]h'' + [03]h''', \quad \dfrac{\partial l'}{\partial t} = -(1)h' + [10]h + [12]h'' + [13]h'''; \text{ etc.} \end{cases}$$

(1) *Nouv. Mém. de l'Acad. Roy. de Berlin, Année* 1781. 1782.

$$
(\mathrm{B})\ldots\ldots\begin{cases}
\dfrac{\partial p}{\partial t}=-(0)q+(01)q'+(02)q''+(03)q'''+\text{cet.}\ \dfrac{\partial p'}{\partial t}=-(1)q'+(10)q+(12)q''+(13)q''', \\[2mm]
\dfrac{\partial p''}{\partial t}=-(2)q''+(20)q+(21)q'+(23)q''',\ \dfrac{\partial p'''}{\partial t}=-(3)q'''+(30)q+(31)q'+(32)q''; \\[2mm]
\dfrac{\partial q}{\partial t}=(0)p-(01)p'-(02)p''-(03)p''';\ \dfrac{\partial q'}{\partial t}=(1)p'-(10)p-(12)p''-(13)p'''; \text{ etc.}
\end{cases}
$$

Nous n'avons développé ces équations que pour la combinaison de quatre planètes, m, m', m'', m''', qui agissent l'une sur l'autre, parcequ'il est aisé de voir la forme des termes suivans, si l'on veut considérer l'action de plus de quatre planètes.

§. 273. Il est visible que l'intégrale des équations (A) doit avoir cette forme,

$h=\mathrm{B}\sin(\beta+bt)$, $l=\mathrm{B}\cos(\beta+bt)$, $h'=\mathrm{B}'\sin(\beta+bt)$, $l'=\mathrm{B}'\cos(\beta+bt)$, etc.

Si on substitue ces valeurs, ainsi que leurs différentielles, dans les équations (A), en faisant

$$(c)\ldots\ldots b-(0)=x,\ b-(1)=x',\ b-(2)=x'',\ b-(3)=x''',$$

il viendra

$$
(\mathrm{C})\ldots\ldots\begin{cases}
0=\mathrm{B}x+[01]\mathrm{B}'+[02]\mathrm{B}''+[03]\mathrm{B}''',\ 0=\mathrm{B}'x'+[10]\mathrm{B}+[12]\mathrm{B}''+[13]\mathrm{B}''', \\
0=\mathrm{B}''x''+[20]\mathrm{B}+[21]\mathrm{B}'+[23]\mathrm{B}''',\ 0=\mathrm{B}'''x'''+[30]\mathrm{B}+[31]\mathrm{B}'+[32]\mathrm{B}''.
\end{cases}
$$

Supposons

$$(d)\ldots\ldots \mathrm{B}'=\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{N}}\mathrm{B},\ \mathrm{B}''=\frac{\mathrm{M}''}{\mathrm{N}}\mathrm{B},\ \mathrm{B}'''=\frac{\mathrm{M}'''}{\mathrm{N}}\mathrm{B}.$$

Cela posé, les trois premières des équations (C) donneront, par les règles ordinaires de l'élimination, en changeant les signes,

$$
(\mathrm{D})\ldots\ldots\begin{cases}
\mathrm{N}=[03][12][21]-[01][12][23]-[02][13][21]+[02][23]x'+[01][13]x''-[03]x'x'', \\
\mathrm{M}'=[02][13][20]+[02][10][23]-[03][12][20]+[12][23]x+[03][10]x''-[13]xx'', \\
\mathrm{M}''=[01][10][23]+[01][13][20]+[03][10][21]+[13][21]x+[03][20]x'-[23]xx', \\
\mathrm{M}'''=xx'x''+[12][21]x-[02][20]x'-[01][10]x''+[01][12][20]+[02][10][21].
\end{cases}
$$

Le calcul de ces coefficiens, ainsi que de ceux qui suivront, sera singulièrement simplifié par l'observation suivante. Quand on a calculé les coefficiens (01), [01], (02), etc. qui se rapportent à l'action des planètes m', m'', etc. sur m, il est aisé d'en conclure les coefficiens (10), [10], (20), etc. relatifs à la

réaction de la planète m sur m', m'', etc. En désignant par ${}'c^{(i)}$ la valeur de $c^{(i)}$, relative à la réaction de m sur m', on a (§. 174.)

$$ {}'c^{(i)} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 c^{(i)}. $$

Ainsi les formules (a) (§. 272.) donneront

$$ (10) = \frac{N'}{4}\frac{a}{a'} m c^{(i)} = \frac{N'a'm}{N a m'}(01), [10] = \frac{N'}{4} m \left\{ 2\left(1+\frac{c^2}{a'^2}\right)c^{(1)} - \frac{3a}{a'} c^{(0)} \right\} = \frac{N'a'm}{N a m'}[01]. $$

Mais on a, suivant la troisième loi de Kepler, $\frac{N'}{N} = \left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{3}{2}}$, d'où résultent les relations suivantes:

$$ (1) \ldots\ldots \begin{cases} (01)\, m\sqrt{a} = (10)\, m'\sqrt{a'},\ (02)\, m\sqrt{a} = (20)\, m''\sqrt{a''},\ (12)\, m'\sqrt{a'} = (21)\, m''\sqrt{a''}, \\ \text{et en général, } (rs)\, m^r \sqrt{a^r} = (sr)\, m^s \sqrt{a^s},\ [rs]\, m^r \sqrt{a^r} = [sr]\, m^s \sqrt{a^s}; \end{cases} $$

les lettres r, s, désignant des traits. et non des puissances. Ainsi on trouvera que les deux derniers termes de M″ sont identiques.

Maintenant si l'on substitue dans la quatrième des équations (C), les valeurs (d) (c) de B′, B″, B‴, et x, x', x'', x'', on la transformera, après l'avoir divisée par B, en

$$ (E) \ldots\ldots 0 = b^4 - C b^3 + D b^2 - E b + F, $$

et l'on trouvera

$$ C = (0) + (1) + (2) + (3), $$

$$ \begin{aligned} D = {} & (0)(1) - [01][10] + (0)(2) - [02][20] + (0)(3) - [03][30] + (1)(2) - [12][21] \\ & + (1)(3) - [13][31] + (2)(3) - [23][32], \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} E = {} & (0)(1)(2) - 2[01][12][20] + (0)(1)(3) - 2[01][13][30] + (0)(2)(3) - 2[02][23][30] \\ & + (1)(2)(3) - 2[12][23][31] - \{(0)+(1)\}[23][32] - \{(0)+(2)\}[13][31] - \{(0)+(3)\}[12][21] \\ & - \{(1)+(2)\}[03][30] - \{(1)+(3)\}[02][20] - \{(2)+(3)\}[01][10], \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} F = {} & (0)(1)(2)(3) + [01][10][23][32] + [02][20][13][31] + [03][30][12][21] \\ & - (0)(1)[23][32] - (0)(2)[13][31] - (0)(3)[12][21] - (1)(2)[03][30] - (1)(3)[02][20] \\ & - (2)(3)[01][10] - 2(0)[12][23][31] - 2(1)[02][23][30] - 2(2)[01][13][30] \\ & - 2(3)[01][12][20] - 2[01][12][23][30] - 2[02][10][23][31] - 2[03][12][20][31]. \end{aligned} $$

La solution de l'équation (E) donnera quatre racines que nous désignerons par b, b_1, b_2, b_3; et il est visible que l'élimination de B, B′, etc. eût donné une équation du degré i, si l'on eût combiné i planètes au lieu de 4. Ainsi les véritables intégrales de h, l, h', l', etc. seront

$$(F) \ldots\ldots \begin{cases} h = B\sin(\beta+bt) + B_1\sin(\beta_1+b_1t) + B_2\sin(\beta_2+b_2t) + B_3\sin(\beta_3+b_3t), \\ h' = B'\sin(\beta+bt) + B'_1\sin(\beta_1+b_1t) + B'_2\sin(\beta_2+b_2t) + B'_3\sin(\beta_3+b_3t), \\ h'' = B''\sin(\beta+bt) + B''_1\sin(\beta_1+b_1t) + B''_2\sin(\beta_2+b_2t) + B''_3\sin(\beta_3+b_3t), \\ h''' = B'''\sin(\beta+bt) + B'''_1\sin(\beta_1+b_1t) + B'''_2\sin(\beta_2+b_2t) + B'''_3\sin(\beta_3+b_3t). \end{cases}$$

Ces intégrales se changeront en l, l', l'', l''', si on met les cosinus à la place des sinus. Il y a donc pour quatre planètes 24, et pour i planètes $(i+2)i$ quantités inconnues, b, β, B, B′, B″, B‴, b_1, β_1, B_1, etc. dont quatre ou i sont données par l'équation (E). Les équations (D) (d) donnent $i-1$ des indéterminées B, B′, B″, etc. et puisqu'il faut substituer pour b les i racines de l'équation (E), on aura $(i-1)i$ quantités. Il ne reste donc que $2i$ inconnues qu'on déterminera par les observations. En effet, soient Γ, Γ', etc. Π, Π', etc. les valeurs de γ, γ', etc. ϖ, ϖ', etc. que les observations ont données à une époque quelconque, d'où l'on compte le tems t. On en tirera

$$(e) \ldots\ldots \Gamma\sin\Pi = H,\ \Gamma\cos\Pi = L,\ \Gamma'\sin\Pi' = H',\ \Gamma'\cos\Pi' = L',\ \text{etc.}$$

Comme les équations (F) donnent également les valeurs de $h = H$, $h' = H'$, etc. qui répondent à l'époque, si l'on fait $t = 0$, on aura les équations suivantes, dont le nombre est $2i$:

$$(G) \ldots\ldots \begin{cases} H = B\sin\beta + B_1\sin\beta_1 + B_2\sin\beta_2 + B_3\sin\beta_3 + \text{cet.} \\ L = B\cos\beta + B_1\cos\beta_1 + B_2\cos\beta_2 + B_3\cos\beta_3 + \text{cet.} \\ H' = B'\sin\beta + B'_1\sin\beta_1 + B'_2\sin\beta_2 + B'_3\sin\beta_3 + \text{cet.} \end{cases}$$

et ainsi du reste. Ayant déterminé de cette manière toutes les inconnues, on connaîtra h, l, h', l', etc. pour un tems quelconque t, ce qui donnera

$$(H) \ldots\ldots \gamma^2 = h^2 + l^2,\ \gamma'^2 = h'^2 + l'^2,\ \text{etc.}\ \operatorname{tg}\varpi = \frac{h}{l},\ \operatorname{tg}\varpi' = \frac{h'}{l'},\ \text{etc.}$$

§. 274. Les équations (B) (§. 272) donneront par le même procédé,

$$p = G\sin(\eta+gt),\ q = G\cos(\eta+gt),\ p' = G'\sin(\eta+gt),\ \text{etc.}$$

En faisant donc

$$(f) \ldots\ldots g + (0) = y,\ g + (1) = y',\ g + (2) = y'',\ g + (3) = y''',\ \text{on aura}$$

$$(J) \ldots\ldots \begin{cases} 0 = Gy - (01)G' - (02)G'' - (03)G''',\ 0 = G'y' - (10)G - (12)G'' - (13)G''', \\ 0 = G''y'' - (20)G - (21)G' - (23)G''',\ 0 = G'''y''' - (30)G - (31)G' - (32)G''. \end{cases}$$

Si on suppose

$$(g) \ldots\ldots G' = \frac{K'}{L} G, \quad G'' = \frac{K''}{L} G, \quad G''' = \frac{K'''}{L} G,$$

les trois premières équations (J) donneront

$$(K) \ldots \begin{cases} L = (03)y'y'' + (02)(23)y' + (01)(13)y'' + (01)(12)(23) + (02)(13)(21) - (03)(12)(21), \\ K' = (13)yy'' + (12)(23)y + (03)(10)y'' + (02)(10)(23) - (02)(13)(20) + (03)(12)(20), \\ K'' = (23)yy' + (13)(21)y + (03)(20)y' + (01)(13)(20) - (01)(10)(23) + (03)(10)(21), \\ K''' = yy'y'' - (12)(21)y - (02)(20)y' - (01)(10)y'' - (01)(12)(20) - (02)(10)(21). \end{cases}$$

Si on substitue les valeurs, données par les formules (f) (g) (K), dans la dernière des équations (J), elle prendra la forme

$$o = g^4 + \mathfrak{C} g^3 + \mathfrak{D} g^2 + \mathfrak{E} g + \mathfrak{F}, \text{ et l'on trouvera}$$

$$\mathfrak{C} = (0) + (1) + (2) + (3) = C,$$

$$\mathfrak{D} = (0)(1) - (01)(10) + (0)(2) - (02)(20) + (0)(3) - (03)(30)$$
$$+ (1)(2) - (12)(21) + (1)(3) - (13)(31) + (2)(3) - (23)(32),$$

$$\mathfrak{E} = (0)(1)(2) - 2(01)(12)(20) + (0)(1)(3) - 2(03)(13)(30) + (0)(2)(3) - 2(02)(23)(30)$$
$$+ (1)(2)(3) - 2(12)(23)(31) - \{(0) + (1)\}(23)(32) - \{(0) + (2)\}(13)(31)$$
$$- \{(0) + (3)\}(12)(21) - \{(1) + (2)\}(03)(30) - \{(1) + (3)\}(02)(20) - \{(2) + (3)\}(01)(10);$$

$$\mathfrak{F} = o.$$

Il suit de $\mathfrak{F} = o$, qu'une des racines g est nulle, ce qui est d'ailleurs évident. Car à l'inspection seule des équations (J) on voit qu'on leur satisfaira, en supposant $G = G' = G'' = G'''$, et $y = (0)$, $y' = (1)$, $y'' = (2)$, $y''' = (3)$, ce qui revient à supposer $g = o$: car alors le premier terme de chaque équation est égal à la somme négative de tous les autres termes, parceque $(0) = (01) + (02) + (03)$, etc. On trouvera aussi $L = K' = K'' = K'''$, en faisant $g = o$ dans les équations (K). Nous avons donc

$$(I) \ldots\ldots g = o, \; G = G' = G'' = G''',$$

$$(M) \ldots\ldots o = g^3 + Cg^2 + \mathfrak{D} g + \mathfrak{E}.$$

Si on désigne les racines de l'équation (M) par g_1, g_2, g_3, il viendra

$$(N) \ldots\ldots \begin{cases} p = G \sin \eta + G_1 \sin(\eta_1 + g_1 t) + G_2 \sin(\eta_2 + g_2 t) + G_3 \sin(\eta_3 + g_3 t), \\ p' = G \sin \eta + G'_1 \sin(\eta_1 + g_1 t) + G'_2 \sin(\eta_2 + g_2 t) + G'_3 \sin(\eta_3 + g_3 t), \text{ etc.} \end{cases}$$

On aura q, q', q'', q''', en changeant les sinus en cosinus. Si l'on substitue successivement g_1, g_2, g_3, pour g, dans les équations (K), on trouvera

$$\frac{G'_1}{G_1}, \; \frac{G''_1}{G_1}, \; \frac{G'''_1}{G_1}; \; \frac{G'_2}{G_2}, \; \frac{G''_2}{G_2}, \; \frac{G'''_2}{G_2}; \; \frac{G'_3}{G_3}, \; \frac{G''_3}{G_3}, \; \frac{G'''_3}{G_3}.$$

Le reste des inconnues, savoir $\eta, \eta_1, \eta_2, \eta_3$, G, G_1, G_2, G_3, sera déterminé par observation, ainsi qu'on l'a vu à l'égard des excentricités et des périgées (§. 273.). Cela posé on aura, pour un tems quelconque, p, q, p', etc. ce qui donnera

$$(O) \ldots\ldots \theta^2 = p^2 + q^2,\ \theta'^2 = p'^2 + q'^2,\ \text{etc. tang. } J = \frac{p}{q},\ \text{tang } J' = \frac{p'}{q'},\ \text{etc.}$$

§. 275. Il suit de ce qui précède, que les variations des élémens h, l, p, q, etc. ne sont que périodiques ou des oscillations, parceque les formules que nous avons trouvées (F) (N), ne renferment que des sinus ou cosinus. Les angles de ces sinus sont composés des quantités β, η, et b, g, etc. Les premières sont données par une équation linéaire de leur tangente: les angles β, η, etc. sont donc toujours réels. Les dernières, b, g, sont données par les équations (E) (M), lesquelles étant du degré i, pourront avoir des racines imaginaires; et dans ce cas les angles $\beta + bt$, etc. deviendraient imaginaires, ce qui indique des quantités exponentielles, dans l'exposant desquelles entre le tems t, et qui, par conséquent, au lieu d'être périodiques, changeront à l'infini avec le tems. Il suit de la théorie générale des racines algébriques, que deux racines, avant d'être imaginaires, deviennent nécessairement égales; et l'on sait que, dans ce cas, les sinus se changent en arcs de cercle, qui croîtront aussi à l'infini. On voit donc, que les variations des élémens ne seront pas périodiques, qu'au contraire la nature des orbites sera à la longue entièrement changée, et la stabilité du système planétaire détruite, lorsque les équations (E) (M) ont des racines imaginaires ou égales. Il est donc très-important, d'examiner, si quelques racines de ces équations peuvent devenir égales. Il est vrai qu'il serait fort difficile de juger *a priori* de la qualité de ces racines. Mais on verra par le calcul numérique, que les racines des équations (E)(M), qui résultent de la combinaison de toutes les planètes connues, sont trop différentes entre elles, pour qu'elles puissent devenir égales, et encore moins imaginaires, par un petit changement de leurs coefficiens. Or ces coefficiens, (01), [01], (02), etc. sont des fonctions des moyens mouvemens et des masses des planètes (§. 272. (a)), et les premiers sont connus avec une grande précision. Les masses sont moins certaines; mais cette incertitude regarde principalement les petites masses de Vénus, Mercure, et Mars: l'égalité de deux

racines demanderait donc des changemens énormes de ces masses, que les observations n'admettent pas. On peut donc être assuré que, quelle que soit la véritable valeur des masses inconnues des planètes, les équations (E) (M) n'ont pas de racines imaginaires ou égales, et que par conséquent les élémens h, l, p, q, etc. ne sont assujétis qu'à des altérations périodiques. Cependant comme ce n'est qu'une preuve empirique, il serait très-intéressant d'avoir une démonstration directe de cette vérité, sur laquelle est fondée la stabilité du système planétaire. M. de Laplace l'a démontrée d'une manière fort simple que nous allons exposer.

Si on multiplie la première des équations (A) et (B) par $mh\sqrt{a}$ et $mp\sqrt{a}$, la cinquième par $ml\sqrt{a}$ et $mq\sqrt{a}$, la seconde par $m'h'\sqrt{a'}$ et $m'p'\sqrt{a'}$, et ainsi du reste; la somme des équations (A) et celle des équations (B) donneront

$$m\sqrt{a}\,.\,\frac{h\partial h+l\partial l}{\partial t}+m'\sqrt{a'}\,.\,\frac{h'\partial h'+l'\partial l'}{\partial t}+m''\sqrt{a''}\,.\,\frac{h''\partial h''+l''\partial l''}{\partial t}+\text{cet.}=$$
$$m\sqrt{a}\,\{[01]\,(lh'-hl')+[02]\,(lh''-hl'')+[03]\,(lh'''-hl''')\}$$
$$+m'\sqrt{a'}\,\{[10]\,(hl'-lh')+\text{cet.}\}+m''\sqrt{a''}\,\{[20]\,(hl''-lh'')+\text{cet.}\}$$
$$+m'''\sqrt{a'''}\,\{[30]\,(hl'''-lh''')+\text{cet.}\},$$

$$m\sqrt{a}\,.\,\frac{p\partial p+q\partial q}{\partial t}+m'\sqrt{a'}\,.\,\frac{p'\partial p'+q'\partial q'}{\partial t}+m''\sqrt{a''}\,.\,\frac{p''\partial p''+q''\partial q''}{\partial t}+\text{cet.}=$$
$$m\sqrt{a}\,\{(01)\,(pq'-qp')+(02)\,(pq''-qp'')+(03)\,(pq'''-qp''')\}$$
$$+m'\sqrt{a'}\,\{(10)\,(qp'-pq')+\text{cet.}\}+m''\sqrt{a''}\,\{(20)\,(qp''-pq'')+\text{cet.}\}$$
$$+m'''\sqrt{a'''}\,\{(30)\,(qp'''-pq''')+\text{cet.}\}.$$

Le dernier membre de ces deux équations est nul, à cause des équations (1) (§. 273.). On aura donc, en intégrant, et substituant $h^2+l^2=\gamma^2$, $p^2+q^2=\theta^2$, etc.

$$(2)\,\ldots\ldots\,\gamma^2 m\sqrt{a}+\gamma'^2 m'\sqrt{a'}+\gamma''^2 m''\sqrt{a''}+\gamma'''^2 m'''\sqrt{a'''}=\alpha,$$
$$(3)\,\ldots\ldots\,\theta^2 m\sqrt{a}+\theta'^2 m'\sqrt{a'}+\theta''^2 m''\sqrt{a''}+\theta'''^2 m'''\sqrt{a'''}=\beta,$$

α et β étant deux constantes. Supposons maintenant que l'équation (E) ou (M) ait des racines imaginaires qui donnent des exponentielles, et qu'il en résulte les termes

$$h=\mathrm{P}e^{ft}+\mathrm{P}_1e^{f't}+\text{cet.},\ l=\mathrm{Q}e^{ft}+\text{cet.},\ h'=\mathrm{P}'e^{ft}+\text{cet.},\ l'=\mathrm{Q}'e^{f't}+\text{cet.}$$
$$p=\mathrm{R}e^{ft}+\mathrm{R}_1e^{f't}+\text{cet.},\ q=\mathrm{S}e^{ft}+\text{cet.},\ p'=\mathrm{R}'e^{ft}+\text{cet.},\ \text{etc.}$$

e étant le nombre dont le logarithme naturel est l'unité: P, Q, P', etc. seront des quantités réelles, parceque γ et ϖ, γ' et ϖ', etc. et par conséquent, h, l, h', l',

etc. doivent toujours avoir une valeur réelle, quelle que soit leur grandeur ou variation. Cela posé on aura

$$\gamma^2 = (P^2 + Q^2)e^{2ft} + (P_1{}^2 + Q_1{}^2)e^{2f't} + \text{cet.},\ \gamma'^2 = (P'^2 + Q'^2)e^{2ft} + \text{cet.}$$

et ainsi du reste. En substituant ces valeurs dans les équations (2) (3), et désignant par f le plus grand des exposans f, f', etc. on aura

$$\alpha = \{m\sqrt{a}\,(P^2 + Q^2) + m'\sqrt{a'}\,(P'^2 + Q'^2) + \text{cet}\}\, e^{2ft} + \text{cet.}$$
$$\beta = \{m\sqrt{a}\,(R^2 + S^2) + m'\sqrt{a'}\,(R'^2 + S'^2) + \text{cet.}\}\, e^{2ft} + \text{cet.}$$

les termes suivans étant multipliés par des puissances de e, moins élevées que e^{2ft}. Si les équations (E) (M) ont des racines égales, d'où résultent des arcs de cercle et des termes de cette forme,

$h = Pt^r + P_1t^{r'} + \text{cet.}$, $l = Qt^r + \ldots$, $p = Rt^r + \ldots$, $q = St^r + \ldots$, $h' = P't^r + \ldots$, etc.

t^r étant la plus haute puissance de t, on aura, comme précédemment,

$\alpha = \{m\sqrt{a}(P^2+Q^2)+m'\sqrt{a'}(P'^2+Q'^2)+\text{cet.}\}t^{2r}+\text{cet.}$, $\beta = \{m\sqrt{a}(R^2+S^2+\ldots\}t^{2r}+\text{cet.}$

Comme le tems t croît à l'infini, les termes e^{2ft}, t^{2r}, deviendront infiniment plus grands que tous les termes suivans, ajoutés ensemble. Il est donc impossible que la somme de tous les termes qui sont multipliés par e^{2ft} ou par t^{2r}, se réduise à une constante α ou β, à moins que le coefficient de e^{2ft} ou t^{2r} ne soit nul. Il en est de même des termes $e^{2f't}$, $t^{2r'}$, qui deviendront infiniment plus grands que la somme de tous les termes moins élevés. On aura donc, dans le cas des racines imaginaires ou égales,

$$o = P^2+Q^2+(P'^2+Q'^2)\frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} + \ldots,\quad o = R^2+S^2+(R'^2+S'^2)\frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} + \ldots$$

Si on substitue, suivant la troisième loi de Kepler, $\sqrt{\frac{a'}{a}} = \frac{N\,a}{N'\,a'}$, etc. les équations précédentes deviendront

$$o = \frac{m\,(P^2+Q^2)}{N\,a} + \frac{m'\,(P'^2+Q'^2)}{N'\,a'} + \text{cet.}\quad o = \frac{m\,(R^2+S^2)}{N\,a} + \frac{m'(R'^2+S'^2)}{N'\,a'} + \text{cet.}$$

Puisque P, Q, R, S, P', etc. sont des quantités réelles, leurs carrés seront toujours positifs, ainsi que les masses et les distances, m, a, m', a', etc. Les moyens mouvemens N, N', etc. seront aussi de même espèce, parceque toutes les planètes circulent autour du soleil dans le même sens. Ainsi tous les termes des équations précédentes auront le même signe, et comme leur somme est nulle, il faut que chaque terme soit nul, d'où il résulte

$P = o$, $Q = o$, $P' = o$, $Q' = o$, $P_1 = o$, etc. $R = o$, $S = o$, $R_1 = o$, etc. c'est-à-dire, les expressions de h, l, p, q, etc. ne peuvent renfermer ni exponentielles ni arcs de cercle: tous leurs termes sont des sinus ou périodiques, et ces élémens ne sont assujétis qu'à des oscillations. Il en est de même de leurs carrés et par conséquent des excentricités $\gamma = \sqrt{(h^2 + l^2)}$ et des inclinaisons $\theta = \sqrt{(p^2 + q^2)}$. Ces élémens ne peuvent pas croître indéfiniment; ils ne feront, dans tous les siècles à venir, qu'osciller entre des limites qui sont même très-resserrées. En effet, les équations (2) (3) donnent, en différentiant,

$$\partial\gamma = -\frac{\gamma'}{\gamma}\cdot\frac{m'}{m}\cdot\frac{\sqrt{a'}}{\sqrt{a}}\cdot\partial\gamma' - \frac{\gamma''}{\gamma}\cdot\frac{m''}{m}\cdot\frac{\sqrt{a''}}{\sqrt{a}}\,\partial\gamma'' - \text{cet.}$$

Il est donc visible, que les variations séculaires ne dépendent pas de la petitesse actuelle des élémens, mais du rapport qui existe entre les masses, les distances, etc. et que l'excentricité ou l'inclinaison d'une planète peut éprouver un très-grand changement, si la masse perturbatrice est beaucoup plus grande que celle de la planète troublée. En supposant par ex. que les lettres sans trait se rapportent à Mars, et celles marquées d'un trait à Jupiter, on aura en nombres ronds,

$$\frac{m'}{m} = 1700,\ \frac{a'}{a} = 4,\ \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{1}{2},\ \text{donc}\ \partial\gamma = -1700\,.\,\partial\gamma'.$$

Ainsi la variation de l'excentricité de Mars serait 1700 fois plus grande que celle de Jupiter, si cette planète agissait seule sur Mars. Mais le système solaire est tellement arrangé, que les actions des diverses planètes se détruisent à peu près; et c'est par cette raison, que les limites, entre lesquelles oscillent les excentricités et les inclinaisons des orbes planétaires, seront toujours très-étroites. Si l'on ajoute l'action de Saturne à celle de Jupiter, on aura à peu près

$$\frac{m''}{m} = 550,\ \frac{a''}{a} = 6,\ \frac{\gamma''}{\gamma} = \frac{1}{2},\ \text{et}\ \partial\gamma'' = -2\partial\gamma',\ \text{d'où il vient}$$

$$\partial\gamma = (-1700 + 1557)\,\partial\gamma' = -143\,.\,\partial\gamma'.$$

L'action de la terre réduit cette variation à très-peu de chose. Ainsi on voit, que le mouvement de toutes les planètes dans le même sens suffit, pour rendre périodiques les variations de la forme et de la position de leurs

orbites, et pour en exclure toute équation rigoureusement séculaire; mais que, si les limites, entre lesquelles se font ces oscillations périodiques, sont très-resserrées, c'est dû uniquement à la distribution des masses et des orbites, que le hazard a produite, ou que l'Auteur de la nature a choisie.

On trouvera le même résultat pour les satellites de Jupiter et de Saturne, qui circulent aussi dans le même sens, dont les masses sont peu différentes les unes des autres, et dont les excentricités et les inclinaisons sont également très-petites. Le système de tous ces corps est donc parfaitement stable relativement à leurs excentricités et inclinaisons: leurs orbites seront toujours à peu près circulaires et dans un même plan. Il en est autrement des apsides et des noeuds qui ont, ainsi qu'on l'a vu, un mouvement progressif qui sera déterminé par le calcul numérique des formules précédentes.

§. 276. On trouve dans le Chap. VII. tous les élémens nécessaires pour le calcul des formules précédentes. Nous commencerons par les variations séculaires de Jupiter, Saturne, et Uranus, qui forment un système à part, sur lequel les actions des autres planètes ont peu d'influence. En marquant donc de deux, de trois, et de quatre traits, toutes les quantités qui se rapportent à Jupiter, Saturne, et Uranus, on doit mettre dans les formules précédentes (§. 273. 274.), les chiffres 2, 3, 4, à la place de 0, 1, 2: d'où il viendra

$$(01)=(23),\ (02)=(24),\ (03)=0,\ \text{etc. } (0)=(23)+(24)=(2),$$
$$(1)=(32)+(34)=(3),\quad (2)=(42)+(43)=(4),\ (3)=0;$$

et ainsi du reste. Il en suit

$$F=0,\ E=(2)(3)(4)-2[23][34][42]-(2)[34][43]-(3)[24][42]-(4)[23][32],$$
$$D=(2)(3)-[23][32]+(2)(4)-[24][42]+(3)(4)-[34][43],\quad C=(2)+(3)+(4);$$
$$\mathfrak{E}=0,\ \mathfrak{D}=(2)(3)-(23)(32)+(2)(4)-(24)(42)+(3)(4)-(34)(43),\quad \mathfrak{C}=C;$$

et b, g, seront donnés pas les équations

$$(E)\ldots\ldots 0=b^3-Cb^2+Db-E,\quad (M)\ldots\ldots 0=g^2+Cg+\mathfrak{D},$$

l'une des valeurs de g étant zéro.

Les valeurs de $c^{(0)}$, $c^{(1)}$, et les élémens des planètes (Tab. I. VIII. IX. X. §. 209. 221. 222. 223.) donnent, suivant les formules (a) (§. 272.), (1) (§. 273.), (23) = 7″,324455; [23] = 4″,783351; (24) = 0″,0967074; [24] = 0″,0329603; (34) = 0″,355285; [34] = 0″,2132967; (32) = 17″,915243; [32] = 11″,699831;

$(41) = 0'',920532$; $[42] = 0'',3070772$; $(43) = 1'',3826387$; $[43] = 0'',8300724$;
d'où l'on a conclu

$$(2) = 7'',4211624;\quad (3) = 18'',270528,\quad (4) = 2'',3031707;$$
$$C = 27'',99486112;\quad D = 138'',60952;\quad E = 181'',26642;\quad \mathfrak{D} = 62'',96121.$$

Si l'on fait $b = x + \frac{1}{3}C$, l'équation (E) se transformera en

$$o = x^3 - 122,6279 \,.\, x - 512,993928;$$

équation qui a trois racines réelles. On trouvera donc, par la méthode ordinaire de la trisection de l'angle que nous désignerons par 3ϕ,

$$\cos 3\phi = \frac{256,496964}{(40,875966\ldots)^{\frac{3}{2}}},$$

et les trois racines x, en multipliant $2\sqrt{(40,87596\ldots)}$ par $\cos\phi$, par $-\sin(30° - \phi)$, et par $-\sin(30° + \phi)$. Cela donnera

$3\phi = 11° 2' 42''$; $x = 12'',760474$; $x_1 = -5'',6691584$; $x_2 = -7'',0913154$;
d'où il viendra $b = x + 9'',3316204$; donc

$$(a) \ldots\ldots b = 22'',0920944;\quad b_1 = 3'',662462;\quad b_2 = 2'',240305.$$

Les racines de l'équation (M) sont

$$g = -\tfrac{1}{2}C \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}C^2 - \mathfrak{D})},\ \text{partant}$$
$$(b) \ldots\ldots g_1 = -2'',4663204;\quad g_2 = -25,5285407.$$

On a donc les équations suivantes (§. 273. 274.),

$$(F) \ldots\ldots \begin{cases} h'' = B\sin(\beta + bt) + B_1\sin(\beta_1 + b_1 t) + B_2\sin(\beta_2 + b_2 t), \\ h''' = \frac{M'}{N} B\sin(\beta + bt) + \frac{M'_1}{N_1} B_1 \sin(\beta_1 + b_1 t) + \frac{M'_2}{N_2} B_2 \sin(\beta_2 + b_2 t), \\ h^{\text{IV}} = \frac{M''}{N} B\sin(\beta + bt) + \frac{M''_1}{N_1} B_1 \sin(\beta_1 + b_1 t) + \frac{M''_2}{N_2} B_2 \sin(\beta_2 + b_2 t); \end{cases}$$

$$(N) \ldots\ldots \begin{cases} p'' = G\sin\eta + G_1\sin(\eta_1 + g_1 t) + G_2\sin(\eta_2 + g_2 t), \\ p''' = G\sin\eta + \frac{K'_1}{L_1} G_1 \sin(\eta_1 + g_1 t) + \frac{K'_2}{L_2} G_2\sin(\eta_2 + g_2 t), \\ p^{\text{IV}} = G\sin\eta + \frac{K''_1}{L_1} G_1 \sin(\eta_1 + g_1 t) + \frac{K''_2}{L_2} G_2\sin(\eta_2 + g_2 t); \end{cases}$$

l'', l''', l^{IV}, q'', etc. étant ce que deviennent h'', h''', h^{IV}, p'', etc. lorsqu'on change les sinus en cosinus. On aura par ce qui précède (§. 273. 274.),
$N = [24]\{b-(3)\} - [23][34]$, $M' = [34]\{b-(2)\} - [24][32]$, $M'' = [23][32] - \{b-(2)\}\{b-(3)\}$;
$L = (24)\{g+(3)\} + (23)(34)$, $K' = (34)\{g+(2)\} + (24)(32)$, $K'' = \{g+(2)\}\{g+(3)\} - (23)(32)$;

ce qui donne en même tems N_1, L_1, N_2, L_2, K'_1, etc. en mettant b_1, b_2, g_1, g_2, à la place de b, g. Ainsi les valeurs précédentes donneront

$$N = -0{,}8969885;\quad N_1 = -1{,}4915336;\quad N_2 = -1{,}5374128;$$
$$M' = 2{,}7518198;\quad M'_1 = -1{,}1791582;\quad M'_2 = -1{,}4824995;$$
$$M'' = -0{,}10148;\quad M''_1 = 1{,}05687;\quad M''_2 = -27{,}08564;$$
$$L_1 = 4{,}1306528;\quad K'_1 = 3{,}4929175;\quad K''_1 = -52{,}91204;$$
$$L_2 = 1{,}9003653;\quad K'_2 = -4{,}7007429;\quad K''_2 = 0{,}20425;$$

d'où l'on conclura les équations

$$(F)\ldots\ldots\begin{cases} h^{II} = B\sin(\beta + bt) + B_1\sin(\beta_1 + b_1 t) + B_2\sin(\beta_2 + b_2 t), \\ h^{III} = -3{,}0678437\,.\,B\sin(\beta + bt) + 0{,}790568\,.\,B_1\sin(\beta_1 + b_1 t) \\ \qquad + 0{,}964282\,.\,B_2\sin(\beta_2 + b_2 t), \\ h^{IV} = 0{,}1131341\,.\,B\sin(\beta + bt) - 0{,}7085795\,.\,B_1\sin(\beta_1 + b_1 t) \\ \qquad + 17{,}617675\,.\,B_2\sin(\beta_2 + b_2 t); \end{cases}$$

$$(N)\ldots\ldots\begin{cases} p^{II} = G\sin\eta + G_1\sin(\eta_1 + g_1 t) + G_2\sin(\eta_2 + g_2 t), \\ p^{III} = G\sin\eta + 0{,}845609\,.\,G_1\sin(\eta_1 + g_1 t) - 2{,}4735\,.\,G_2\sin(\eta_2 + g_2 t), \\ p^{IV} = G\sin\eta - 12{,}8096\,.\,G_1\sin(\eta_1 + g_1 t) + 0{,}107479\,.\,G_2\sin(\eta_2 + g_2 t). \end{cases}$$

L'époque de 1800, de laquelle nous comptons le tems t, donne (Tab. I. § 210.),

$H^{II} = 0{,}00931092$; $L^{II} = 0{,}04727013$; $H^{III} = 0{,}05616212$; $L^{III} = 0{,}00083352$;
$H^{IV} = 0{,}01021128$; $L^{IV} = -0{,}0455395$; $P^{II} = 0{,}02269773$; $Q^{II} = -0{,}00336228$;
$P^{III} = 0{,}04040263$; $Q^{III} = -0{,}0162661$; $P^{IV} = 0{,}01290276$; $Q^{IV} = 0{,}00398078$.

En substituant H^{II}, L^{II}, H^{III}, etc. pour h^{II}, l^{II}, h^{III}, etc. après avoir fait $t = 0$, dans les équations (F), on trouvera par les règles ordinaires de l'élimination,

$$B\sin\beta = \frac{14{,}6111\,.\,H^{II} - 18{,}326128\,.\,H^{III} + 0{,}173714\,.\,H^{IV}}{70{,}852426} = -0{,}0125813;$$

$$B\cos\beta = \frac{14{,}6111\,.\,L^{II} - 18{,}326128\,.\,L^{III} + 0{,}173714\,.\,L^{IV}}{70{,}852426} = 0{,}00942076;$$

$$B_1\sin\beta_1 = \frac{0{,}964282\,.\,H^{II} - H^{III} - 4{,}032125\,.\,B\sin\beta}{0{,}173714} = 0{,}0204109;$$

$$B_1\cos\beta_1 = \frac{0{,}984282\,.\,L^{II} - L^{III} - 4{,}032125\,.\,B\cos\beta}{0{,}173714} = 0{,}0389290;$$

$$B_2\sin\beta_2 = H'' - B\sin\beta - B_1\sin\beta_1 = 0{,}0014813.$$
$$B_2\cos\beta_2 = L'' - B\cos\beta - B_1\cos\beta_1 = -0{,}00107966.$$

On aura de la même manière, par les équations (N),

$G \sin \eta = 0{,}0267994$; $G_1 \sin \eta_1 = 0{,}00104171$; $G_2 \sin \eta_2 = -0{,}00514344$;
$G \cos \eta = -0{,}00633756$; $G_1 \cos \eta_1 = -0{,}00077406$; $G_2 \cos \eta_2 = 0{,}00374944$.
Au moyen de ces valeurs on trouvera β, β_1, β_2, B, B_1, B_2, B′, etc. ainsi que η, η_1, η_2, G, G_1, etc. par les équations,

$$\tang \beta = \frac{B \sin \beta}{B \cos \beta}, \text{ etc. } \tang \eta = \frac{G \sin \eta}{G \cos \eta}, \text{ etc. } B = \frac{B \sin \beta}{\sin \beta}, \text{ etc.}$$

$$B' = \frac{M'}{N} B, \quad B'_1 = \frac{M'_1}{N_1} B_1, \text{ etc. } G' = G'' = G, \quad G'_1 = \frac{K'_1}{L_1} G_1, \text{ etc.}$$

ce qui donnera

$$\beta = 126° 49' 32'', \quad \beta_1 = 27° 40' 7'', \quad \beta_2 = 126° 20' 17'',$$
$$B = -0{,}01571751; \quad B_1 = 0{,}04395538; \quad B_2 = 0{,}00183893;$$
$$B' = 0{,}04821887; \quad B'_1 = 0{,}03474971; \quad B'_2 = 0{,}00177324;$$
$$B'' = -0{,}00177819; \quad B''_1 = -0{,}03114589; \quad B''_2 = 0{,}03239759;$$
$$\eta = 103° 18' 18''; \quad \eta_1 = 126° 36' 53'', \quad \eta_2 = 126° 5' 25'',$$
$$G = 0{,}02753856; \quad G_1 = 0{,}00129782; \quad G_2 = -0{,}00636495;$$
$$G' = G, \quad G'_1 = 0{,}00109745; \quad G'_2 = 0{,}01574433;$$
$$G'' = G, \quad G'_1 = -0{,}01662452; \quad G''_2 = -0{,}0006841.$$

§. 277. En rassemblant toutes les quantités précédentes, on aura

$$h'' = -0{,}01571751 \,.\, \sin(126° 49' 32'' + t \,.\, 22'',0920944)$$
$$+ 0{,}0439554 . \sin(27°40'7'' + t . 3'',662462) + 0{,}0018389 . \sin(126°20'17'' + t . 2'',240305),$$
$$h''' = 0{,}04821887 \,.\, \sin(126° 49' 32'' + t \,.\, 22'',0920944)$$
$$+ 0{,}03474971 . \sin(27°40'7'' + t . 3'',66 \ldots . + 0{,}00177324 \sin(126°20'17'' + t . 2'',24 \ldots),$$
$$h^{IV} = -0{,}00177819 \,.\, \sin(126° 49' 32'' + t \,.\, 22'',0920944)$$
$$-0{,}03114589 . \sin(27°40'7'' + t . 3'',66 \ldots) + 0{,}03239759 . \sin(126°20'17'' + t . 2'',24 \ldots);$$
$$p'' = 0{,}02753856 \,.\, \sin 103°18'18' + 0{,}00129782 . \sin(126°36'53'' - t . 2'',4663204)$$
$$-0{,}00636495 \,.\, \sin(126° 5' 25'' - t \,.\, 25'',5285407),$$
$$p''' = 0{,}02753856 . \sin 103°18'18'' + 0{,}00109745 . \sin(126° 36'53'' - t . 2'',466 \ldots)$$
$$+ 0{,}01574433 \,.\, \sin(126° 5' 25'' - t \,.\, 25'',5285407),$$
$$p^{IV} = 0{,}02753856 . \sin 103° 18' 18'' - 0{,}0166242 . \sin(126° 36'53'' - t . 2'',466 \ldots)$$
$$-0{,}0006841 \,.\, \sin(126° 5' 25'' - t \,.\, 25'',5285407).$$

Les mêmes formules donneront l'', l''', l^{IV}, q'', q''', q^{IV}, si on change les sinus en cosinus. Cela posé on aura

$\gamma'' = \sqrt{(h''^2 + l''^2)}$, $\tan \varpi'' = \frac{h''}{l''}$; $\theta'' = \sqrt{(p''^2 + q''^2)}$, $\tan J'' = \frac{p''}{q''}$, etc.

d'où l'on tirera

$$\gamma''^2 = B^2 + B^2_1 + B^2_2 + 2BB_1 \cos(\beta - \beta_1 + (b - b_1)t)$$

$$+ 2BB_2 \cos(\beta - \beta_2 + (b - b_2)t) + 2B_1 B_2 \cos(\beta_2 - \beta_1 + (b_2 - b_1)t),$$

$$\theta''^2 = G^2 + G^2_1 + G^2_2 + 2GG_1 \cos(\eta - \eta_1 - g_1 t)$$

$$+ 2GG_2 \cos(\eta - \eta_2 - g_2 t) + 2G_1 G_2 \cos(\eta_1 - \eta_2 + (g_1 - g_2)t),$$

et ainsi du reste. Les valeurs précédentes donneront

$$(\gamma'')^2 = 0,0021825 + 0,0013817 \,.\, \sin(9^\circ\, 9'\, 25'' + t \,.\, 18'',429632)$$

$$- 0,0000578 \,.\, \cos(29'15'' + t.19'',851789) - 0,0001617 \,.\, \sin(8^\circ 40' 10'' - t.1'',422157),$$

$$(\gamma''')^2 = 0,0035357 - 0,0033512 \,.\, \sin(9^\circ\, 9'\, 25'' + t \,.\, 18'',429632)$$

$$+ 0,000171 \,.\, \cos(29'\, 15'' + t \,.\, 19'',85 \ldots) - 0,00012324 \,.\, \sin(8^\circ 40' 10'' - t \,.\, 1'',42 \ldots),$$

$$(\gamma^{\text{iv}})^2 = 0,00202283 - 0,0001108 \,.\, \sin(9^\circ\, 9'\, 25'' + t \,.\, 18'',429632)$$

$$- 0,0001152 \,.\, \cos(29'15'' + t.19'',85 \ldots) + 0,0020181 \,.\, \sin(8^\circ 40' 10'' - t.1'',42 \ldots);$$

$$(\theta'')^2 = 0,00080057 + 0,0000715 \,.\, \cos(23^\circ\, 18'\, 35'' - t \,.\, 2'',46632)$$

$$- 0,0003506 \,.\, \cos(22^\circ 47' 7'' - t.25'',52854) - 0,0000165 \,.\, \cos(31'28'' + t.23'',06222),$$

$$(\theta''')^2 = 0,00100746 + 0,00006044 \,.\, \cos(23^\circ\, 18'\, 35'' - t \,.\, 2'',46632)$$

$$+ 0,00086715 \,.\, \cos(22^\circ 47' 7'' - t.25'',52 \ldots) + 0,00003456 \,.\, \cos(31'28'' + t.23'',06 \ldots),$$

$$(\theta^{\text{v}})^2 = 0,00103522 - 0,00091563 \,.\, \cos(23^\circ\, 18'\, 35'' - t \,.\, 2'',46632)$$

$$- 0,00003768 \,.\, \cos(22^\circ 47' 7'' - t.25'',5 \ldots) + 0,00002275 \,.\, \cos(31'28'' + t.23'',06 \ldots).$$

On peut donner à la longitude des périhélies et des noeuds une forme plus commode à l'usage astronomique. Faisons pour abréger,

$$\beta + bt = \mathfrak{b}, \quad \beta_1 + b_1 t = \mathfrak{b}_1, \quad \beta_2 + b_2 t = \mathfrak{b}_2,$$

et supposons $\varpi'' = \mathfrak{b} + \nu''$, ou $\varpi'' = \mathfrak{b}_1 + \nu''$, ou $\varpi'' = \mathfrak{b}_2 + \nu''$, où il faut choisir celui des angles $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, dont le coefficient dans l'expression de h'' est le plus grand, parceque ce coefficient se trouvera dans le dénominateur de tang ν, sans être multiplié par aucun sinus. Ainsi, B_1 étant plus grand que B et B_2, on fera

$$\varpi'' = \mathfrak{b}_1 + \nu'', \quad \tan \varpi'' \text{ étant } \frac{h''}{l''} = \frac{B \sin \mathfrak{b} + B_1 \sin \mathfrak{b}_1 + B_2 \sin \mathfrak{b}_2}{B \cos \mathfrak{b} + B_1 \cos \mathfrak{b}_1 + B_2 \cos \mathfrak{b}_2};$$

d'où il est aisé de conclure

$$\tan \nu'' = \frac{B \sin(\mathfrak{b} - \mathfrak{b}_1) + B_2 \sin(\mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_1)}{B_1 + B \cos(\mathfrak{b} - \mathfrak{b}_1) + B_2 \cos(\mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_1)}.$$

et ainsi du reste. Comme $B_{,}$ est plus grand que la somme de B et B_{2} sans égard au signe, le dénominateur de tang p'' ne pourra jamais devenir nul, et l'angle p'' est resserré dans les limites $\pm 90°$, entre lesquelles il fera des oscillations, ensorte que c'est la véritable équation ou inégalité du périhélie, dont le lieu moyen est $b_{,} = \beta_{,} + b_{,}t$, $\beta_{,}$ étant l'époque, $b_{,}t$ le moyen mouvement ou l'équation séculaire, et $\beta_{,} + p''$ le lieu vrai pour l'époque de 1800 d'où l'on part, si on fait $t = 0$. Cela posé on aura

$$\varpi'' = 27°40'7'' + t.3'',662462 + p'',\ \varpi''' = 126°49'32'' + t.22'',092094 - p''';$$

$$J^{II} = 103°18'18'' + i^{II},\ J^{III} = 103°18'18'' + i^{III},\ J^{IV} = 103°18'18'' - i^{IV};$$

$$\text{tang}\, p^{II} = \frac{0,0018389.\sin(81°15'50''+t.1'',4222) - 0,0157175.\cos(9°9'25''+t.18'',4296)}{0,0439554 + 0,016\ldots\sin(9°\ldots+t.18'',4\ldots) - 0,0016\ldots\cos(81°\ldots+t.1'',4\ldots)},$$

$$\text{tang}\, p^{III} = \frac{0,0347497.\cos(9°5'25''+t.18'',4296) + 0,00177324.\sin(0°29'15''+t.19'',8518)}{0,0482169 - 0,03\ldots\sin(9°\ldots+t.18'',4\ldots) + 0,0017\ldots\cos(29'15''+t.19'',8\ldots)},$$

$$\text{tang}\, i^{II} = \frac{0,0012978.\sin(23°16'35''-t.2''4663) - 0,006385.\sin(22°47'7''-t.25'',5285)}{0,0275386 + 0,001\ldots\cos(23°\ldots-t.2'',4\ldots) - 0,006\ldots\cos(22°\ldots-t.25'',5\ldots)},$$

$$\text{tang}\, i^{III} = \frac{0,0010974.\sin(23°18'35''-t.2''.4663) + 0,0157443.\sin(22°47'7''-t.25'',5285)}{0,0275\ldots + 0,001\ldots\cos(23°\ldots-t.2'',4\ldots) + 0,015\ldots\cos(22°\ldots-t.25'',5\ldots)},$$

$$\text{tang}\, i^{IV} = \frac{0,0166245.\sin(23°18'35''-t.2'',4863) + 0,0006641.\sin(22°47'7''-t.25'',5285)}{0,0275\ldots - 0,016\ldots\cos(23°\ldots-t.2'',4\ldots) - 0,0006\ldots\cos(22°\ldots-t.25'',5\ldots)},$$

d'où il est clair que les noeuds n'ont point de vrai moyen mouvement, et qu'il en est de même du périhélie d'Uranus, parcequ'aucun des coefficiens dans l'expression de h^{IV} ne surpasse la somme des deux autres, pris positivement.

§. 278. Considérons maintenant les autres planètes, et supposons que les chiffres, 0, 1, 2, 5, 6, se rapportent respectivement à la Terre, à Mars, à Jupiter, à Vénus, et à Mercure. Cela posé on trouvera

(01) = 0,3062644; [01] = 0,2355051; (02) = 6,9438190; [02] = 1,6859000;
(05) = 5,6585513; [05] = 4,7118855; (06) = 0,0975642; [06] = 0,0462818;
(10) = 1,8452265; [10] = 1,4035268; (12) = 14,4023096; [12] = 5,2439040;
(15) = 0,5128827; [15] = 0,2951128; (16) = 0,0186606; [16] = 0,0058776;
(50) = 6,8905095; [50] = 5,7377400; (51) = 0,1047958; [51] = 0,0602995;
(52) = 4,1287724; [52] = 0,7368968; (56) = 0,4222649; [56] = 0,2712979;
(60) = 0,8953797; [60] = 0,4247437; (61) = 0,0287356; [61] = 0,0090510;

$(62) = 1,5743293$; $[62] = 0,1593933$; $(65) = 3,1824059$; $[65] = 2,0446410$;
d'où l'on a conclu (§. 172. (*b*)).

$(0) = 13,0061989$; $(1) = 16,7590794$; $(5) = 11,5463426$; $(6) = 5,6808505$.

Si l'on fait pour abréger,

$$22'',0920944 = \alpha,\quad 3'',662462 = \alpha_1,\quad -0,01571751 = \mathfrak{B},\quad 0,0439554 = \mathfrak{B}_1,$$
$$126°49'32'' + \alpha t = \mathfrak{b},\quad 27°40'7'' + \alpha_1 t = \mathfrak{b}_1,$$
$$25'',5285407 = \mathfrak{f}_1,\quad 0,02753856 = \mathfrak{G},\quad -0,006364495 = \mathfrak{G}_1,$$
$$103°18'18'' = \mathfrak{g},\quad 126°5'25'' - \mathfrak{f}_1 t = \mathfrak{g}_1,$$

on aura, en négligeant l'action d'Uranus (§. 277.),

$h'' = \mathfrak{B}\sin\mathfrak{b} + \mathfrak{B}_1\sin\mathfrak{b}_1$, $l'' = \mathfrak{B}\cos\mathfrak{b} + \mathfrak{B}_1\cos\mathfrak{b}_1$, $p'' = \mathfrak{G}\sin\mathfrak{g} + \mathfrak{G}_1\sin\mathfrak{g}_1$, etc.

Il est aisé de voir par ce qui précède, que les variables h, l, p, q, h', etc. auront les mêmes argumens, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, et $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$, en vertu de l'action de Jupiter, et un argument de la forme $\beta + bt$, qui est dû à l'action des autres planètes. En faisant donc

$$\text{(A)}\ldots\ldots\begin{cases} h = A\sin\mathfrak{b} + A_1\sin\mathfrak{b}_1 + B\sin(\beta+bt), & l = A\cos\mathfrak{b} + A_1\cos\mathfrak{b}_1 + B\cos(\beta+bt), \\ h' = A'\sin\mathfrak{b} + A'_1\sin\mathfrak{b}_1 + B'\sin(\beta+bt), & \text{etc.} \end{cases}$$

les équations (C) (§. 273.) deviendront

$$(1)\ldots\ldots 0 = \{\alpha - (0)\}A + [01]A' + [05]A^{v} + [06]A^{vi} + [02]\mathfrak{B},$$
$$(2)\ldots\ldots 0 = \{\alpha - (1)\}A' + [10]A + [15]A^{v} + [16]A^{vi} + [12]\mathfrak{B},$$
$$(3)\ldots\ldots 0 = \{\alpha - (5)\}A^{v} + [50]A + [51]A' + [56]A^{vi} + [52]\mathfrak{B},$$
$$(4)\ldots\ldots 0 = \{\alpha - (6)\}A^{vi} + [60]A + [61]A' + [65]A^{v} + [62]\mathfrak{B};$$
$$(5)\ldots\ldots 0 = \{\alpha_1 - (0)\}A_1 + [01]A_1{}^{I} + [05]A_1{}^{v} + [06]A_1{}^{vi} + [02]\mathfrak{B}_1,$$
$$(6)\ldots\ldots 0 = \{\alpha_1 - (1)\}A_1{}^{I} + [10]A_1 + [15]A_1{}^{v} + [16]A_1{}^{vi} + [12]\mathfrak{B}_1,$$
$$(7)\ldots\ldots 0 = \{\alpha_1 - (5)\}A_1{}^{v} + [50]A_1 + [51]A_1{}^{I} + [56]A_1{}^{vi} + [52]\mathfrak{B}_1,$$
$$(8)\ldots\ldots 0 = \{\alpha_1 - (6)\}A_1{}^{vi} + [60]A_1 + [61]A_1{}^{I} + [65]A_1{}^{v} + [62]\mathfrak{B}_1;$$
$$(9)\ldots\ldots 0 = \{b - (0)\}B + [01]B^{I} + [05]B^{v} + [06]B^{vi},$$
$$(10)\ldots\ldots 0 = \{b - (1)\}B^{I} + [10]B + [15]B^{v} + [16]B^{vi},$$
$$(11)\ldots\ldots 0 = \{b - (5)\}B^{v} + [50]B + [51]B^{I} + [56]B^{vi},$$
$$(12)\ldots\ldots 0 = \{b - (6)\}B^{vi} + [60]B + [61]B^{I} + [65]B^{v}.$$

Supposons maintenant $\frac{A}{\mathfrak{B}} = \frac{M}{N}$, $\frac{A'}{\mathfrak{B}} = \frac{M'}{N'}$:

cela posé, les équations (1) (2) (3) (4) donneront par l'élimination.

$$M = [02]\{\alpha-(1)\}\{\alpha-(5)\}\{\alpha-(6)\}$$
$$-[06][62]\{\alpha-(1)\}\{\alpha-(5)\}-[05][52]\{\alpha-(1)\}\{\alpha-(6)\}-[01][12]\{\alpha-(5)\}\{\alpha-(6)\}$$
$$+\{[05][56][62]+[06][65][52]-[02][56][65]\}\{\alpha-(1)\}$$
$$+\{[01][16][62]+[06][61][12]-[02][16][61]\}\{\alpha-(5)\}$$
$$+\{[01][15][52]+[05][51][12]-[02][15][51]\}\{\alpha-(6)\}$$
$$+[01]\{[12][56][65]-[16][52][65]-[15][56][62]\}$$
$$+[05]\{[16][52][61]-[12][56][61]-[16][51][62]\}$$
$$+[06]\{[15][51][62]-[12][51][65]-[15][52][61]\}+2.[02][15][56][61],$$
$$N = -\{\alpha-(0)\}\{\alpha-(1)\}\{\alpha-(5)\}\{\alpha-(6)\}$$
$$+[56][65]\{\alpha-(0)\}\{\alpha-(1)\}+[16][61]\{\alpha-(0)\}\{\alpha-(5)\}+[15][51]\{\alpha-(0)\}\{\alpha-(6)\}$$
$$+[06][60]\{\alpha-(1)\}\{\alpha-(5)\}+[05][50]\{\alpha-(1)\}\{\alpha-(6)\}+[01][10]\{\alpha-(5)\}\{\alpha-(6)\}$$
$$-2.[15][56][61]\{\alpha-(0)\}-2.[05][56][60]\{\alpha-(1)\}$$
$$-2.[01][16][60]\{\alpha-(5)\}-2.[01][15][50]\{\alpha-(6)\}$$
$$+2.[01][15][56][60]+2.[05][56][61][10]+2.[06][61][15][50]$$
$$-[01][10][56][65]-[05][50][16][61]-[06][60][15][51];$$
$$M' = \{[02][16]-[06][12]\}\{\alpha-(5)\}+[56]\{[05][12]-[02][15]\}+[52]\{[06][15]-[05][16]\}$$
$$+\left\{\begin{matrix}[16]\{\alpha-(0)\}\{\alpha-(5)\}-[06][10]\{\alpha-(5)\}-[15][56]\{\alpha-(0)\}\\ +[05][10][56]-[05][16][50]+[06][15][50]\end{matrix}\right\}\frac{A}{\mathfrak{B}},$$
$$N' = [06]\{\alpha-(1)\}\{\alpha-(5)\}-[05][56]\{\alpha-(1)\}-[01][16]\{\alpha-(5)\}$$
$$+[01][15][56]+[05][16][51]-[06][15][51];$$
$$\frac{A^{v}}{\mathfrak{B}} = \frac{[02][16]-[06][12]+\{[16]\{\alpha-(0)\}-[06][10]\}\frac{M}{N}+\{[01][16]-[06]\{\alpha-(1)\}\}\frac{M'}{N'}}{[06][15]-[05][16]},$$
$$\frac{A^{vi}}{\mathfrak{B}} = -\frac{[02]}{[06]}-\frac{\alpha-(0)}{[06]}\cdot\frac{M}{N}-\frac{[01]}{[06]}\cdot\frac{M'}{N'}-\frac{[05]}{[06]}\cdot\frac{A^{v}}{\mathfrak{B}}.$$

Au moyen des équations (5) (6) (7) (8), on trouvera $\frac{A_1}{\mathfrak{B}_1}$, $\frac{A'_1}{\mathfrak{B}_1}$, $\frac{A_1^{v}}{\mathfrak{B}_1}$, $\frac{A_1^{vi}}{\mathfrak{B}_1}$, en mettant dans les formules précédentes α_1 à la place de α. Si on fait pour abréger, $\frac{B'}{B}=\frac{K'}{L}$, $\frac{B^{v}}{B}=\frac{K^{v}}{L}$, $\frac{B^{vi}}{B}=\frac{K^{vi}}{L}$, $b-(0)=x$, $b-(1)=x'$, $b-(5)=x^{v}$, $b-(6)=x^{vi}$, les équations (9) (10) (11) donneront par l'élimination,

$$L = [06]x'x^{v}-[05][56]x'-[01][16]x^{v}+[01][15][56]+[05][16][51]-[06][15][51],$$
$$K' = [16]xx^{v}-[15][56]x-[06][10]x^{v}+[05][10][56]-[05][16][50]+[06][15][50],$$

$$K^{v} = [56]xx' - [16][51]x - [06][50]x' + [01][16][50] - [01][10][56] + [06][10][51],$$

$$K^{vi} = -xx'x^{v} + [15][51]x + [05][50]x' + [01][10]x^{v} - 2.[01][15][50].$$

Si on substitue ces valeurs dans l'équation (12), elle deviendra

$$0 = b^4 - Cb^3 + Db^2 - Eb + F, \quad \text{et l'on trouvera}$$

$$C = (0) + (1) + (5) + (6),$$

$$D = (0)(1) - [01][10] + (0)(5) - [05][50] + (0)(6) - [06][60]$$
$$+ (1)(5) - [15][51] + (1)(6) - [16][61] + (5)(6) - [56][65],$$

$$E = (0)(1)(5) - 2.[01][15][50] + (0)(1)(6) - 2.[01][16][60] + (0)(5)(6) - 2.[05][56][60]$$
$$+ (1)(5)(6) - 2.[15][56][61] - \{(0)+(1)\}[56][65] - \{(0)+(5)\}[16][61] - \{(0)+(6)\}[15][51]$$
$$- \{(1)+(5)\}[06][60] - \{(1)+(6)\}[05][50] - \{(5)+(6)\}[01][10],$$

$$F = (0)(1)(5)(6) + [01][10][56][65] + [05][50][16][61] + [06][60][15][51]$$
$$- (0)(1)[56][65] - (0)(5)[16][61] - (0)(6)[15][51]$$
$$- (1)(5)[06][60] - (1)(6)[05][50] - (5)(6)[01][10]$$
$$- 2.(0)[15][56][61] - 2.(1)[05][56][60] - 2.(5)[01][16][60] - 2.(6)[01][15][50]$$
$$- 2.[01][15][56][60] - 2.[05][10][56][61] - 2.[06][15][50][61].$$

Pour les inclinaisons et les noeuds nous ferons

$$(B) \ldots\ldots \begin{cases} p = F\sin g + F_1 \sin g_1 + G\sin(\eta + gt), \quad q = F\cos g + F_1\cos g_1 + G\cos(\eta + gt), \\ p' = F'\sin g + F'_1 \sin g_1 + G'\sin(\eta + gt), \text{ etc.} \end{cases}$$

Cela posé, les équations (J) (§. 274.) deviendront

$$(13) \ldots\ldots 0 = \{\mathfrak{f}_1 - (0)\} F_1 + (01) F'_1 + (05) F_1^{v} + (06) F_1^{vi} + (02) \mathfrak{G}_1,$$
$$(14) \ldots\ldots 0 = \{\mathfrak{f}_1 - (1)\} F'_1 + (10) F_1 + (15) F_1^{v} + (16) F_1^{vi} + (12) \mathfrak{G}_1,$$
$$(15) \ldots\ldots 0 = \{\mathfrak{f}_1 - (5)\} F_1^{v} + (50) F_1 + (51) F'_1 + (56) F_1^{vi} + (52) \mathfrak{G}_1,$$
$$(16) \ldots\ldots 0 = \{\mathfrak{f}_1 - (6)\} F_1^{vi} + (60) F_1 + (61) F'_1 + (65) F_1^{v} + (62) \mathfrak{G}_1;$$

$$(17) \ldots\ldots 0 = \{g + (0)\} G - (01) G' - (05) G^{v} - (06) G^{vi},$$
$$(18) \ldots\ldots 0 = \{g + (1)\} G' - (10) G - (15) G^{v} - (16) G^{vi},$$
$$(19) \ldots\ldots 0 = \{g + (5)\} G^{v} - (50) G - (51) G' - (56) G^{vi},$$
$$(20) \ldots\ldots 0 = \{g + (6)\} G^{vi} - (60) G - (61) G' - (60) G^{v}.$$

Au moyen des équations (13) (14) (15) (16) on trouvera $\frac{F_1}{\mathfrak{G}_1}, \frac{F'_1}{\mathfrak{G}_1}, \frac{F^{v}_1}{\mathfrak{G}'}, \frac{F^{vi}_1}{\mathfrak{G}_1}$, par les mêmes formules qui ont donné $\frac{A}{\mathfrak{B}}, \frac{A'}{\mathfrak{B}}, \frac{A^{v}}{\mathfrak{B}}, \frac{A^{vi}}{\mathfrak{B}}$, si l'on met $\mathfrak{f}_1$ à la place de α, et des crochets ronds au lieu des crochets carrés. En faisant

$$\frac{G}{\mathfrak{G}} = \frac{R'}{S}, \quad \frac{G^{v}}{G} = \frac{R^{v}}{S}, \quad \frac{G^{vi}}{G} = \frac{R^{vi}}{S}, \quad g + (0) = y, \quad g + (1) = y', \quad g + (5) = y^{v}, \quad g + (6) = y^{vi},$$

les équations (17) (18) (19) (20) seront identiques avec les équations (9) (10) (11) (12), si on met y, etc. à la place de x, etc. G, etc. à la place de B, etc. et les coefficiens représentés par des crochets ronds, et pris avec le signe contraire, au lieu des coefficiens désignés par des crochets carrés, ou ce qui revient au même, si on substitue $-g$ pour b, ou $-y$ pour x. Ainsi, en désignant par $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$, ce que deviennent les quantités D, E, F, si on substitue des crochets ronds pour les crochets carrés, on aura les équations,

$$o = g^4 + Cg^3 + \mathfrak{D}g^2 + \mathfrak{E}g + \mathfrak{F},$$

$$S = (06)y'y^v + (15)(56)y' + (01)(16)y^v + (01)(15)(56) + (15)(16)(51) - (06)(15)(51),$$
$$R' = (06)yy^v + (15)(56)y + (06)(10)y^v + (05)(10)(56) + (06)(15)(50) - (05)(16)(50),$$
$$R^v = (56)yy' + (16)(51)y + (06)(50)y' + (01)(16)(50) + (06)(10)(51) - (01)(10)(56),$$
$$R^{vi} = yy'y^v - (15)(51)y - (15)(50)y' - (01)(10)y^v - 2.(01)(15)(50).$$

§. 279. Si on substitue maintenant les valeurs numériques des coefficiens (01) [01], etc. $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1$ (§. 278.), dans les formules C, D, E, F, M, N, L, etc. on trouvera que les valeurs suivantes satisfont aux équations (1) ..... (12):

$$\text{(C)} \ldots \begin{cases} A = 0{,}00279931, A' = 0{,}01474644, A^v = -0{,}00051259, A^{vi} = 0{,}00013593; \\ A_1 = 0{,}01761317;\ A'_1 = 0{,}01990344, A^v_1 = 0{,}01795519, A^{vi}_1 = 0{,}02545563; \end{cases}$$

$$b = 17',672966,\ b_1 = 16'',64896655,\ b_2 = 7'',2684378,\ b_3 = 5'',40210131;$$

$$\text{(D)} \ldots \begin{cases} B' = -1{,}23630765.B,\ B^v = -0{,}92915102.B,\ B^{vi} = 0{,}12405[illegible]99.B; \\ B'_1 = 9{,}4177496.B_1,\ B_1^v = -1{,}2456353.B_1,\ B_1^{vi} = 0{,}18571042.B_1; \\ B'_2 = 0{,}18488303.B_2,\ B_2^v = 1{,}2[illegible]663533.B_2,\ B_2^{vi} = -1{,}848[illegible]6[illegible]5.B_2; \\ B'_3 = 0{,}16855428.B_3,\ B_3^v = 1{,}4834[illegible]543.B_3,\ B_3^{vi} = 12{,}4106717.B_3. \end{cases}$$

Les valeurs (C) ont été trouvées par les formules M, N, etc.; celles de b, en déterminant les racines de l'équation $o = b^4 - Cb^3 + Db^2 - Eb + F$, par la solution ordinaire des équations du quatrième degré, laquelle consiste à les réduire à une équation du troisième degré, et à ramener celle-ci à la trisection de l'angle: la substitution de ces racines b dans les formules L, K', K^v, K^{vi}, a donné les rapports (D). Mais toutes ces valeurs, trouvées par la méthode directe, ont été corrigées, ensorte qu'elles satisfont aux équations (1) ..... (12) jusqu'à la huitième décimale. Il reste ainsi huit arbitraires, $B, B_1, B_2, B_3, \beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, qu'il faudra déterminer par les valeurs de h, h', h^v, h^{vi}, l, etc. ou de γ, ϖ, γ', etc. que les observations donnent pour l'époque de 1800

(§. 273.). Pour cela on tirera des élémens, renfermés dans la *Tab.* I. (§. 210.), les valeurs suivantes de h, l, etc.

$$(E)\ldots\begin{cases} H = 0,0165\,4961,\ H^{I} = -0,0431\,3911,\ H^{V} = 0,0053\,5449,\ H^{VI} = 0,1979\,0853; \\ L = -0,0027\,6987,\ L^{I} = 0,0825\,407,\ L^{V} = -0,0042\,7703,\ L^{VI} = 0,0553\,9465. \end{cases}$$

Les valeurs (C) et celles de $b = 126°49'32''$, $b_1 = 27°40'7''$ (§. 278.), donneront

$$(F)\ldots\begin{cases} A \sin b = 0,00224075,\ A_1 \sin b_1 = 0,0081788,\ A' \sin b = 0,011804, \\ A'_1 \sin b_1 = 0,0092423,\ A^{V} \sin b = -0,00041031,\ A^{V}_1 \sin b_1 = 0,00833762, \\ A^{VI} \sin b = 0,00010881,\ A^{VI}_1 \sin b_1 = 0,0118205; \\ A \cos b = -0,00167785,\ A_1 \cos b_1 = 0,0155907,\ A' \cos b = -0,00883873, \\ A'_1 \cos b_1 = 0,0176274,\ A^{V} \cos b = 0,00030723,\ A^{V}_1 \cos b_1 = 0,01590198, \\ A^{VI} \cos b = -0,00008148,\ A^{VI}_1 \cos b_1 = 0,0225473. \end{cases}$$

Si l'on fait $t = 0$, les équations (A) (§. 278.) deviendront

$$H = A \sin b + A_1 \sin b_1 + B \sin\beta + B_1 \sin\beta_1 + B_2 \sin\beta_2 + B_3 \sin\beta_3,$$
$$L = A \cos b + A_1 \cos b_1 + B \cos\beta + B_1 \cos\beta_1 + B_2 \cos\beta_2 + B_3 \cos\beta_3,$$
$$H' = A' \sin b + A'_1 \sin b_1 + B' \sin\beta + B'_1 \sin\beta_1 + B'_2 \sin\beta_2 + B'_3 \sin\beta_3,$$

et ainsi du reste. En substituant donc les valeurs (D) (E) (F), et faisant pour abréger,

$$1,2363077\,65 = a;\ 9,4177496 = a_1;\ 0,18488303 = a_2;\ 0,16855428 = a_3;$$
$$0,9098 5102 = c;\ 1,2456353 = c_1;\ 1,22663543 = c_2;\ 1,48348543 = c_3;$$
$$0,12405299 = e;\ 0,18571042 = e_1;\ 1,84836\ 5 = e_2;\ 12,4106717 = e_3;$$
$$B \sin\beta = E,\ B\cos\beta = F,\ B_1 \sin\beta_1 = E_1,\ \text{etc.}$$

on aura les équations,

$$0 = E + E_1 + E_2 + E_3 - 0,0061306;\quad 0 = F + F_1 + F_2 + F_3 + 0,0166910 9;$$
$$0 = -aE + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 + 0,0641854 1;\ 0 = -aF + a_1F_1 + a_2F_2 + a_3F_3 - 0,073752;$$
$$0 = -cE - c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + 0,00257282;\ 0 = -cF - c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3 + 0,02048624;$$
$$0 = eE + e_1E_1 - e_2E_2 + e_3E_3 - 0,18597927;\quad 0 = eF + e_1F_1 - e_2F_2 + e_3F_3 - 0,0329314;$$

auxquelles on satisfaira par les valeurs suivantes:

$$E = 0,01215485,\ E_1 = -0,00518081,\ E_2 = -0,01373984,\ E_3 = 0,0128951 3;$$
$$F = -0,00807951,\ F_1 = 0,007077901,\ F_2 = -0,01594426,\ F_3 = 0,0002506 7.$$

Maintenant les formules tang $\beta = \frac{E}{F}$, tang $\beta_1 = \frac{E_1}{F_1}$, etc. donneront

$\beta = 123°36'45'',3$; $\beta_1 = 143°48'4'',6$; $\beta_2 = 40°45'12'',9$; $\beta_3 = 88°52'22'',9$;
$B = 0{,}01459516$, $B_1 = -0{,}0087723$, $B_2 = -0{,}02104731$, $B_3 = 0{,}01289763$;
d'où l'on tirera par les équations (D),
$B' = -0{,}01804412$, $B'_1 = -0{,}08261528$, $B'_2 = -0{,}00389129$, $B'_3 = 0{,}00217395$;
$B^{v} = -0{,}01357133$, $B_1^{v} = 0{,}01092708$, $B_2^{v} = -0{,}02581738$, $B_3^{v} = 0{,}01913344$;
$B^{vi} = 0{,}00181157$, $B_1^{vi} = -0{,}00162911$, $B_2^{vi} = 0{,}03890319$, $B_3^{vi} = 0{,}16006082$.

Connaissant maintenant toutes les constantes qui entrent dans les expressions des variables, h, l, h', etc. (A) (§. 278.), on aura

pour *la Terre*, $\gamma \sin \varpi =$

$$0{,}002799.\sin(126°49'32'' + t.22'',0921) + 0{,}017613.\sin(27°40'7'' + t.3'',6625)$$
$$+ 0{,}014595.\sin(123°36'45'' + t.17'',673) - 0{,}008772.\sin(143°48'5'' + t.16'',649)$$
$$- 0{,}021047.\sin(40°45'13'' + t.7'',2684) + 0{,}012898.\sin(88°52'23'' + t.5'',4021);$$

pour *Mars*, $\gamma' \sin \varpi' =$

$$0{,}014746.\sin(126°49'32'' + t.22'',0921) + 0{,}019903.\sin(27°40'7'' + t.3'',6625)$$
$$- 0{,}018044.\sin(123°36'45'' + t.17'',673) - 0{,}082615.\sin(143°48'5'' + t.16'',649)$$
$$- 0{,}003891.\sin(40°45'13'' + t.7'',2684) + 0{,}002174.\sin(88°52'23'' + t.5'',4021);$$

pour *Vénus*, $\gamma^{v} \sin \varpi^{v} =$

$$-0{,}000513.\sin(126°49'32'' + t.22'',0921) + 0{,}017955.\sin(27°40'7'' + t.3'',6625)$$
$$- 0{,}013571.\sin(123°36'45'' + t.17'',673) + 0{,}010927.\sin(143°48'5'' + t.16'',649)$$
$$- 0{,}025817.\sin(40°45'13'' + t.7'',2684) + 0{,}019133.\sin(88°52'23'' + t.5'',4021);$$

pour *Mercure*, $\gamma^{vi} \sin \varpi^{vi} =$

$$0{,}000136.\sin(126°49'32'' + t.22'',0921) + 0{,}025456.\sin(27°40'7'' + t.3'',6625)$$
$$+ 0{,}001811.\sin(123°36'45'' + t.17'',673) - 0{,}001629.\sin(143°48'5'' + t.16'',649)$$
$$+ 0{,}038903.\sin(40°45'13'' + t.7'',2684) + 0{,}160061.\sin(88°52'23'' + t.5'',4021);$$

ce qui donne en même tems les valeurs de $l = \gamma \cos \varpi$, etc. en mettant les cosinus à la place des sinus. Cela posé on aura, pour un tems quelconque, éloigné de t ans de l'époque de 1800, les excentricités et les périhélies de ces planètes, au moyen des équations,

$$\gamma = \sqrt{(\gamma^2 \sin^2 \varpi + \gamma^2 \cos^2 \varpi)}, \qquad \tang \varpi = \frac{\gamma \sin \varpi}{\gamma \cos \varpi}.$$

§. 280. Le même procédé à donné, pour les inclinaisons et les noeuds, au moyen des équations (13).....(20) (§. 278.),

$F_1 = 0{,}00318531$, $F'_1 = 0{,}0097764$; $F^{v}_1 = 0{,}0002271$, $F^{vi}_1 = 0{,}00031061$;
$g = -18'',67[illegible]903$, $g_1 = -16'',71488242$, $g_2 = -6'',872[illegible]4[illegible]2$. $g_3 = -4'',73264[illegible]48$;

$$
(G) \ldots\ldots \begin{cases} G = -0{,}6[illegible]6[illegible]982 \,.\, G = -\alpha G, \quad G^{v} = -0{,}9666752 \,.\, G = -\delta G, \\ G^{vi} = 0{,}16940982 \,.\, G = \varepsilon G; \quad G'_1 = 20{,}745966 \,.\, G_1 = \alpha_1 G_1, \\ G^{v}_1 = -1{,}78481537 \,.\, G_1 = -\delta_1 G_1, \quad G^{vi}_1 = 0{,}37959641 \,.\, G_1 = \varepsilon_1 G_1; \\ G'_2 = 0{,}23641113 \,.\, G_2 = \alpha_2 G_2, \quad G^{v}_2 = 1{,}1366736[illegible] \,.\, G_2 = \delta_2 G_2, \\ G^{vi}_2 = -3{,}79413136 \,.\, G_2 = -\varepsilon_2 G_2; \quad G'_3 = 0{,}218[illegible]894 \,.\, G_3 = \alpha_3 G_3, \\ G^{v}_3 = 1{,}35549635 \,.\, G_3 = \delta_3 G_3, \quad G^{vi}_3 = 5{,}50024717 \,.\, G_3 = \varepsilon_3 G_3; \end{cases}
$$

d'où l'on tire, en substituant $g = 103^{\circ}\, 18'\, 18''$, $g_1 = 126^{\circ}\, 5'\, 25''$ (§. 278.),

$$
(H) \ldots\ldots \begin{cases} F \sin g = F' \sin g = F^{v} \sin g = F^{vi} \sin g = \mathfrak{G} \sin g = 0{,}02679939; \\ F \cos g = F' \cos g = F^{v} \cos g = F^{vi} \cos g = \mathfrak{G} \cos g = -0{,}00633758; \\ F_1 \sin g = 0{,}00257402, \quad F'_1 \sin g_1 = 0{,}00790[illegible]21, \quad F^{v}_1 \sin g_1 = 0{,}000183[illegible]2, \\ F^{vi}_1 \sin g_1 = 0{,}000251; \; F_1 \cos g_1 = -0{,}0018763[illegible]4, \; F'_1 \cos g_1 = -0{,}00575888; \\ F^{v}_1 \cos g_1 = -0{,}0001[illegible]378, \quad F^{vi}_1 \cos g_1 = -0{,}00018[illegible]97. \end{cases}
$$

Les élémens des planètes (*Tab. I.* §. 210.) donnent, pour l'époque de 1800, les valeurs suivantes des quantités $p = \theta \sin J = P$, $q = \theta \cos J = Q$, etc.

$$
(K) \ldots\ldots \begin{cases} P = 0, \quad P' = 0{,}02[illegible]01266, \quad P^{v} = 0{,}057[illegible]3621, \quad P^{vi} = 0{,}08826219; \\ Q = 0, \quad Q' = 0{,}0[illegible]16[illegible]2[illegible]5, \quad Q^{v} = 0{,}01546733, \quad Q^{vi} = 0{,}0853571; \end{cases}
$$

et les équations (B) (§. 278.) deviennent, en faisant $t = 0$,

$$P = F \sin g + F_1 \sin g_1 + G \sin \eta + G_1 \sin \eta_1 + G_2 \sin \eta_2 + G_3 \sin \eta_3,$$

$$P' = F \sin g + F'_1 \sin g_1 + G' \sin \eta + G'_1 \sin \eta_1 + G'_2 \sin \eta_2 + G'_3 \sin \eta_3; \text{ etc.}$$

Substituons les valeurs (G) (H) (K), et faisons pour abréger,

$$G \sin \eta = R, \quad G \cos \eta = S, \quad G_1 \sin \eta_1 = R_1, \text{ etc.}$$

Cela posé, les dernières équations se changeront en

$$0 = 0{,}0[illegible]93734[illegible] + R + R_1 + R_2 + R_3, \quad 0 = -0{,}00[illegible]2[illegible]392 + S + S_1 + S_2 + S_3;$$
$$0 = 0{,}0106[illegible]694 - \alpha R + \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3, \quad 0 = -0{,}03369901 - \alpha S + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3;$$
$$0 = -0{,}0[illegible]02533 - \delta R - \delta_1 R_1 + \delta_2 R_2 + \delta_3 R_3, \quad 0 = -0{,}[illegible]219[illegible]69 - \delta S - \delta_1 S_1 + \delta_2 S_2 + \delta_3 S_3;$$
$$0 = -0{,}0612118 + \varepsilon R + \varepsilon_1 R_1 - \varepsilon_2 R_2 + \varepsilon_3 R_3, \quad 0 = -0{,}[illegible]91[illegible]7765 + \varepsilon S + \varepsilon_1 S_1 - \varepsilon_2 S_2 + \varepsilon_3 S_3;$$

lesquelles seront satisfaites par les valeurs suivantes,

$R = -0{,}027[illegible]4593$, $R_1 = -0{,}0014[illegible]896$, $R_2 = -0{,}00[illegible]738218$, $R_3 = 0{,}0069836[illegible]$;
$S = -0{,}00617927$, $S_1 = 0{,}00128105$, $S_2 = -0{,}00218607$, $S_3 = 0{,}01529821$;
d'où l'on a conclu

$\eta = 77^\circ\, 21'\, 22'',9$; $\eta_1 = 131^\circ\, 52'\, 33'',8$; $\eta_2 = 73^\circ\, 30'\, 16'',2$; $\eta_3 = 24^\circ\, 32'\, 12'',4$;

$G = -0{,}02823051$, $G_1 = -0{,}00191911$, $G_2 = -0{,}00769906$, $G_3 = 0{,}01681686$;

$G' = -0{,}01965685$; $G'_1 = -0{,}03981389$, $G'_2 = -0{,}00182014$, $G'_3 = 0{,}00366791$;

$G^{\text{v}} = 0{,}02728973$, $G^{\text{v}}_1 = 0{,}00342526$, $G^{\text{v}}_2 = -0{,}00875132$, $G^{\text{v}}_3 = 0{,}02279515$;

$G^{\text{vi}} = -0{,}00478253$, $G^{\text{vi}}_1 = -0{,}00072849$, $G^{\text{vi}}_2 = 0{,}02921123$, $G^{\text{vi}}_3 = 0{,}09249688$.

Il en résulte, en vertu des équations (B) (§. 278.),

pour *la Terre*,

$$\begin{aligned}\theta \sin J = {} & 0{,}0267939 + 0{,}000135 \,.\, \sin(126^\circ\, 5'\, 25'' - t\,.\,25'',5285) \\ & - 0{,}028231 \,.\, \sin(77^\circ 21' 23'' - t\,.\,18'',6729) - 0{,}001919 \,.\, \sin(131^\circ 52' 34'' - t\,.\,16'',7149) \\ & - 0{,}007699 \,.\, \sin(73^\circ 30' 16'' - t\,.\,6'',872) + 0{,}016817 \,.\, \sin(24^\circ 32' 12'' - t\,.\,4'',7326),\end{aligned}$$

pour *Mars*,

$$\begin{aligned}\theta' \sin J' = {} & 0{,}0267939 + 0{,}009776 \,.\, \sin(126^\circ\, 5'\, 25'' - t\,.\,25'',5285) \\ & + 0{,}019657 \,.\, \sin(77^\circ 21' 23'' - t\,.\,18'',6729) - 0{,}039814 \, \sin(131^\circ 52' 34'' - t\,.\,16'',7149) \\ & - 0{,}001820 \,.\, \sin(73^\circ 30' 16'' - t\,.\,6'',872) + 0{,}003668 \,.\, \sin(24^\circ 32' 12'' - t\,.\,4'',7326),\end{aligned}$$

pour *Vénus*,

$$\begin{aligned}\theta^{\text{v}} \sin J^{\text{v}} = {} & 0{,}0267939 + 0{,}000227 \,.\, \sin(126^\circ\, 5'\, 25'' - t\,.\,25'',5285) \\ & + 0{,}027290 \,.\, \sin(77^\circ 21' 23'' - t\,.\,18'',6729) + 0{,}003425 \,.\, \sin(131^\circ 52' 34'' - t\,.\,16'',7149) \\ & - 0{,}008751 \,.\, \sin(73^\circ 30' 16'' - t\,.\,6'',872) + 0{,}022795 \,.\, \sin(24^\circ 32' 12'' - t\,.\,4'',7326),\end{aligned}$$

pour *Mercure*,

$$\begin{aligned}\theta^{\text{vi}} \sin J^{\text{vi}} = {} & 0{,}0267939 + 0{,}000311 \,.\, \sin(126^\circ\, 5'\, 25'' - t\,.\,25'',5285) \\ & - 0{,}004783 \,.\, \sin(77^\circ 21' 23'' - t\,.\,18'',6729) - 0{,}000728 \,.\, \sin(131^\circ 52' 34'' - t\,.\,16'',7149) \\ & + 0{,}029211 \,.\, \sin(73^\circ 30' 16'' - t\,.\,6'',872) + 0{,}092497 \,.\, \sin(24^\circ 32' 12'' - t\,.\,4'',7326).\end{aligned}$$

Si on met les cosinus à la place des sinus, et $\mathfrak{G} \cos g = -0{,}0063758$ au lieu de $\mathfrak{G} \sin g = 0{,}0267939$, les formules précédentes se changeront en $\theta \cos J$, $\theta' \cos J'$, etc. et l'on aura, pour un tems quelconque, les inclinaisons et les longitudes des noeuds sur l'écliptique de 1800, par les équations

$$\theta = \sqrt{(\theta^2 \sin^2 J + \theta^2 \cos^2 J)}, \qquad \tang J = \frac{\theta \sin J}{\theta \cos J}.$$

§. 281. On a déjà vu (§. 275.), que la disposition des masses qui composent le système solaire, et celle de leurs orbites, est telle que, malgré toutes les perturbations qui résultent de leurs attractions mutuelles, les orbites des planètes seront toujours à peu près circulaires et dans un même plan. Les

équations intégrales que nous venons de trouver, donnent le moyen de déterminer plus exactement les limites, entre lesquelles oscilleront toujours les excentricités et les inclinaisons, ainsi que le mouvement des apsides et des noeuds. Il résulte des équations (A) (B) (§. 279. 280.), qu'à une époque quelconque on aura

$$\gamma^2 = A^2 + A^2_{,} + B^2 + B^2_{,} + B^2_{2} + B^2_{3} + 2AA_{,}\cos(b - b_{,}) + 2AB\cos(b - \beta - bt) + \text{cet.}$$

$$\theta^2 = F^2 + F^2_{,} + G^2 + G^2_{,} + G^2_{2} + G^2_{3} + 2FF_{,}\cos(g - g_{,}) + 2FG\cos(g - \eta - gt) + \text{cet.}$$

et ainsi du reste. Il est visible, que ces carrés ne peuvent jamais devenir plus grands que les valeurs qu'ils prendraient, si tous les cosinus devenaient en même tems positifs et égaux à l'unité; ce qui ne peut arriver qu'après une infinité de siècles. Alors on aura

$$\gamma = A + A_{,} + B + B_{,} + B_2 + B_3, \quad \theta = F + F_{,} + G + G_{,} + G_2 + G_3.$$

Il en est de même des expressions que nous avons trouvées pour Uranus, Saturne, et Jupiter (§. 277.). Ainsi les limites, au delà desquelles il est impossible que les excentricités et les inclinaisons des planètes puissent croître, seront

pour *Uranus*,

Excentricité = 0,065322, Inclinaison = 0,044847 = 2° 34′ 8″;

pour *Saturne*,

Excentricité = 0,084742, Incliuaison = 0,04438 = 2° 32′ 28″;

pour *Jupiter*,

Excentricité = 0,061512, Inclinaison = 0,035201 = 2° 0′ 58″;

pour *Mars*,

Excentricité = 0,141375, Inclinaison = 0,102274 = 5° 50′ 22″;

pour la *Terre*,

Excentricité = 0,077725, Inclinaison = 0,085389 = 4° 52′ 50″;

pour *Vénus*,

Excentricité = 0,087917, Inclinaison = 0,090027 = 5° 8′ 40″;

pour *Mercure*,

Excentricité = 0,227995, Inclinaison = 0,155068 = 8° 48′ 52″.

On voit que ces *maxima* sont peu différens des valeurs actuelles (§. 209.), à l'exception des excentricités de la Terre et de Vénus, lesquelles semblent

être près de leur *minimum*, et qui ne pourront jamais devenir aussi grandes que l'excentricité actuelle de Mars. On voit en même tems, que les plans des orbites ne sortiront jamais du zodiaque, auquel on donne ordinairement une largeur de huit degrés, et que l'inclinaison de Saturne est très-près de son *maximum*.

Nous avons vu (§. 277.), que les moyens mouvemens sidéraux des apsides de Saturne et de Jupiter sont de 22″,1 et de 3″,7 par an, mais que les apsides d'Uranus, et les noeuds de toutes les planètes n'ont point de vrai moyen mouvement. Le vrai lieu des périhélies et des noeuds, pour une époque quelconque, est donné par les équations $\tan \varpi = \frac{h}{l}$, $\tan J = \frac{p}{q}$, si, dans les formules de $\gamma \sin \varpi$, $\gamma \cos \varpi$, $\theta \sin J$, $\theta \cos J$, etc. (§. 279. 280.) on substitue pour t ou $-t$ le nombre d'années, duquel l'époque est postérieure ou antérieure à l'an 1800. Au reste, toutes ces longitudes sont comptées depuis le point équinoxial de 1800; et il est aisé de voir que, pour avoir les vraies longitudes comptées depuis l'équinoxe mobile, on n'a qu'à ajouter 50″,1 à tous les coefficiens de t, c'est-à-dire à a, a_1, f_1, b, b_1, b_2, b_3, g, g_1, g_2, g_3 (§. 278.). Pour le prouver, considérons un terme quelconque de h et l, ou de p et q, tel que $h = B \sin(\beta + bt) = \gamma \sin \varpi$, $l = B \cos(\beta + bt) = \gamma \cos \varpi$, ϖ étant la longitude du périhélie, comptée depuis l'équinoxe fixe. En nommant (ϖ) la longitude comptée depuis l'équinoxe mobile, on aura $(\varpi) = \varpi + 50'',1 \,.\, t$, et

$$\tan(\varpi) = \frac{\gamma \sin(\varpi + 50'',1\,.\,t)}{\gamma \cos(\varpi + 50'',1\,.\,t)} = \frac{h \cos 50'',1\,.\,t + l \sin 50'',1\,.\,t}{l \cos 50'',1\,.\,t - h \sin 50'',1\,.\,t} =$$

$$\frac{B \sin(\beta + bt) \cos 50'',1\,.\,t + B \cos(\beta + bt) \sin 50'',1\,.\,t}{B \cos(\beta + bt) \cos 50'',1\,.\,t - B \sin(\beta + bt) \sin 50'',1\,.\,t} = \frac{B \sin(\beta + bt + 50'',1\,.\,t)}{B \cos(\beta + bt + 50'',1\,.\,t)},$$

expression qui est identique avec $\frac{h}{l}$, si l'on augmente b de 50″,1.

§. 282. Il en est de même des inclinaisons. Les valeurs précédentes de cet élément se rapportent au plan fixe, dans lequel la terre a fait sa révolution autour du soleil en 1800. Dans tout autre tems l'orbite de la terre fera avec ce plan un angle qui est donné par la valeur de θ, répondant à ce tems t. Si, dans les formules de $\theta \sin J$ et $\theta \cos J$ (§. 280.) on fait $t = 0$, on trouvera $\theta \sin J = 0$ et $\theta \cos J = 0$, ce qui veut dire que l'orbite, décrite par la terre en 1800, coïncide avec le plan fixe auquel on rapporte toutes les orbi-

tes, et que par conséquent, le point d'intersection de ces deux plans qui ne font qu'un seul, est indéterminé. Mais à la même époque, le plan dans lequel la terre circule autour du soleil, commencera à se séparer du plan fixe; et les points où se fait cette séparation, et qu'on appelle noeuds, seront déterminés par la méthode ordinaire, en faisant $\operatorname{tang} J = \frac{\partial p}{\partial q}$, et supposant $t = 0$ après la différentiation. Si l'on différentie la formule (B) (§. 278), en faisant $t = 0$, il viendra

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -F_1 f_1 \cos 126^\circ 3' 25'' + Gg \cos \eta + G_1 g_1 \cos \eta_1 + G_2 g_2 \cos \eta_2 + G_3 g_3 \cos \eta_3,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = F_1 f_1 \sin 126^\circ 3' 25'' - Gg \sin \eta - G_1 g_1 \sin \eta_1 - G_2 g_2 \sin \eta_2 - G_3 g_3 \sin \eta_3,$$

et en substituant pour F_1, f_1, G, g, η, etc. leurs valeurs (§. 28[illegible]),

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0{,}1836[illegible]988, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -0{,}3[illegible]404602; \text{ d'où il vient}$$

$$J = 152^\circ 36' 7''.$$

C'est dans ce point, dirigé sur une étoile de la quatrième grandeur dans la constellation du *Lion*, que l'orbite de la terre en 1800 s'est élevée au-dessus du plan, dans lequel cette planète venait d'achever sa révolution.

Le mouvement de l'orbite de la terre étant un des objets les plus importans de l'astronomie, attendu qu'en dépend la réduction de toutes les observations, et ce mouvement étant composé de la variation de l'obliquité de l'écliptique, et de la précession des équinoxes, due à l'action des planètes sur la terre, il faudra déterminer ces deux élémens par des expressions analogues aux précédentes, lesquelles, étant des intégrales complettes, pourront être étendues aux époques les plus éloignées. Soit (*Fig.* 4[illegible].) N'C l'équateur, N'I le plan de l'orbe terrestre en 1800, qui est regardé comme l'écliptique fixe, NI la véritable orbite à une époque quelconque, ensorte que I sera le noeud ascendant de l'orbite sur l'écliptique fixe, $N'IN = \eta$ ou θ son inclinaison, N', N, les points équinoxiaux aux époques 1800 et $1800 + t$, desquels on compte les longitudes et les ascensions droites, $N'I = J$ et $NI = J - i$ les longitudes du noeud sur l'écliptique fixe et sur l'écliptique mobile, $N'N = \nu$ et $N'I - NI = i$ la partie de la précession du point équinoxial en ascension droite et en longitude, laquelle ne dépend pas de l'action luno-solaire sur

le sphéroïde terrestre, mais seulement de l'action des planètes sur le centre de la terre, $IN'N = e$ et $INC = e + \varepsilon$ les obliquités de l'écliptique aux époques 1800 et $1800 + t$. Cela posé on aura dans le triangle N'IN,

$$\cos(e + \varepsilon) = \cos e \cos \eta - \sin e \sin \eta \cos J, \quad \text{et} \quad \frac{\sin J}{\sin(e+\varepsilon)} = \frac{\sin \nu}{\sin \eta} = \frac{\sin (J - i)}{\sin e}.$$

Les angles η, ε, ν, i, étant très-petits, la première équation deviendra

$$\cos e - \varepsilon \sin e = \cos e - \theta \cos J \sin e, \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \theta \cos J = q,$$

la seconde donnera $\nu = \frac{\theta \sin J}{\sin e}$, et $\sin e \sin J = \sin e \sin J - i \sin e \cos J + \varepsilon \cos e \sin J$, donc

$$i = \varepsilon \operatorname{tang} J \cot e = \theta \sin J \cot e = p \cot e.$$

On doit observer que $N'I = J$ est la longitude, comptée depuis le point équinoxial de l'an 1800. Pour la compter du point équinoxial vrai ou mobile, il faut substituer $J + t.50'',1$ pour J (§. 281.), donc

$\theta \sin J \cos t.50'',1 + \theta \cos J \sin t.50'',1 = p \cos t.50'',1 + q \sin t.50'',1$ pour p, et

$$q \cos t.50'',1 - p \sin t.50'',1 \text{ pour } q.$$

Or p étant $= G \sin(\eta + gt) +$ cet. $\quad q = G \cos(\eta + gt) +$ cet. (§. 278. (B)), il faudra mettre

$G \sin(\eta + gt + t.50'',1)$ au lieu de p, et $G \cos(\eta + gt + t.50'',1)$ au lieu de q, ce qui revient à ajouter $50'',1$ à chaque coefficient de t, tel que f_1, g, g_1, etc. Cela posé on aura, par ce qui précède,

$$\varepsilon = q, \quad \text{et} \quad i = p \cot 23° 28' = 2,3035 . p.$$

Les formules précédentes (§. 280.) donneront $\theta \sin J$ ou

$p = 0,027539 \sin(103°18'18'' + t.50'',1) + 0,003185 . \sin(126°5'25'' + t.24'',5715)$
$- 0,028231 . \sin(77°21'23'' + t.31'',4271) - 0,001919 \sin(131°51'34'' + t.33'',3851)$
$- 0,007699 . \sin(73°30'16' + t.43',228) + 0,016817 . \sin(24°32'12'' + t.45',3674)$;

et l'on aura q, en mettant les cosinus à la place des sinus. Si on décompose chaque terme $\sin(\alpha + at)$ en deux autres, $\sin\alpha \cos at + \cos\alpha \sin at$, et $\cos(\alpha + at)$ en $\cos\alpha \cos at - \sin\alpha \sin at$, qu'on exprime tous les termes en secondes d'un degré, et qu'on multiplie ceux de p par 2,3035; il viendra

l'augmentation de l'obliquité de l'écliptique, $\varepsilon =$

$- 1307'',21 . \cos t.50'',1 - 5527'',78 . \sin t.50'',1 - 387'',02 . \cos t.24'',5715$
$- 530'',93 . \sin t.24'',5715 - 1274'',56 . \cos t.31'',4271 + 5681'',76 . \sin t.31'',4271$

$$+264'',24 \,.\, \cos t \,.\, 33'',3851 + 294'',4 \,.\, \sin t \,.\, 33'',3851 - 450'',91 \,.\, \cos t \,.\, 43'',228 + 1512'',68 \,.\, \sin t \,.\, 43'',228 + 3155'',49 \,.\, \cos t \,.\, 45'',3674 - 1440'',48 \,.\, \sin t \,.\, 45'',3674;$$

la précession des points équinoxiaux en longitude, $i =$

$$12733'',28 \,.\, \cos t \,.\, 50'',1 - 3011'',17 \,.\, \sin t \,.\, 50'',1 + 1223'',0 \,.\, \cos t \,.\, 24'',5715 - 891'',51 \,.\, \sin t \,.\, 24'',5715 - 13087'',96 \,.\, \cos t \,.\, 31'',4271 - 2935'',97 \,.\, \sin t \,.\, 31'',4271 - 678'',16 \,.\, \cos t \,.\, 33'',3851 + 608'',67 \,.\, \sin t \,.\, 33'',3851 - 3507'',51 \,.\, \cos t \,.\, 43'',228 - 1038'',68 \,.\, \sin t \,.\, 43'',228 + 3318'',15 \,.\, \cos t \,.\, 45'',3674 + 7268'',68 \,.\, \sin t \,.\, 45'',3674.$$

Si l'on fait $t=0$, les deux formules précédentes deviennent nulles, ainsi que cela doit être. En faisant $t=100$ et $t=-100$, on trouvera $\varepsilon=-49'',1$ et $\varepsilon=48'',9$, $i=8''$ et $i=-10'',9$. Pour $t=-2000$ on aura $\varepsilon=847'',4$ et $i=-1250''$; d'où l'on conclura ce qui suit. L'obliquité de l'écliptique a éprouvé, des plus anciens tems de l'astronomie, une diminution qui va toujours en croissant, et qui est actuellement de 49″ par siècle; ensorte qu'au tems d'Hipparque l'obliquité doit avoir été de 23° 42′. Tout cela est conforme aux observations (I. §. 83.). Depuis le tems d'Hipparque les points équinoxiaux ont avancé de 20′ 50″, et leur précession séculaire, qui est actuellement d'environ 9″, va en décroissant: elle se changera en rétrogradation au bout d'environ 400 ans. Si on suppose, suivant les meilleures observations (I. §. 90.), la rétrogradation annuelle des points équinoxiaux égale à 50″,1, elle doit avoir été de 27° 50′ depuis le tems d'Hipparque. En y ajoutant la précession de 20′ 50″, due à l'action des planètes, on aura la rétrogradation *moyenne* pendant cet intervalle $= 28° \; 10' \; 50''$, ce qui étant divisé par 2000, donnera la précession annuelle des équinoxes, due à l'action lunosolaire $= 50'',7$, à peu près comme nous l'avons trouvée par la théorie de l'attraction (§. 118.).

La formule précédente de ε ne renfermant aucun arc de cercle, mais seulement des sinus et cosinus, il est évident que les variations de l'obliquité ne sont que périodiques, ou des oscillations dont les limites extrêmes pourront être déterminées de la manière suivante. La somme de deux termes de ε, dépendant du même argument η, et ayant la forme $A \cos \eta t + B \sin \eta t$, sera un *maximum*, lorsque

$$-A\eta \sin \eta t + B\eta \cos \eta t = 0, \text{ ou } \tan \eta t = \frac{B}{A}, \text{ donc}$$

$$\sin \eta t = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, \quad \cos \eta t = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}},$$

d'où il résulte la plus grande valeur des deux termes,

$$A \cos \eta t + B \sin \eta t = \pm \sqrt{(A^2 + B^2)}.$$

Cela donne la limite, au delà de laquelle ε ne peut jamais croitre ou décroître,

$$\varepsilon = 5180'',04 + 657'',12 + 5123'' + 3,5\ 5, + 158'',14 + 468'',73 = 4°51'32'',6.$$

Il est donc impossible que l'obliquité devienne jamais plus grande que 28°21′ ou plus petite que 18°35′, et les oscillations de cet angle seront toujours renfermées dans un arc de 9°47′. Mais comme cela suppose que toutes les combinaisons de deux termes homologues de ε parviennent à leur *maximum* en même tems, il est aisé de voir que les oscillations de l'obliquité seront effectivement renfermées entre des limites beaucoup plus resserrées, qu'on trouvera en égalant à zéro la différentielle de ε. Les *maxima* et les *minima* de l'obliquité seront donc donnés par les valeurs de t, qui satisfont à l'équation,

$$0 = \zeta(1307,1 . \sin \zeta t - 55\ 7,78 . \cos \zeta t) + \eta(387,02 . \sin \eta t - 51,93 . \cos \eta t)$$
$$+ \kappa(1\ 74,55 . \sin \kappa t + 5381,76 . \cos \kappa t) - \lambda(64\ 4 . \sin \lambda t - 294,4 . \cos \lambda t)$$
$$+ \mu(5\ ,91 . \sin \mu t + 5\ 2,68 . \cos \mu t) - \nu(3\ 55,19 . \sin \nu t + 1440,48 . \cos \nu t),$$

en faisant pour abréger,

$$5\ ,1 = \zeta,\ 24'\ 5,\ 5 = \eta,\ 31''{,}4\ 71 = \kappa,\ 33'',3\ 5 = \lambda,\ 41'',228 = \mu,\ 45'',3674 = \nu.$$

Il est visible que l'équation précédente sera satisfaite par un nombre indéfini de valeurs de t, parceque chaque sinus appartient à une infinité d'arcs, ζt, ηt, etc. d'où il résultera un nombre infini, non seulement des *maxima* et *minima* de ε, mais aussi des périodes de l'augmentation et de la diminution de l'obliquité, lesquelles ne reviendront dans le même ordre, que lorsque tous les angles ζt, ηt, etc. auront fait un nombre entier de révolutions, ayant respectivement augmenté de $m . 360°$, $n . 360°$, etc. d'où il naîtra une grande période qui renferme un grand nombre de petites périodes, et une immensité de siècles. Nous nous bornerons à déterminer les périodes les plus proches de l'époque où nous sommes, les autres se perdant dans l'éternité. L'équation précédente, $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$, est satisfaite par les valeurs suivantes de t.

1) $t = -31179$, 2) $t = -16200,5$, 3) $t = -3802$;
4) $t = +4782$, 5) $t = +17546$, 6) $t = +32359$;

qui donnent ces valeurs de ε,

3) $\varepsilon = +4° 3' 30''$, 2) $\varepsilon = -2° 7' 49''$, 3) $\varepsilon = +0° 24' 47''$,
4) $\varepsilon = -0° 33' 37''$, 5) $\varepsilon = +1° 53' 20''$, 6) $\varepsilon = -2° 28' 51''$.

On en a conclu les résultats suivans. L'an 29379 avant l'ère chrétienne, l'obliquité a eu sa plus grande valeur de 27°31'30". Depuis cette époque l'obliquité a diminué pendant 14979 ans jusqu'à l'an 14400, où elle a été de 21°20'11". Après cela l'obliquité a augmenté pendant 12398 ans, et deux mille ans avant J.C. elle a été de 23°52'47". Pendant les 8584 ans suivans l'obliquité va en croissant, et l'an 6582 de l'ère chrétienne elle sera de 22° 54' 23". Ensuite l'obliquité augmentera pendant 12764 ans, jusqu'en 19346, où elle sera de 25° 21' 20". Depuis cette époque elle diminuera pendant 14813 ans, et l'an 34159 elle parviendra à son *minimum* de 20° 59' 9". Dans cet intervalle de plus de 635 siècles les variations de l'obliquité seront renfermées dans un arc de 6°32'21", de 20°59'9" à 27°31'30": le milieu entre ces deux extrêmes est 24° 15' 20", ce qui n'excède l'obliquité actuelle que de 47'.

Les périodes de l'augmentation et de la diminution de l'obliquité sont très-différentes entre elles, de 86 à 150 siècles; mais malgré toutes ces anomalies on apercevra aisément la loi de stabilité que la nature observe ici, ainsi que, dans les règnes organisés de notre globe, elle maintient la perpétuité des espèces, sans considérer les individus; on verra qu'après un nombre infini de petites modifications, elle revient toujours à l'état primitif. L'angle formé par l'écliptique et l'équateur, duquel dépendent les vicissitudes des saisons, change avec une lenteur excessive, étant toujours renfermé dans les limites étroites de 21° à 28°. Il y eut un tems, où l'été et l'hiver des zones tempérées étaient plus rigoureux, les jours d'été et les nuits d'hiver plus longs qu'à présent; il viendra un tems, où les saisons seront plus modérées, les jours d'été et d'hiver moins différens les uns des autres. Mais la différence sera toujours peu considérable, et au bout d'une infinité de siècles, l'été et l'hiver, le printems et l'automne, se succèderont precisément comme aujourd'hui.

§. 283. La véritable révolution de la terre autour du soleil, que nous appelons l'année sidérale, est constamment de même durée, parceque les perturbations des planètes n'altèrent point les grand axes de leurs orbites. Mais l'année *tropique* est plus courte que l'année sidérale, du tems que le soleil, suivant son moyen mouvement, emploie à parcourir l'arc, duquel les points équinoxiaux rétrogradent dans cette année. L'année tropique sera donc pareillement d'une longueur constante, si le mouvement des points équinoxiaux est uniforme; mais elle diminuera ou augmentera, si le vrai mouvement des points équinoxiaux s'accélère ou se ralentit: ce qui est réellement le cas, malgré l'uniformité du mouvement de 50″ à 51″, dû à l'action luno-solaire sur le sphéroïde de la terre, parceque le mouvement d'une demi-seconde, qui résulte de l'action des planètes, change d'un siècle à l'autre (§. 282.). Or l'année tropique étant déterminée immédiatement par observation, en supposant uniforme le mouvement des points équinoxiaux (I. §. 122 — 124.), il en résulte, que la durée de l'année paraîtra diminuer ou augmenter, selon que la correction de la rétrogradation des points équinoxiaux, due à l'action des planètes, est positive ou négative: par conséquent le moyen mouvement du soleil paraîtra avoir une *équation séculaire*, qui sera positive dans le premier cas, négative dans le second, et qui en effet n'est qu'une équation du point équinoxial. D'après cela, la longueur *moyenne* de l'année tropique sera celle qu'on aura conclue, en ne considérant que la rétrogradation des points équinoxiaux, qui résulte de l'action du soleil et de la lune, parceque le mouvement, dû à l'action des planètes, est périodique, tantôt positif, tantôt négatif, tantôt nul. Ainsi, pour trouver la *moyenne* année tropique, on doit retrancher de sa longueur vraie ou observée, la partie qui résulte de l'action des planètes, en convertissant en tems le mouvement annuel des points équinoxiaux d'environ une demi-seconde, en raison du moyen mouvement du soleil. L'expression précédente de i (§ 282.) donnant l'intégrale de ce mouvement pour t ans, on aura le mouvement *annuel* pour une époque, postérieure ou antérieure à l'an 1800 de $\pm t$ ans, en différentiant l'équation i, et en égalant ∂t à une année, ou faisant $\partial t = 1$: ce qui étant converti en tems, en multipliant par $\frac{24\,h.}{59'8'',33} = \frac{86400}{3548,33} = 24,34948$, donnera la différence entre l'année moyenne et l'année vraie en secondes.

Ainsi le nombre de secondes, dont la vraie année tropique est plus longue que l'année moyenne, sera $24,34948 . \frac{\partial i}{\partial t} = k$, et l'on trouvera

$$k = -75'',3083 . \sin \zeta t - 17'',8089 . \cos \zeta t - 3'',5475 . \sin \eta t - 2'',586 . \cos \eta t$$
$$+ 48'',5558 . \sin \varkappa t - 10'',8923 . \cos \varkappa t + 2'',6727 . \sin \lambda t + 2'',3988 . \cos \lambda t$$
$$+ 17'',899 . \sin \mu t - 5'',3004 . \cos \mu t - 17'',7705 . \sin \nu t + 38'',9282 . \cos \nu t.$$

Si l'on ôte k de l'année tropique vraie ou observée, il restera l'année moyenne; on aura l'année vraie, en ajoutant k avec l'année moyenne.

En faisant $t = 0$, on trouvera pour l'époquo de 1800, $k = + 4'',74$; ce qui nous apprend, que l'année 1800 est de $4\frac{3}{4}$ secondes plus longue que l'année moyenne: d'où il suit que $k - 4'',74$ est l'augmentation de la vraie année tropique pendant t ans depuis 1800. La plus grande valeur *possible* sera trouvée, comme précédemment (§. 282.), en ajoutant ensemble les racines de la somme des carrés de deux coefficiens du même argument. Cela donne

$$k = \pm 196'',6 = \pm 3' \, 17'':$$

d'où il suit que la vraie année tropique ne pourra jamais s'écarter de l'année moyenne de plus de $3\frac{1}{4}$ minutes, et que la plus grande différence possible entre deux années vraies est de $6\frac{1}{2}$ minutes. Mais pour trouver les *véritables maxima* et *minima* de k, qui indiqueront les changemens qu'éprouvera l'année tropique dans un grand nombre de siècles avant et après 1800, il faut égaler à zéro la différentielle de k, et substituer en k la valeur de t qui résulte de l'équation $\frac{\partial k}{\partial t} = 0$. Cela donnera

$$t = -4836 \text{ et } k = + 37'',9; \quad t = + 5764 \text{ et } k = - 38''.$$

On trouvera $k = 0$, si $t = + 427$.

Delà on tirera les conclusions suivantes. Antérieurement à l'année 3036 avant J. C. l'année tropique a été plus longue que l'année moyenne, et l'année 3036 a été la plus longue parmi un grand nombre de siècles, savoir de 38 secondes plus longue que l'année moyenne. Depuis cette époque jusqu'en 1800 après J. C. l'année a toujours diminué, et diminuera encore jusqu'en 7564. L'année 1800 n'a excédé l'année moyenne que de 5 secondes, et l'année 2227 lui sera exactement égale. Depuis cette époque l'année sera plus courte que l'année moyennè jusqu'en 7564, où la différence montera

à 38″: après cela les années recommenceront à augmenter, en se rapprochant de l'année moyenne. La diminution continuelle de l'année depuis 3000 ans avant J. C. jusqu'à nos jours, que nous venons de trouver par la théorie, est conforme à ce que quelques astronomes ont conclu des observations les plus anciennes, comparées avec les observations modernes (II. §. 190.); mais la même théorie prouve, que cette diminution n'existera pas toujours, qu'au bout de 5764 ans elle se changera en augmentation, et que la longueur de l'année est toujours renfermée entre des limites très-étroites.

§. 284. Puisque l'*équation séculaire de la lune* dépend uniquement de l'excentricité de l'orbe terrestre (§. 250.), on pourra maintenant décider la question, si cette équation est d'une progression continuelle ou périodique, et quelles sont ses périodes et limites. Nous avons trouvé (§. 258.) l'expression générale de l'équation séculaire de la lune, α,

$$m'\,\delta v = -\,70{,}49742\,.\int\gamma^2\,\partial t,$$

ou en secondes d'un degré,

$$\alpha = -\,14541136''.\int\gamma^2\,\partial t = -\,a\int\gamma^2\,\partial t,$$

γ étant l'excentricité variable de la terre, dont la valeur est donnée pour une époque quelconque, par l'équation (§. 281.)

$$\gamma^2 = A^2 + A^2_1 + B^2 + B^2_1 + \text{cet.} = f + \Phi.$$

Cette expression est composée d'une partie constante

$$f = A^2 + A^2_1 + B^2 + B^2_1 + B^2_2 + B^2_3,$$

et d'une partie variable

$$\Phi = 2\,A\,A_1\cos(\delta - \delta_1) + 2\,A\,B\cos(\delta - \beta - bt) + \text{cet.}$$

On aura donc, en intégrant,

$$\alpha = -\,a f t - a\int\Phi\,\partial t,$$

le premier terme appartenant au moyen mouvement de la lune, et le second donnant l'équation séculaire de ce mouvement. Si on désigne par Γ la vraie excentricité de la terre à l'époque de 1800, on aura pour un tems quelconque t, le carré de la vraie excentricité en fonction du tems (§. 250.),

$$\gamma^2 = \Gamma^2 + Dt + Et^2 + \text{cet.}$$

ce qui étant comparé avec l'équation $\gamma^2 = f + \Phi$, donnera

$$\Phi = \Gamma^2 - f + Dt + Et^2 + \text{cet.}$$

d'où l'on tirera, en faisant $t = 0$,

$$\Phi' = \Gamma^2 - f,$$

ce qui est la partie variable ou l'équation du carré de l'excentricité, à l'époque de 1800. Il en résulte l'équation séculaire, ou plutôt la partie variable du moyen mouvement de la lune dans le dix-neuviéme siècle,

$$\alpha' = -\alpha(\Gamma^2 - f)\,t;$$

donc en nommant N' le moyen mouvement séculaire, apparent ou observé, dans le dix-neuvième siècle, et N le véritable mouvement moyen, on aura

$$N' = N - \alpha(\Gamma^2 - f), \quad \text{partant } N = N' + \alpha(\Gamma^2 - f),$$

en faisant $t = 1$, parceque t, dans ces formules, désigne le nombre des siècles (§. 250.). Dans tout autre siècle, la différence entre les mouvemens séculaires, moyen et apparent, sera $-\alpha\int\Phi\partial t = -\alpha\Phi$, parcequ'on peut regarder Φ comme constant pendant cent ans. Si on emploie les valeurs précédentes (§. 279. 209.),

$$A = 0{,}002799, \; A_1 = 0{,}017613, \; B = 0{,}014595,$$

$$B_1 = -0{,}008771, \; B_2 = -0{,}021047, \; B_3 = 0{,}012898; \; \Gamma = 0{,}0167798;$$

on trouvera

$$f = 0{,}0012173416, \; \Gamma^2 = 0{,}00028156\,17; \text{ donc}$$

$$\Gamma^2 - f = -0{,}00093578, \; \alpha(\Gamma^2 - f) = -13607'', \; N = N' - 13607''.$$

Ainsi on aura le vrai moyen mouvement séculaire de la lune, en retranchant 3°46'47'' du mouvement observé dans le dix-neuvième siècle.

La plus grande valeur possible de l'excentricité de la terre étant $\gamma = 0{,}077725$ (§. 281.); $\gamma^2 = f + \Phi$ ne peut jamais devenir plus grand que 0,006041176, ce qui donnera

$$\gamma^2 - f = \Phi = 0{,}0048238\,34, \text{ donc } \alpha\Phi = 70144'' = 19°29'4''.$$

Il s'en suit que le mouvement séculaire de la lune ne peut jamais être de $19\frac{1}{2}$ degrés moindre que le mouvement moyen, ni de $23\frac{1}{4}$ degrés moindre que le mouvement actuel. La plus petite valeur de Φ ou $\gamma^2 - f$ est $0 - f = -0{,}0012173416$; ce qui donnera

$$\alpha\Phi = -17701'' = -4°55'1''.$$

Ainsi la plus grande valeur possible du mouvement séculaire de la lune sera de 4°55' plus grand que le mouvement moyen, et de 1°8' plus grand que dans

le dix-neuvième siècle. Il suit de là, que le mouvement séculaire de la lune sera toujours renfermé entre les limites $N'+1°8'$ et $N'-23°16'$, et que le plus grand changement *possible* ne monte qu'à $24°24'$. Mais les véritables limites étant beaucoup plus resserrées, il ne sera pas inutile de les déterminer.

§. 285. Le moyen mouvement séculaire de la lune, pour une époque quelconque, étant $n=N-\alpha(\gamma^2-f)$ (§. 284.), il deviendra un *maximum* ou un *minimum* en même tems que $f-\gamma^2$: ainsi les périodes de l'excentricité de la terre donneront celles du moyen mouvement de la lune. Pour les trouver, il faut égaler à zéro la différentielle de l'équation $\gamma^2=A^2+A_1{}^2+B^2+$cet. (§. 281.). Au moyen des valeurs précédentes (§. 279.) on trouvera

$$\gamma^2 = 0{,}001217342 + 0{,}0000986o9 . \cos(99°9'25'' + t.18'',4296)$$
$$+0{,}000081713.\cos(3°12'13''+t.4'',4191) - 0{,}000049113.\cos(343°1'27''+t.5'',4431)$$
$$-0{,}000117836.\cos(86°4'19''+t.14'',8237) + 0{,}00007229.\cos(37°27'9''+t.16'',69)$$
$$+0{,}000514134.\cos(95°36'38''+t.14'',0105) - 0{,}000309016.\cos(116°7'58''+t.12'',9865)$$
$$-0{,}00074142.\cos(13°5'6''+t.3'',606) + 0{,}000454335.\cos(61°12'16''+t.1'',7396)$$
$$-0{,}000256066\cos(339°48'41''+t.1'',024) - 0{,}000614378.\cos(82°51'32''+t.10'',4040)$$
$$+0{,}000376485.\cos(34°44'22''+t.12'',2709) + 0{,}000369267.\cos(103°2'52''+t.9'',3805)$$
$$-0{,}000226283.\cos(54°55'42''+t.11'',2469) - 0{,}00054292.\cos(311°52'50''+t.1'',8663).$$

Parmi le grand nombre de valeurs de t, qui font évanouir la différentielle de l'expression précédente, les plus petites sont

$$t = -13248 \quad \text{et} \quad t = +23610.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouvera

$$\gamma^2 = f - 0{,}000831308 = 0{,}000386034, \text{ et}$$
$$\gamma^2 = f - 0{,}001201909 = 0{,}000015426; \text{ donc}$$
$$\gamma = 0{,}01964775 \text{ et } \gamma = 0{,}003928435.$$

Delà on tirera les conclusions suivantes. L'an 11448 avant J. C. l'excentricité de l'orbe terrestre a été un *maximum* $= 0{,}01964775$. Depuis cette époque elle va toujours en décroissant pendant 36858 ans, et parviendra à son *minimum* $= 0{,}003928435$ l'an 25410 de l'ère chrétienne; alors elle commencera à croître. Dans cet intervalle de 36858 ans, qui renferme le siècle présent, l'excentricité de la terre sera toujours renfermée entre 0,0039 et 0,0196.

On en a conclu, pour cette période, les limites de $\phi=\gamma^2-f$ (§. 284.):

$$\Phi = -0{,}0008313 \quad \text{et} \quad \Phi = -0{,}00130191; \text{ donc}$$
$$-\alpha\Phi = 3°21'28'', \quad \text{et} -\alpha\Phi = 4°51'17''.$$

Il s'en suit que, 11448 ans avant J. C. le mouvement séculaire de la lune a été un *minimum*, savoir de 3°21'28″ plus grand que le mouvement moyen, et de 25'19″ plus petit que dans le dix-neuvième siècle. Depuis cette époque le mouvement séculaire augmente pendant 36858 ans, et parviendra à son *maximum* l'an 25410, quand il sera de 4°51'17″ plus grand que le mouvement moyen, et de 1°4'30″ plus grand que dans le siècle présent: ensorte que, dans cette longue période de 36858 ans, le mouvement séculaire n'augmentera que d'un degré et demi, après quoi il commencera à diminuer. Ainsi on voit, combien les véritables limites de $1\frac{1}{2}$ degrés sont plus étroites que les limites possibles de 24°24′ (§. 284.).

§. 286. L'explication précédente de l'équation séculaire de la lune, qui s'est trouvée parfaitement conforme aux observations aussi bien qu'à la théorie de la gravitation, n'est pas moins importante sous un autre point de vue, parcequ'elle prouve que, depuis l'origine de l'astronomie, la vitesse de la rotation de la terre n'a point changé (§. 119.). En effet le moindre changement de cette vitesse alongerait ou accourcirait le jour, qui est la mesure universelle du tems dans l'astronomie: il changerait donc nécessairement le nombre qui exprime chaque période, quand même cette période serait invariable. Si la vitesse de la rotation augmente, ou que la durée du jour diminue, chaque période astronomique, l'année, le mois, etc. sera exprimé par un plus grand nombre de jours et de ses fractions; le contraire aura lieu, si la rotation est retardée. Ainsi, lorsque le nombre qui représente une période, indépendante de la rotation de la terre, ne change pas, il faut en conclure que cette rotation est invariable, à moins que d'autres observations ne prouvent le contraire: car il n'est pas impossible, quoiqu'il soit infiniment peu probable, que la rotation et cette période, étant supposées indépendantes l'une de l'autre, changent précisément dans le même rapport. Le résultat ne sera plus douteux, s'il est confirmé par différentes périodes. Or il est certain que la longueur de l'*année* n'a pas changé depuis deux mille ans, ou que le petit changement qu'on croit avoir aperçu, est expliqué par des causes physiques (§. 283.). Il en est de même

de la *lune*. Les observations de vingt siècles nous aprennent, que le mois diminue continuellement, ou que le moyen mouvement de la lune devient plus vite; mais on a vu que c'est une véritable accélération, dont nous venons de donner l'explication physique. Si l'on en fait abstraction, le rapport du jour à l'année et au mois, et par conséquent la durée du jour, ou la vitesse de la rotation de la terre, n'a point changé depuis deux mille ans.

Supposons par ex. que la longueur du jour ait augmenté de la centième partie d'une seconde, depuis Hipparque jusqu'à nos jours, ensorte que l'espace de cent années Juliennes, ou le siècle soit actuellement plus long que celui d'Hipparque de 365 secondes, pendant lesquelles la lune parcourt un arc de 3′20″. Cela posé le mouvement séculaire de la lune serait à présent de 3′20″ plus grand que dans le tems d'Hipparque. Mais cet arc surpasse beaucoup la différence qui existe entre ces deux mouvemens: en effet, le mouvement séculaire, observé par Hipparque, après avoir été corrigé par l'équation séculaire dont nous venons de donner l'explication physique, est sensiblement le même que le mouvement actuel. On peut donc être certain, que la longueur du jour, ou la période de la rotation de la terre, n'a pas changé de la centième partie d'une seconde pendant deux mille ans, et que, par conséquent, elle ne change pas, dans l'espace d'un an, de la 200000me partie d'une seconde.

§. 287. Les recherches précédentes tiennent à un des objets les plus intéressans de l'astronomie; et il faut convenir que, sous ce rapport, une détermination sure et exacte des masses des planètes, principalement de Vénus, serait un des plus grands enrichissemens de cette science, puisque les résultats précédens, étant fondés sur la grandeur supposée des masses planétaires, pourront paraître douteux, si les masses ne sont pas bien connues. Mais il est aisé de s'assurer, que cette incertitude, sans altérer les conclusions générales que nous en avons tirées relativement à la stabilité du système solaire, n'influe que sur la grandeur des limites et des périodes que le calcul nous a données. Les limites pourront s'élargir ou rétrécir, les périodes pourront s'alonger ou raccourcir; mais elles ne pourront devenir infinies, que lorsque les expressions analytiques, qui ont donné les mouvemens séculaires, renfer-

ment des arcs au lieu des sinus. On se rappellera que toutes ces formules dépendent de la solution de l'équation algébrique qui donne les quantités b, g, par lesquelles le tems t se trouve multiplié dans les expressions, B sin $(\beta + bt)$, G sin $(\eta + gt)$ (§. 273. 274.); et nous avons vu (§. 275.) que, quelles que soient les masses des planètes, ces expressions ne peuvent renfermer ni exponentielles ni arcs de cercle, parceque toutes les planètes circulent autour du soleil dans le même sens. Il est donc certain, que l'arrangement du système planétaire, que l'Auteur de la nature a choisi, ne renferme aucun germe, duquel puisse sortir le moindre dèsordre, et que son état actuel, à de petites oscillations près, durera éternellement, à moins que des causes externes ou des corps étrangers ne viennent à le déranger.

Il n'y a donc que les comètes qui, en s'enfonçant de tems en tems dans l'intérieur du système planétaire, pourraient, à ce qui paraît, detruire les conclusions précédentes. Mais une pareille crainte serait beaucoup moins raisonnable que celle des inondations, combustions, ou autres destructions, auxquelles on croyait autrefois que la terre fût exposée à chaque approche d'une comète. Il est infiniment peu probable, qu'une comète vienne raser la terre, mais il n'est pas tout-à-fait impossible; et dans un pareil cas, les vapeurs qui environnent ou composent la comète, pourraient sans doute produire sur notre globe, des révolutions funestes ou salutaires. Mais un hazard si peu vraisemblable ne suffirait pas pour défigurer le mouvement de la terre, ou pour déranger le système entier. Le grand nombre des comètes qu'on a observées, surtout de celles qui ont passé très-près de la terre, ou qui ont traversé le système des satellites de Jupiter (II. §. 361.), a fourni une preuve incontestable, que leur masse est si peu comparable à celle des planètes, que les comètes ne pourront jamais causer un trouble sensible dans le mouvement des planètes. Quand même le cas extraordinaire d'une rencontre ou d'un choc aurait lieu, on pourrait être assuré qu'à cause de la petitesse de la masse, cela ne produirait que des révolutions locales, ou des dérangemens passagers qui n'influeraient pas sur les mouvemens séculaires, ou sur l'état général du système planetaire. Aussi a-t-on vu que, malgré les chocs ou rencontres qui dans le grand nombre des siècles écoulés peuvent

66

avoir eu lieu, l'attraction mutuelle des planètes suffit, pour expliquer toutes les inégalités de leur mouvement, et que l'action des comètes n'a laissé aucune trace, les orbes planétaires étant aujourd'hui aussi peu excentriques et inclinés, qu'ils l'ont été dès leur origine. Il semble donc qu'on peut admettre le principe général, qu'aucun corps céleste, dont l'orbite est très-excentrique, ne peut causer des perturbations sensibles dans les orbites circulaires, à cause de la petitesse de sa masse, ou de la disposition de son orbite. De pareilles réflexions, en dissipant la terreur qu'inspiraient autrefois les comètes, rassureront les astronomes sur l'exactitude et la certitude des résultats qu'ils ont trouvés et qu'ils trouveront encore par le calcul des perturbations des planètes (1). Ces résultats donnent sujet à une observation, par laquelle nous allons terminer la théorie de l'astronomie, et qui rend cette science aussi intéressante pour le philosophe que pour le géomètre.

Nous avons déjà observé (§. 10.), que les lois de la nature, aussi bien que celles de la société civile, sont de deux genres essentiellement différens, qu'on peut distinguer par le nom des lois *absolues* et *positives*, ou *nécessaires* et *arbitraires*. Il faut mettre au nombre des premières, non-seulement celles qui sont absolument nécessaires à l'existence d'un monde matériel quelconque, comme l'impénétrabilité, mais aussi chaque loi générale que le hazard ou la sagesse suprême nous paraît avoir choisie parmi plusieurs autres, parceque nous n'en voyons pas la nécessité, et qui influe essentiellement sur l'organisation de l'univers, en sorte que, cette loi étant abolie, il résulterait une autre physique, une autre nature; enfin, toute loi qui peut être énoncée par un théorème général, telle que la loi de l'attraction. Les lois arbitraires ou positives comprennent la manière individuelle, dont les lois générales ou absolues sont *appliquées*, l'*arrangement* des diverses parties de l'univers, la *grandeur* de l'échelle, adoptée dans l'exécution du plan, la *direction* du mouvement, etc. L'influence essentielle que les lois de la première classe ont sur la nature entière, pourrait autoriser la conclusion qu'on s'est permis d'y fonder, que ces lois, étant indispensables pour l'existence de l'univers, n'ont

(1) Voy. *Mécanique céleste, Tom. IV. pag* 230.

besoin d'autre législateur que la nécessité. La seule conséquence qu'on pourrait en tirer, c'est que tout ce qui suit des lois absolues, est le résultat, non d'un choix libre, mais d'une nécessité impérieuse; et il est visible que cette conséquence ne peut nullement être étendue aux lois que nous avons appelées arbitraires. Ainsi, puisque les lois générales ne constituent qu'un monde *possible* ou idéal, et qu'on ne peut pas concevoir un monde *réel* sans lois individuelles, sans dimensions déterminées, etc. qu'en un mot aucun être ne peut exister, sans que toutes les circonstances, même les plus indifférentes, dans lesquelles il pourra se trouver, soient pleinement déterminées; on était obligé d'abandonner au *hasard* les lois positives que les observations nous font connaître, pour ne pas recourir à une cause agissant librement et sagement. Mais si on réfléchit que l'univers a existé des milliers d'années sans le moindre dérangement, si le calcul et les observations prouvent, ainsi que nous l'avons vu, que cet ordre et cette stabilité sont l'effet des lois mêmes que nous avons appelées arbitraires, que ces lois ont été choisies précisément telles qu'elles devaient l'être, pour que le monde conservât son état primitif éternellement ou pendant une immensité de siècles — peut-on attribuer au hazard, ce qui indique de la manière la plus évidente un plan général? est-il possible de ne pas reconnaître la sagesse suprême, qui a eu autant de soin de la conservation que de la beauté de son ouvrage?

Ce n'est pas ici le lieu de donner plus d'étendue à ces réflexions, dont l'application est facile. Quand même on voudrait supposer, que la loi fondamentale de la mécanique céleste, l'attraction de chaque molécule en raison inverse des carrés des distances, soit absolument nécessaire, parcequ'autrement l'univers se détruirait en peu de tems, et que par conséquent les lois, suivant lesquelles les planètes décrivent des ellipses autour du soleil, et troublent mutuellement leurs orbites, ne prouvent aucune sagesse législatrice; — quand on se permettrait cette supposition, quoique l'impossibilité d'autres lois ne puisse être démontrée; on ne disconviendra cependant pas, que sans préjudice de ces lois, les masses célestes auraient pu être distribuées dans l'espace de mille manières différentes, qui n'auraient assuré au système solaire qu'une courte existence. C'est clairement prouvé par le calcul qui a fait l'objet du

Chapitre présent, et dont le résultat dépend de la distribution arbitraire des masses planétaires, laquelle nous est connue par l'observation seule, et qui n'admet aucune recherche *a priori*, aucune apparence de nécessité. On a vu qu'une autre disposition des masses transformerait tout-à-fait le système solaire, et qu'un autre arrangement des orbites pourrait le détruire à la longue (§. 184.), mais que l'arrangement actuel est tel, que rien ne s'oppose à une durée éternelle. Quiconque est capable de comprendre ces vérités sublimes, ne peut qu'adorer la sagesse suprême qui destina la plus parfaite machine à une durée éternelle, en mettant dans sa première organisation le germe de l'immortalité, et en prescrivant aux corps célestes des limites insurmontables, dans lesquelles ces masses immenses circuleront éternellement sans interruption et sans confusion.

FIN DU TOME TROISIEME ET DERNIER.



